

Перенормировка давления Казимира методом эффективных поверхностных зарядов

Ю. С. Воронина^a, П. К. Силаев^b

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра квантовой теории и физики высоких энергий. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

E-mail: ^avoronina-yulya@yandex.ru, ^bsilaeov@bog.msu.ru

Статья поступила 28.12.2009, подписана в печать 13.04.2010

Задача регуляризации и перенормировки давления Казимира в конечной области с гладкой границей рассматривается на примере вещественного скалярного поля в двумерном случае. Предложены способ перенормировки давления на границе с помощью некоторой модифицированной области и метод приближенного вычисления функции Грина и ее производных с помощью эффективных поверхностных зарядов. На примере задачи, допускающей точное решение, показано, что метод обеспечивает достаточно высокую точность и вычислительную эффективность.

Ключевые слова: эффект Казимира, вакуумные эффекты в квантовой теории поля, регуляризация и перенормировки в квантовой теории поля.

УДК: 530.145. PACS: 03.70.+k.

Введение

Эффект Казимира находит приложения во многих областях физики — в физике твердого тела, где давление Казимира оказывает существенное влияние на свойства поверхностей и поведение нанообъектов [1], в физике высоких энергий, где необходимо учитывать энергию Казимира в моделях кварковых мешков [2–4], в астрофизике, где эффект Казимира играет существенную роль в космологических моделях [5, 6].

В настоящее время существует ряд задач, которые до сих пор не получили удовлетворительного решения. Например, для квантового поля в проводящей сфере был найден способ получения конечной энергии путем сложения энергий внутри и вне границ системы [7]. Однако, во-первых, при этом перенормировка фактически производится не для исходной внутренней задачи, а для суммы внутренней и внешней задач, и, во-вторых, применить подобный метод к задаче для диэлектрического шара оказывается невозможным.

Настоящая работа посвящена регуляризации и перенормировке давления Казимира в двумерных системах в случае действительного скалярного массивного поля. Подчеркнем, что рассматривается именно давление, так как в этом случае упрощается выбор точки нормировки ввиду того, что давление является непосредственно наблюдаемой физической величиной. В настоящей работе мы применяем «естественную» систему единиц $\hbar = c = 1$, так что все приведенные ниже числовые значения давления имеют размерность $[m]^3 = [L]^{-3}$.

Рассмотрим вещественное скалярное массивное поле в некоторой двумерной области D с гладкой границей Γ при отсутствии внешнего поля. Будем говорить, что система имеет «бесконечный» объем, если область определения этой системы неограниченно увеличивается по всем пространственным направлениям. В остальных случаях будем говорить о «конечном» объеме системы.

В качестве точки нормировки для давления $p_D(\xi)$ в точке ξ на границе области D можно выбрать давление $p_{D'}(\xi)$ на границе некоторой модифицированной

области D' , при условии что значения кривизны границы в рассматриваемой точке ξ для областей D и D' совпадают. Последнее требование необходимо для устранения логарифмических расходимостей, связанных с конечной кривизной границ системы.

Эффект Казимира обусловлен изменением спектра нулевых колебаний поля при ограничении объема квантования системы. Если объем квантования D'_∞ «бесконечен», то давление Казимира на границе области в реальных системах в отсутствие внешнего поля должно обращаться в нуль. Тогда в этом случае величину $p_D(\xi) - p_{D'_\infty}(\xi)$ возможно отождествить с физическим давлением Казимира на границе области D . Если же объем квантования D' «конечен» в указанном выше смысле, то в системе остается ненулевая плотность энергии, связанная с конечностью расстояния между границами системы. Тогда разность $p_D(\xi) - p_{D'}(\xi)$ дает давление Казимира на границе области D с точностью до некоторой константы, зависящей от параметров, характеризующих «конечный» объем системы.

Давление в некоторой точке ξ на границе Γ этой области определяется пространственными компонентами тензора энергии-импульса T_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$

$$p(\xi) = \langle 0 | n^i n^j T_{ij}(\xi) | 0 \rangle, \quad (1)$$

где n^i — компоненты внешней нормали к границе в точке ξ . Можно показать [2, 5, 8], что давление $p(\xi)$ выражается через функцию Грина $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ внутренней задачи Дирихле в области D для уравнения Гельмгольца

$$p(\xi) = -\frac{1}{2\pi} \int_m^\infty \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 - m^2}} [2(\mathbf{n} \cdot \nabla_x)(\mathbf{n} \cdot \nabla_y) - (\nabla_x \cdot \nabla_y)] \times G(\mathbf{x}, \mathbf{y})|_{\mathbf{x}=\mathbf{y}=\xi} d\kappa, \quad (2)$$

