Томографическое представление кинетических уравнений в классической статистической механике

В. И. Манько[1,a], Б. И. Садовников[2,b], В. Н. Чернега[2]

[1] *Физический институт имени П. Н. Лебедева Российской академии наук. Россия, 119991, Москва, Ленинский просп., д. 53.*

[2] *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра квантовой статистики и теории поля. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.*

E-mail: [a] manko@sci.lebedev.ru, [b] b.i.sadovnikov@gmail.com

Статья поступила 23.02.2010, подписана в печать 28.03.2010

Построено томографическое представление кинетических уравнений с помощью преобразования Радона. Рассмотрено уравнение Лиувилля для одной и многих частиц. Получено редуцированное уравнение Лиувилля в томографическом представлении и изучена цепочка Боголюбова в этом представлении. Рассмотрен пример релятивистского кинетического уравнения в томографическом представлении.

Ключевые слова: симплектическая томография, распределение вероятности, кинетическое уравнение, фазовое пространство, редукция уравнения Лиувилля.

УДК: 530.1. PACS: 03.65.-w.

Введение

В классической статистической механике состояние частиц с одной степенью свободы с флуктуирующими координатой q и импульсом p описывается неотрицательной функцией распределения вероятностей $f(q,p,t)$, зависящей от времени. В случае многих частиц состояние системы описывается совместной функцией распределения вероятностей $f(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)$, где векторы $\boldsymbol{q}$ и $\boldsymbol{p}$ имеют N компонент. Процесс эволюции системы описывается кинетическими уравнениями, простейшим из которых является уравнение Луивилля без столкновительного члена (см., напр., [1, 2]). Учет столкновений приводит к уравнению Больцмана, которое может быть получено методом построения зацепленной системы уравнений, полученных Н. Н. Боголюбовым, называемых цепочкой Боголюбова. В квантовой статистической механике состояние системы описывается оператором плотности $\hat{\rho}$. Для частицы с одной степенью свободы оператор плотности может быть представлен с помощью интегрального преобразования Фурье функцией Вигнера $W(q,p,t)$ [3], являющейся аналогом классической функции распределения $f(q,p,t)$. Уравнение эволюции квантовой системы (уравнение Мойала [4]) до некоторой степени похоже на уравнение Лиувилля и переходит в него в пределе постоянной Планка, стремящейся к нулю. Однако функция Вигнера может принимать отрицательные значения и поэтому не является распределением вероятностей, так как вероятность по определению является неотрицательной величиной. В работе [5] в квантовой механике было введено новое представление, в котором с помощью преобразования Радона [6] функции Вигнера квантовое состояние описывается функцией распределения вероятностей, называемой томограммой состояния или томографической функцией распределения. В работе [7] было показано, что аналогичная томограмма может быть введена и для классической частицы с помощью преобразования Радона функции распределения $f(q,p,t)$ на фазовой плоскости. Преобразование Радона обратимо. Таким образом, информация о состоянии классической частицы на языке функции $f(q,p,t)$ эквивалентна информации, заключенной в томограмме. Это же утверждение справедливо и для квантовой частицы, для которой информация о состоянии, заключенная в функции Вигнера, эквивалентна информации, заключенной в томограмме состояния.

Одной из целей работы является рассмотрение кинетических уравнений классической статистической механики (уравнение Лиувилля, цепочка Боголюбова) в томографическом представлении и обсуждение возможностей томографического подхода, с помощью преобразования Радона цепочки Боголюбова в квантовой области.

Мы рассмотрим классические кинетические уравнения (Лиувилля) для одной и многих частиц в томографическом представлении и получим редуцированные кинетические уравнения, для подсистемы частиц, что позволяет изучить цепочку Боголюбова, используя преобразование Радона. Также изучим простейший пример релятивистского кинетического уравнения в томографическом представлении.