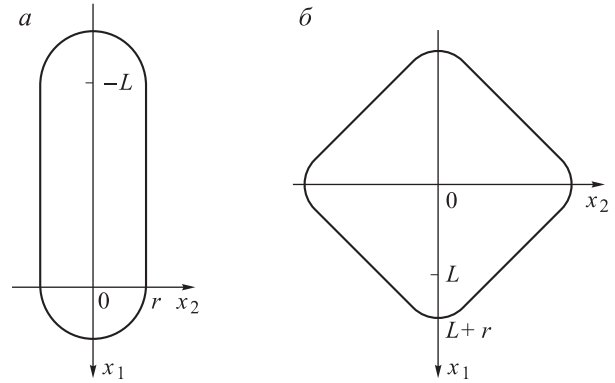
где учтено, что $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})|_{\mathbf{x}=\xi \in \Gamma} = 0$. Из (2) видно, что давление определяется с помощью производных функции Грина, являющихся сингулярными функциями в точке $\mathbf{x} = \mathbf{y} = \xi$. Заметим также, что в правую часть входят производные от поверхностной функции Грина

$S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{n}, \nabla_y G(\mathbf{x}, \mathbf{y}))|_{\mathbf{y} \in \Gamma}$. Поверхностную функцию Грина можно разбить на два слагаемых — конечное и расходящееся

$$S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = S^{(s)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + S^{(r)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (3)$$

(С остальными производными от функции Грина $\partial_{y_j} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})|_{\mathbf{y}=\xi}$ следует поступить аналогичным образом.) Такое разбиение является неоднозначным, и неопределенность снимается после выбора точки нормировки. Используя предложенный выше способ перенормировки с помощью вспомогательной области D' и выбирая одинаковыми сингулярные части поверхностной функции Грина для областей D и D' в окрестности рассматриваемой точки ξ , получим, что регуляризованное давление выражается через регулярные части поверхностной функции Грина этих областей. Таким образом, задача регуляризации давления свелась к нахождению разности регулярных частей поверхностных функций Грина (а также разности регулярных частей остальных производных функции Грина) для областей D и D' .

В настоящей статье мы будем рассматривать перенормировку давления Казимира для семейства областей, которые могут быть получены из круга радиуса $r = 1$ и содержащих его в качестве предельного случая, не ограничивая общности, поскольку выбор точки нормировки для произвольной области с гладкими границами осуществляется аналогичным образом. В качестве первого варианта рассмотрим область D_L^1 , получающуюся при раздвижении двух полуокружностей на расстояние L , которую далее мы будем называть «овалом» (рисунок, а). Будем интересоваться давлением на границе этой области в точке ξ , лежащей на пересечении оси симметрии области D_L^1 с одной из полуокружностей, например в точке $\xi = (r, 0)$. Если за точку нормировки принять давление в аналогичной точке ξ на границе модифицированной области D_∞^1 , соответствующей случаю, когда расстояние L неограниченно возрастает, то мы получим физическое давление, нормированное на некоторую постоянную величину, зависящую от r , поскольку в системе останется энергия, связанная с конечным расстоянием $2r$ между прямыми стенками. Несмотря на то что перенормировка давления с помощью D_∞^1 не позволяет получить наблюдаемое давление на границе «овала» как функцию его длины, тем не менее эта задача представляет самостоятельный интерес. Действительно, величина $p_{D_L^1}^{(ren)}(\xi) = p_{D_L^1}(\xi) - p_{D_\infty^1}(\xi)$ позволяет вычислить конечное давление на границе «овала» D_L^1 только с точностью до константы, зависящей от r . Однако разность таких перенормированных давлений для различных L (и одинаковых r) является наблюдаемой величиной. Следует отметить, что в реальных экспериментах измеряется именно зависимость давления Казимира от параметров, определяющих размер системы [5, 9]. Кроме того, мы будем рассматривать этот пример, поскольку относительная простота области D_L^1 позволяет вычислить соответствующую поверхностную функцию Грина точно в виде рядов по собственным функциям оператора Лапласа для нижнего и верхнего полуокружностей и соединяющего их прямоугольника. При этом $S(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, представленная в виде соответствующих рядов в полуокружностях



Контуры интегрирования Γ_L^1 (а) и Γ_L^2 (б)

и прямоугольнике, должна удовлетворять условиям непрерывности и непрерывности своих производных на границах между этими областями, а на границе Γ_L^1 самой области D_L^1 эта функция должна обращаться в нуль. Таким образом, у нас есть возможность сравнить результаты, полученные приближенными методами, с точным ответом.

В качестве второго варианта выберем область D_L^2 , получающуюся после раздвижения всех четвертей круга на расстояние L от центра первоначального круга (рисунок, б). Далее эту область будем называть «квадратом». В этом случае будем интересоваться давлением в граничной точке ξ , являющейся точкой пересечения оси симметрии с одной из четвертей окружности, например $\xi = (r+L, 0)$. Точкой нормировки в этом случае будем считать давление в аналогичной граничной точке ξ области D_∞^2 . В такой системе ввиду бесконечности объема квантования D_∞^2 физическое давление в рассматриваемой точке обращается в нуль. Следовательно, после перенормировки с помощью области D_∞^2 , для которой $L \rightarrow \infty$, можно ожидать, что мы получим наблюдаемое давление.

1. Давление на границе области и эффективные поверхностные заряды

Сначала рассмотрим скалярное поле в «овале» D_L^1 , ограниченном замкнутой кривой

$$\Gamma_L^1 = \bigcup_{i=1}^4 \gamma_i,$$

где $\gamma_1 = \{(x, y): 0 \leq x, x^2 + y^2 = r^2\}$, $\gamma_3 = \{(x, y): x + L \leq 0, (x + L)^2 + y^2 = r^2\}$, $\gamma_2 = \{(x, y): -L \leq x \leq 0, y = r\}$, $\gamma_4 = \{(x, y): -L \leq x \leq 0, y = -r\}$.

Пусть на границе области поле обращается в нуль. Найдем давление Казимира в граничной точке $\xi = (r, 0)$, определяемое в данном случае выражением

$$p(\xi) = -\frac{1}{2\pi} \int_m^\infty \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 - m^2}} (\mathbf{n} \cdot \nabla_x S(\mathbf{x}, \mathbf{y}))|_{x=y=\xi} d\kappa. \quad (4)$$

То есть давление в точке ξ определяется производной по нормали к границе Γ_L^1 от поверхностной функции Грина в выбранной точке. В данном случае эту функцию можно найти точно, поскольку рассматриваемая область имеет довольно простую конфигурацию. Также можно использовать приближенные методы. Например,

регулярную часть поверхностной функции Грина можно искать с помощью ряда борновского типа [10]. Для участков γ_i , $i = 1, 3$, границы Γ_L^1 сингулярную часть выберем в виде

$$S^{(s)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\kappa}{r\pi} K_1(\kappa|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \frac{r^2 - (x_1 y_1 + x_2 y_2)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \Big|_{\mathbf{y} \in \gamma_i}, \quad (5)$$

где K_1 — функция Макдональда первого порядка [11]. Если точка \mathbf{x} располагается вблизи \mathbf{y} , тогда, учитывая поведение функции Макдональда первого порядка для малых значений аргумента, получаем

$$S^{(s)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Big|_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}} = \lim_{\substack{x \rightarrow r \\ \phi_x - \phi_y \sim 0}} \frac{1}{\pi} \left[\frac{(r-x) + x/2(\phi_x - \phi_y)^2}{(r-x)^2 + rx(\phi_x - \phi_y)^2} \right] = \frac{\delta(\phi_x - \phi_y)}{r} + \frac{1}{2\pi r},$$

где (x, ϕ_x) , (r, ϕ_y) — координаты точек \mathbf{x} , \mathbf{y} соответственно в полярной системе координат, начало которой совмещено с центром полуокружности γ_i .

Для прямых участков γ_i , $i = 2, 4$, границы Γ_L^1 сингулярную часть выбираем в виде

$$S^{(s)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\kappa}{\pi} K_1(\kappa|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \frac{r - |x_2|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \Big|_{\mathbf{y} \in \gamma_i}. \quad (6)$$

Аналогично тому, как мы получили поведение сингулярной части для полуокружностей при $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$, можно показать, что сингулярная часть для прямых участков имеет особенность

$$S^{(s)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Big|_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}} = \delta(x_1 - y_1).$$

Как уже отмечалось, разделение поверхностной функции Грина на сумму регулярной и сингулярной частей является неоднозначным. Однако этот произвол ограничен условием локальности, т.е. сингулярная часть должна либо зависеть только от выбранной точки ξ на границе, как в случае (5), либо определяться кривизной границы в этой точке. Поэтому можно предложить альтернативный выбор сингулярной части для участков γ_1 и γ_3 границы Γ_L^1 в виде $S_{\text{new}}^{(s)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = S^{(s)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, где

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\kappa^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ik(x_2 y_1 - x_1 y_2)/r} e^{-\sqrt{\kappa^2 + k^2}(r - (\mathbf{x}\mathbf{y})/r)}}{(\kappa^2 + k^2)^{3/2}}.$$

Такой выбор сингулярной части приводит к ускорению сходимости ряда [10].

Хотя борновский ряд и дает явный ответ для регулярной части в квадратурах, однако такой способ вычисления при выборе сингулярных частей в виде (5), (6) или при их альтернативном выборе дает не слишком высокую точность для малых порядков приближения, а при увеличении количества слагаемых ряда возрастают технические сложности при вычислениях.