1. Преобразование Радона функции распределения на фазовом пространстве

Преобразование Радона [6] — это интегральное преобразование функции многих переменных, родственное преобразованию Фурье. Преобразование Радона активно используется в квантовой механике; так, в [8, 9] была найдена связь функции Вигнера [3] с измеримым маргинальным распределением вероятностей для гомодинной наблюдаемой, являющейся повернутой на заданный угол координатой в фазовом пространстве системы. Функция Вигнера одномерной системы была выражена через эту измеримую нормированную положительную функцию распределения с помощью преобразования Радона [8, 9] (с интегрированием по углу поворота в фазовом пространстве), используемого в обычной медицинской томографии. В этой связи схема измерений квантового состояния для непрерывной наблюдаемой типа координаты или импульса была названа схемой оптической томографии, и эта схема была применена в экспериментах по реконструкции квантового состояния моды электромагнитного излучения [10] и в молекулярной спектроскопии [11]. Эксперименты по воспроизводимому измерению сжатого вакуумного состояния света, генерируемого оптическим параметрическим осциллятором, были рассмотрены в [12]. Реконструкция однофотонного фоковского состояния электромагнитного поля была реализована экспериментально в работе [13]. Резонансная флуоресценция была предложена для реконструкции квантово-механического состояния иона в работе [14]. Томограмма классического состояния частицы также связана с функцией распределения $f(q,p,t)$ на фазовой плоскости преобразованием Радона.

Рассмотрим в фиксированный момент времени $t=0$ состояние нерелятивистской классической частицы единичной массы $m=1$, которое задано функцией распределения вероятностей в фазовом пространстве $f(q,p)$. Функция распределения вероятностей неотрицательна и нормирована:

$$\int f(q,p)\,dq\,dp = 1. \tag{1}$$

Если мы применим к функции $f(q,p)$ интегральное преобразование Радона, то получим функцию трех действительных переменных $w(X,\mu,\nu)$, которая называется томограммой. Томограмма является неотрицательной функцией и является функцией распределения вероятностей случайной величины — координаты частицы X

$$w(X,\mu,\nu) = \int f(q,p)\delta(X-\mu q-\nu p)\,dq\,dp. \tag{2}$$

Здесь $\delta(X-\mu q-\nu p)$ — дельта-функция Дирака, а действительные параметры μ,ν характеризуют систему отсчета в фазовом пространстве. Томограмма, называемая симплектической, обладает свойствами стандартной функции распределения вероятностей и является неотрицательной и нормированной:

$$\int w(X,\mu,\nu)\,dx = 1 \tag{3}$$

для любых значений параметров μ и ν. Преобразование Радона (2) обратимо. Применив обратное преобразования Радона, получим

$$f(q,p) = \int w(X,\mu,\nu)e^{i(X-\mu q-\nu p)}\frac{dX\,d\mu\,d\nu}{(2\pi)^2}. \tag{4}$$

Если переменные $\mu=1$, $\nu=0$, то данная функция задает маргинальное распределение вероятности координаты, так как

$$w(X,1,0) = \int \delta(X-q)f(q,p)\,dq\,dp = \int f(X,p)\,dp = P(X), \tag{5}$$

где $P(X)$ распределение вероятности координаты. Если $\mu=0$, $\nu=1$, то получаем маргинальное распределение вероятности для импульса, так как

$$w(X,0,1) = \int \delta(X-p)f(q,p)\,dq\,dp = \int f(X,p)\,dp = \wp(X), \tag{6}$$

где $\wp(X)$ распределение вероятности для импульса.

Физический смысл томограммы можно охарактеризовать, рассмотрев две системы координат в фазовом пространстве (на плоскости координата–импульс): исходную и повернутую по отношению к ней на угол Θ. Томограмма (без учета эффекта изменения масштаба по осям координата–импульс) является функцией распределения только по координате частицы, рассматриваемой в повернутой системе отсчета. Интегральные преобразования (2), (4) удовлетворяют следующим соотношениям соответствия:

$$\begin{aligned}
&pf(q,p) \longleftrightarrow -\Big(\frac{\partial}{\partial X}\Big)^{-1}\frac{\partial}{\partial\nu}w(X,\mu,\nu);\\
&\frac{\partial}{\partial q}f(q,p) \longleftrightarrow \mu\frac{\partial}{\partial X}w(X,\mu,\nu);\\
&qf(q,p) \longleftrightarrow -\Big(\frac{\partial}{\partial X}\Big)^{-1}\frac{\partial}{\partial\mu}w(X,\mu,\nu);\\
&\frac{\partial}{\partial p}f(q,p) \longleftrightarrow \nu\frac{\partial}{\partial X}w(X,\mu,\nu).
\end{aligned} \tag{7}$$