Более эффективным окажется следующий метод. Будем интересоваться поверхностной функцией Грина некоторой области D , ограниченной гладким контуром Γ . Как уже упоминалось, эту функцию можно представить в виде суммы (3) регулярной и сингулярной частей, которые внутри рассматриваемой области

удовлетворяют однородному уравнению Гельмгольца, а на границе выполняется условие

$$S^{(r)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta_{\Gamma}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - S^{(s)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (7)$$

где

$$\oint_{\Gamma} \delta_{\Gamma}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) f(\mathbf{z}) dl_z = f(\mathbf{x})$$

для произвольной функции $f(\mathbf{x})$. Сингулярную часть следует выбирать так, чтобы она определялась только заданной на границе точкой \mathbf{y} и не зависела от остальных точек области, а регулярная часть должна определяться всей остальной областью. Такое разбиение поверхностной функции Грина на два слагаемых является произвольным в указанном смысле, и неопределенность снимается после выбора точки нормировки для регуляризованного давления. Регулярную часть можно искать в виде интеграла по замкнутому контуру Γ , ограничивающему рассматриваемую область

$$S^{(r)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \oint_{\Gamma} G_0(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \rho(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dl_z, \quad (8)$$

где $G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ представляет собой свободную функцию Грина уравнения Гельмгольца, а $\rho(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ — неизвестная ограниченная непрерывная функция переменной $\mathbf{z} \in \Gamma$. В самом деле, тогда регулярная часть, определяемая равенством (8), является непрерывной во всей замкнутой области \bar{D} , а внутри этой области удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца. Неизвестная функция $\rho(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ должна строиться так, чтобы выполнялось граничное условие (7). Таким образом, получаем интегральное уравнение для ρ

$$\delta_{\Gamma}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = S^{(s)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \oint_{\Gamma} G_0(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \rho(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dl_z, \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (9)$$

Сделаем два замечания относительно функции ρ . Во-первых, интегралы в (8) и (9) являются несобственными, поскольку функция $G_0(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ имеет логарифмическую особенность при $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z}$. Однако поскольку мы наложили условие непрерывности и ограниченности на функцию $\rho(\mathbf{z}, \mathbf{y})$, то этот интеграл существует, и, как уже упоминалось, определяемая таким образом функция $S^{(r)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ непрерывна при $\mathbf{x} \in \bar{D}$ и имеет производные всех порядков внутри D . Во-вторых, так как регулярную часть определяет интеграл от произведения ρ и функции источника в свободном пространстве G_0 , то регулярную часть поверхностной функции Грина можно интерпретировать как потенциал, создаваемый зарядами, распределенными на границе Γ с линейной плотностью $\rho(\mathbf{z}, \mathbf{y})$. Тем самым задача поиска регулярной части поверхностной функции Грина свелась к задаче вычисления плотности эффективных поверхностных зарядов ρ .

Будем решать интегральное уравнение (9) для ρ численно. Разобьем замкнутую кривую Γ на N частей точками \mathbf{x}_m и \mathbf{z}_n ($m, n = 0, \dots, N$, $\mathbf{z}_N = \mathbf{z}_0 = \mathbf{y}$, $\mathbf{x}_N = \mathbf{x}_0 = \mathbf{y}$). Значение функции $\rho(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ на полученных участках кривой получим с помощью любой интерполяции, например, полиномиальной степени $2i + 1$. Обозначим $P_n(\mathbf{z}, \mathbf{y})$, $\mathbf{z} \in \Gamma$ интерполяционный многочлен для $\rho(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ в форме полинома Лагранжа [12] по точкам $\mathbf{z}_n, \dots, \mathbf{z}_{n+2i+1}$, $0 \leq n \leq N - 2i - 1$. Подставляя теперь

вместо ρ соответствующие полиномы в (8), получим регулярную часть поверхностной функции Грина в виде

$$S^{(r)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_{z_0 z_{i+1}} G_0(\mathbf{x}, \mathbf{z}) P_0(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dl_z + \\ + \sum_{n=i+1}^{N-i-2} \int_{z_n z_{n+1}} G_0(\mathbf{x}, \mathbf{z}) P_{n-i}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dl_z + \\ + \int_{z_{N-i-1} z_N} G_0(\mathbf{x}, \mathbf{z}) P_{N-2i-1}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dl_z.$$

Поскольку полиномы Лагранжа $P_n(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ линейно зависят от значений интерполируемой функции в выбранных точках $\rho(\mathbf{z}_n, \mathbf{y}) \dots \rho(\mathbf{z}_{n+2i+1}, \mathbf{y})$, то выражение для регулярной части поверхностной функции Грина можно записать в следующей форме:

$$S^{(r)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{n=0}^{N-1} \rho_n \cdot \int_{\Delta l_n} G_0(\mathbf{x}, \mathbf{z}) W_n(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dl_z. \quad (10)$$

Здесь $\rho_n = \rho(\mathbf{z}_n, \mathbf{y})$, для суммарного коэффициента при ρ_n , являющегося полиномом $(2i+1)$ -го порядка, мы ввели обозначение $W_n(\mathbf{z}, \mathbf{y})$, а Δl_n — соответствующий участок кривой L . То есть фактически мы задаем функцию $\rho(\mathbf{z}, \mathbf{y})$, имеющую смысл поверхностной плотности зарядов, как интерполяцию по эффективным зарядам ρ_n , расположенным в точках \mathbf{z}_n .

Учитывая теперь условие (7) на регулярную и сингулярную части в граничных точках $\mathbf{x}_m \in \Gamma$ и используя представление (10) для регулярной части, получим систему линейных уравнений для дискретных зарядов ρ_n

$$\delta_\Gamma(\mathbf{x}_m - \mathbf{y}) - S^{(s)}(\mathbf{x}_m, \mathbf{y}) = \sum_{n=0}^{N-1} \rho_n \cdot \int_{\Delta l_n} G_0(\mathbf{x}_m, \mathbf{z}) W_n(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dl_z, \quad (11)$$

решая которую и подставляя найденные ρ_n в (10), найдем значения $S^{(r)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ для любой точки $\mathbf{x} \in D$. При вычислениях в качестве сингулярной части для «овала» и «квадрата» мы выбрали функцию (5).

Как нетрудно видеть, предложенный метод представляет собой модифицированный вариант метода конечных элементов [12].

Следует заметить, предложенный метод можно применить для вычисления сил Казимира, действующих между несколькими произвольными разделенными телами, на границе которых поле обращается в нуль. Для простоты будем рассматривать такую задачу для двух тел. Пусть D_1 и D_2 — области двумерного пространства, занимаемые телами 1 и 2 соответственно. Обозначим Γ_1 и Γ_2 границы этих областей. Сила, с которой тело 2 ввиду наличия квантованного скалярного поля действует на тело 1, равна потоку импульса квантовой системы через границу Σ , разделяющую тела 1 и 2

$$F_{12}^i = \int_{\Sigma} \langle 0 | T^{ij}(\boldsymbol{\xi}) n_j | 0 \rangle d\sigma, \quad (12)$$

где $d\sigma$ — элемент поверхности Σ , \mathbf{n} — нормаль к этой поверхности в точке $\boldsymbol{\xi}$. Подынтегральное выражение

в (12) можно выразить через функцию Грина и ее производные

$$\langle 0 | T^{ij}(\boldsymbol{\xi}) n_j | 0 \rangle = -\frac{1}{2\pi} \int_m^\infty \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 - m^2}} \times \\ \times [2\partial_{x_i}(\mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{y}}) - n^i(\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \nabla_{\mathbf{y}}) - \kappa^2 n^i] G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{y}=\boldsymbol{\xi}} d\kappa. \quad (13)$$

Здесь $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — функция Грина уравнения Гельмгольца, удовлетворяющая нулевым граничным условиям $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, для $\mathbf{x} \in \Gamma_1, \Gamma_2$.

По аналогии с тем, как мы поступали при вычислении давления, разобьем функцию Грина и ее производные на сингулярное и регулярное слагаемые в точке $\mathbf{y} = \boldsymbol{\xi} \in \Sigma$

$$G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = G_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) + \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} G_0(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \zeta(\mathbf{z}, \boldsymbol{\xi}) dl_z, \quad (14)$$

$$\partial_{y^k} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Big|_{\mathbf{y}=\boldsymbol{\xi}} = (\partial_{y^k} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Big|_{\mathbf{y}=\boldsymbol{\xi}})^{(s)} + \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} G_0(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \rho(\mathbf{z}, \boldsymbol{\xi}) dl_z. \quad (15)$$

В правой части равенств (14), (15) первые слагаемые представляют собой сингулярные части соответствующих функций, а вторые — регулярные во всех внутренних точках $\boldsymbol{\xi}$ области определения поля. В этих точках функции $\zeta(\mathbf{z}, \boldsymbol{\xi})$ и $\rho(\mathbf{z}, \boldsymbol{\xi})$ должны быть непрерывными и ограниченными, тогда несобственные интегралы в (14), (15) являются сходящимися.

В качестве точки нормировки выберем силу, с которой тело 2 действует на тело 1 при условии, что второе тело удалено на бесконечность. Естественно предположить, что в этом случае сила F_{12}^{ren} должна равняться нулю.

Заметим, что второе слагаемое в (14), а также производная по ∂_{x^i} от второго слагаемого в (15) в точке $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$ обращаются в нуль, если тела разделены пространственной бесконечностью. В самом деле, поскольку сила (12) не зависит от выбора разделяющей тела поверхности Σ , то в случае, когда расстояние между рассматриваемыми телами равно бесконечности, поверхность Σ можно выбрать так, что $|\boldsymbol{\xi} - \mathbf{z}| \rightarrow \infty$, $\boldsymbol{\xi} \in \Sigma$. Но в этом случае функции $G_0(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{z})$ и $\partial_{x^i} G_0(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \Big|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\xi}}$ обращаются в нуль.

Таким образом, если для получения F_{12}^{ren} из (12) вычесть силу между телами, разнесенными на бесконечное расстояние, то окажется, что перенормированная сила будет определяться теми же выражениями (12), (13), но в которые необходимо подставить не саму функцию Грина и ее производные, а только регулярные слагаемые. Математически такая процедура соответствует нормировке функции Грина краевой задачи в области D на свободную функцию Грина $G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Заметим, что при увеличении расстояния между телами, F_{12}^{ren} имеет правильный предел, т.е. обращается в нуль. Таким образом, для разделенных тел задача перенормировки силы Казимира не требует модификации границ, достаточно нормировки на свободную функцию Грина, а регулярные слагаемые в (14), (15) вычисляются с помощью метода эффективных поверхностных зарядов.

Вернемся теперь к задаче о давлении на границе гладкой области. Итак, вычисляя тем или иным способом разность регулярных частей поверхностных функций Грина для «овала» D_L^1 и бесконечного «овала» D_∞^1 и подставляя найденную функцию в (4), получим перенормированное давление Казимира. Заметим, что регуляризованное давление с ростом L стремится к постоянной величине. Так что в качестве точки нормировки можно принять давление для «овала» с $L = 5$. Результаты для давления Казимира в «овале» D_L^1 , перенормированного с помощью D_5^1 , в зависимости от различных m и L приведены в табл. 1, 2. Результаты, вычисленные с помощью первого борновского приближения при использовании альтернативного варианта сингулярной части поверхностной функции Грина для участков границ γ_1, γ_3 , приведены в табл. 1. Давление в табл. 2 получено с помощью метода эффективных поверхностных зарядов при использовании полиномиальной интерполяции третьей степени. (Для удобства чтения в табл. 1 и 2 приведены значения перенормированного давления, умноженные на общий фактор 10^5 .)

Поскольку задачу нахождения регулярной части поверхностной функции Грина $S^{(r)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ для «овала» оказывается возможным решить точно, то, сравнивая значения для давления, полученные с помощью точных функций $S^{(r)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$, с приведенными выше результатами, мы обнаруживаем, что метод эффективных поверхностных зарядов дает верный ответ с точностью до всех приведенных здесь знаков. При альтернативном выборе сингулярной части для участков границ с ненулевой кривизной борновский ряд дает 1–2 верных знака для малых и средних m уже в первом порядке. При вычислении давления на границе «овала» во втором порядке борновского приближения при использовании варианта (5) сингулярной части для верхней и нижней полуокружностей согласие с точным ответом получается даже хуже, чем при использовании первого порядка альтернативного борновского ряда. Например, для $m = 1.3$ и $L = 0$ получаем результат $29 \cdot 10^{-5}$, а для $m = 0.3$ и $L = 0.1$ получаем даже $24 \cdot 10^{-5}$. Это связано с тем, что «среднее» расстояние между границами обла-

сти для «овала» невелико и борновский ряд при таком выборе сингулярной части сходится довольно медленно даже при «благоприятных» для сходимости значениях параметров — больших m и малых L . Как мы увидим ниже, для «квадрата» ситуация несколько иная.

Теперь обратимся к перенормировке давления с помощью модифицированной области D_L^2 , ограниченной замкнутой кривой

$$\Gamma_L^2 = \bigcup_{i=1}^8 \gamma_i,$$

где $\gamma_i = \{(x, y): a_i \leq x - c_i \leq b_i, (x - c_i)^2 + y^2 = r^2\}$ для $i = 1, 5$, $\gamma_i = \{(x, y): a_i \leq x - c_i \leq b_i, x^2 + (y - c_i)^2 = r^2\}$ для $i = 3, 7$, $\gamma_i = \{(x, y): a_i \leq x \leq b_i, y = c_i - x\}$, $i = 2, 6$, $\gamma_i = \{(x, y): a_i \leq x \leq b_i, y = c_i + x\}$, $i = 4, 8$, $a_1 = a_2 = a_3 = a_8 = -b_4 = -b_5 = -b_6 = -b_7 = \frac{r}{\sqrt{2}}$, $b_2 = b_8 = -a_4 = -a_6 = L + \frac{r}{\sqrt{2}}$, $b_1 = b_3 = -a_5 = -a_7 = r$, $c_1 = c_3 = -c_5 = -c_7 = L$, $c_2 = c_4 = -c_6 = -c_8 = L + \sqrt{2}r$.

Будем интересоваться давлением в точке $\boldsymbol{\xi} = (L+r, 0)$ на границе этой области, которое и в данном случае также определяется формулой (4). Если за точку нормировки выбрать давление в точке $\boldsymbol{\xi}$ на границе «квадрата», при условии что длина стороны «квадрата» стремится к бесконечности, то после перенормировки мы получим конечное давление на границе «квадрата» D_L^2 , которое оказывается возможным отождествить с физическим, поскольку при $L \rightarrow \infty$ физическое давление в точке $\boldsymbol{\xi}$ на границе области D_∞^2 должно обращаться в нуль.

По той же причине, что и в случае с «овалом», для «квадрата» в качестве точки нормировки можно выбрать давление на границе области D_5^2 . Данные для давления Казимира на границе «квадрата» D_L^2 , перенормированного с помощью D_5^2 , полученные различными способами, приведены в табл. 3–5. (Для удобства чтения значения давления в табл. 3–5 умножены на общий фактор 10^4 .)

Заметим, что для квадрата построение точного ответа представляет собой технически сложную задачу. Однако даже не располагая точным ответом, можно

Таблица 1
Давление на границе «овала», вычисленное в первом порядке альтернативного борновского ряда

	$m = 0.0$	$m = 0.3$	$m = 0.6$	$m = 1.0$	$m = 1.3$	$m = 1.6$	$m = 2.0$	$m = 2.3$
$L = 0.0$	80	68	57	35	21	11	4.4	2.1
$L = 0.01$	77	66	55	34	19	10	4.2	1.9
$L = 0.03$	73	62	51	31	18	9.7	3.8	1.7
$L = 0.1$	60	51	41	24	14	7.1	2.6	1.2
$L = 1.0$	4.9	2.4	1.7	0.70	0.25	0.07	0.009	0.001

Таблица 2
Давление на границе «овала», вычисленное методом эффективных поверхностных зарядов

	$m = 0.0$	$m = 0.3$	$m = 0.6$	$m = 1.0$	$m = 1.3$	$m = 1.6$	$m = 2.0$	$m = 2.3$
$L = 0.0$	86.873	80.571	64.647	39.522	24.165	13.595	5.7132	2.8169
$L = 0.01$	83.972	77.839	62.363	38.002	23.162	12.984	5.4273	2.6647
$L = 0.03$	78.454	72.649	58.032	35.133	21.277	11.841	4.8968	2.3840
$L = 0.1$	61.825	57.044	45.090	26.675	15.795	8.5665	3.4114	1.6118
$L = 1.0$	2.9304	2.5742	1.7653	0.7648	0.3343	0.1286	0.0308	0.0098

Таблица 3

Давление на границе «квадрата», вычисленное во втором порядке борновского ряда

	$m = 0.0$	$m = 0.3$	$m = 0.6$	$m = 1.0$	$m = 1.3$	$m = 1.6$	$m = 2.0$	$m = 2.3$
$L = 0.0$	42	41	36	25	18	12	6.4	3.9
$L = 0.01$	40	39	34	24	17	11	5.9	3.6
$L = 0.03$	37	36	31	21	15	9.3	4.9	3.0
$L = 0.1$	28	27	23	15	9.3	5.6	2.8	1.6
$L = 1.0$	3.8	2.7	1.2	0.28	0.081	0.022	0.0039	0.0011

Таблица 4

Давление на границе «квадрата», вычисленное в первом порядке альтернативного борновского ряда

	$m = 0.0$	$m = 0.3$	$m = 0.6$	$m = 1.0$	$m = 1.3$	$m = 1.6$	$m = 2.0$	$m = 2.3$
$L = 0.0$	38	34	27	17	11	7.3	3.9	2.4
$L = 0.01$	37	32	26	16	11	6.8	3.6	2.2
$L = 0.03$	34	29	23	15	9.4	5.8	3.0	1.8
$L = 0.1$	26	22	17	9.8	6.0	3.5	1.7	0.94
$L = 1.0$	2.1	1.3	0.69	0.16	0.044	0.010	0.0010	0.0001

Таблица 5

Давление на границе «квадрата», вычисленное методом эффективных поверхностных зарядов

	$m = 0.0$	$m = 0.3$	$m = 0.6$	$m = 1.0$	$m = 1.3$	$m = 1.6$	$m = 2.0$	$m = 2.3$
$L = 0.0$	39.649	36.604	29.444	18.923	12.586	8.0348	4.2562	2.6063
$L = 0.01$	37.745	34.785	27.852	17.741	11.707	7.4113	3.8809	2.3563
$L = 0.03$	34.265	31.465	24.959	15.616	10.142	6.3126	3.2298	1.9272
$L = 0.1$	24.853	22.530	17.284	10.142	6.2245	3.6476	1.7187	0.9643
$L = 1.0$	1.6381	1.2213	0.5815	0.1502	0.0514	0.0205	0.0092	0.0062

предположить, что соотношение погрешностей при применении различных методов в «квадрате» такое же, как в «овале», поскольку характер погрешности для «овала» и «квадрата» должен быть один и тот же.

Итак, мы произвели перенормировку давления в областях D_L^1 и D_L^2 с помощью модифицированных областей D_∞^1 и D_∞^2 соответственно, применяя два разных метода вычисления регулярной части поверхностной функции Грина. Результаты, наилучшим образом согласующиеся с точным ответом, получены с помощью метода эффективных поверхностных зарядов и приведены в табл. 2 и 5 для областей D_L^1 и D_L^2 соответственно. Значения, полученные во втором борновском приближении и в первом альтернативном приближении, менее точны, однако данный метод уже в этом случае дает верный порядок величины давления, а для некоторой области параметров m и L получаются несколько верных знаков. Для более точных результатов необходимо применять старшие порядки борновского приближения, но при этом также возрастает и вычислительная сложность задачи. Таким образом, метод эффективных поверхностных зарядов оказывается более результативным, хотя задача поиска этих зарядов решается только численно.

Разумеется, значения давления для общего предельного случая $L = 0$ («круга»), перенормированного с помощью различных модифицированных областей, не совпадают, поскольку, как уже было сказано, в случае перенормировки с помощью области, имеющей «конечный» объем, мы получим физическое давление с точностью до константы, зависящей от параметров, харак-

теризующих размеры области. Следует также отметить, что полученные нами результаты в табл. 2, 5 находятся в полном соответствии с естественным физическим требованием экспоненциального убывания давления с ростом m при фиксированном значении L . Впрочем, этот результат является заранее очевидным, если воспользоваться ответом для регулярной части поверхностной функции Грина в виде борновского ряда, заметив при этом, что производная по нормали в граничной точке ξ от разности регулярных частей для областей D_L^1 и D_∞^1 или областей D_L^2 и D_∞^2 экспоненциально мала с ростом κ .

Заключение

В настоящей работе был предложен способ перенормировки давления Казимира на границе области D с помощью некоторой модифицированной области D' . Для вычисления регуляризованного давления в точке ξ на границе Γ области D необходимо вычислить регулярные части производных $\partial_{y_j} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})|_{y=\xi}$ от функции Грина соответствующей краевой задачи. В качестве точки нормировки предлагается выбрать давление на границе Γ' некоторой модифицированной области в точке с кривизной, совпадающей с кривизной в точке $\xi \in \Gamma$. Если модифицированную область расширять по всем пространственным направлениям, не меняя при этом кривизны в точке $\xi \in \Gamma'$, то перенормированное давление можно отождествить с физическим давлением в точке $\xi \in \Gamma$, в противном случае перенормированное давление будет совпадать с физическим с точностью до некоторой константы.

Вычисление функции Грина для произвольной области представляет собой отдельную, достаточно сложную задачу. В настоящей работе был предложен приближенный метод вычисления функции Грина и ее производных с помощью эффективных поверхностных зарядов. Предложенный метод был проверен на задаче для давления Казимира на границе «овала» и «квадрата», перенормированных с помощью бесконечных $L \rightarrow \infty$ «овала» и «квадрата» соответственно. Этот метод дает результаты для функции Грина и ее производных, совпадающие с верным ответом с точностью, превышающей необходимую для последующих вычислений перенормированного давления. Следует заметить, что этот метод можно применить и для вычисления силы Казимира между двумя разделенными телами. Как уже упоминалось, в этом случае нормировку функции Грина рассматриваемой задачи следует производить на свободную функцию Грина, не прибегая к использованию вспомогательных модифицированных областей, и вопрос о неоднозначности процедуры перенормировки в этом случае не возникает.

Работа выполнена при финансовой поддержке Про-

граммы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-195.2008.2).

Список литературы

1. *Krech M., Dietrich S.* // Phys. Rev. Lett. 1991. **66**. P. 345.
2. *Milton K.A.* The Casimir Effect: Physical Manifestation of Zero-Point Energy. World Scientific, 2001.
3. *Hosaka A., Toki H.* // Phys. Reports. 1996. **277**. P. 65.
4. *Vepstas L., Jackson A.D.* // Phys. Reports. 1990. **187**. P. 109.
5. *Bordag M., Mohideen U., Mostepanenko V.M.* // Phys. Reports. 2001. **353**. P. 1.
6. *Elizalde E.* // Phys. Lett. B 2001. **516**. P. 143.
7. *Boyer T.H.* // Phys. Rev. 1968. **174**. P. 1764.
8. *Воронина Ю.С., Силаев П.К.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2009. № 3. С. 14.
9. *Decca R.S., Lopez D., Fischbach E. et al.* // Ann. Phys. 2005. **318**. P. 37.
10. *Воронина Ю.С., Силаев П.К.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2009. № 1. С. 37.
11. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М., 1974.
12. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М., 2003.

Casimir pressure renormalization with effective surface charge method

Yu. S. Voronina^a, P. K. Silaev^b

Department of Quantum Theory and High Energy Physics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.

E-mail: ^a voronina-yulya@yandex.ru, ^b silaev@bog.msu.ru.

The problem of regularization and renormalization of Casimir pressure in finite area with smooth boundary is considered for the real scalar field in two-dimensional case. A procedure of regularization of boundary pressure is proposed using a certain modified area. A method for approximate calculation of Green function and its derivatives with the help of effective surface charges are suggested. For the problem possessing exact solution it is shown that the method provides sufficiently high accuracy and numerical efficiency.

Keywords: Casimir effect, vacuum effects in quantum field theory, regularization and renormalization in quantum field theory.

PACS: 03.70.+k.

Received 28 December 2009.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 5(2010).

Сведения об авторах

1. Воронина Юлия Сергеевна — аспирантка; тел.: (495) 939-26-96, e-mail: voronina-yulya@yandex.ru.

2. Силаев Петр Константинович — докт. физ.-мат. наук, доцент, профессор; тел.: (495) 939-26-96, e-mail: silaev@bog.msu.ru.