По определению

$$\Big(\frac{\partial}{\partial X}\Big)^{-1}\frac{\partial}{\partial X} = 1. \tag{8}$$

При действии оператора $\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^{-1}$ на функцию $\varphi(X)$ получаем функцию $\Phi(X)$, которая удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\Phi(X)}{dX} = \varphi(X). \tag{9}$$

Применив преобразование Фурье к функциям $\varphi(X)$ и $\Phi(X)$:

$$\varphi(X) = \int \tilde\varphi(k)e^{ikX}dk, \tag{10}$$

$$\Phi(X) = \int \tilde\phi(k)e^{ikX}dk, \tag{11}$$

определим действие оператора $\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^{-1}$ на функцию $\varphi(X)$ согласно соотношению

$$(\frac{\partial}{\partial X})^{-1}\varphi(X) = \int \frac{1}{ik}\tilde\phi(k)e^{ikX}\,dk, \tag{12}$$

что фиксирует константу при выборе первообразной $\Phi(X)$. В формулах (7), например, первое соотношение означает, что

$$pf(q,p) = -\int\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial X}\Big)^{-1}\frac{\partial}{\partial\nu}w(X,\mu,\nu)\Big]e^{\iota(X-\mu q-\nu p)}\frac{dX\,d\mu\,d\nu}{(2\pi)^2}. \tag{13}$$

Симплектическая томограмма обладает свойством однородности

$$w(\lambda X,\lambda\mu,\lambda\nu) = \frac{1}{|\lambda|}w(X,\mu,\nu). \tag{14}$$

Это свойство следует из свойства однородности дельта-функции Дирака

$$\delta(\lambda y) = \frac{1}{|\lambda|}\delta(y).$$

Теперь рассмотрим состояние нескольких нерелятивистских классических частиц единичной массы ($m=1$). Томограмма определяется функцией распределения вероятностей в фазовом пространстве системы $f(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$, где $\boldsymbol{q}=(q_1,q_2,\ldots,q_N)$, $\boldsymbol{p}=(p_1,p_2,\ldots,p_N)$. Для этой функции распределения существует многомерное преобразование Радона, применив которое, получим симплектическую томограмму

$$w(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu})=\int f(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})\prod_{k=1}^{N}\delta(X_k-\mu_k q_k-\nu_k p_k)\,d\boldsymbol{q}\,d\boldsymbol{p}. \quad (15)$$

Обратное многомерное преобразование Радона имеет вид

$$f(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})=\frac{1}{(4\pi^2)^N}\int w(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu})\times \times\left(\prod_{k=1}^{N}e^{i(X_k-\mu_k q_k-\nu_k p_k)}\right)d\boldsymbol{X}\,d\boldsymbol{\mu}\,d\boldsymbol{\nu}. \quad (16)$$

Симплектическая томограмма (15) неотрицательна и нормирована, т. е.

$$w(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu})\geqslant 0, \quad (17)$$

$$\int w(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu})\,d\boldsymbol{X}=1. \quad (18)$$

Томограмма является совместной функцией распределения N случайных величин (координат) X_k, измеряемых в специальной системе отсчета в фазовом пространстве системы, каждая частица которой рассматривается в своей подсистеме отсчета, которая подвергнута операции изменения масштаба $q_k\to s_k q_k$, $p_k\to s_k^{-1}p_k$ и повернута на угол θ_k. Важным свойством, следующим из физического смысла томограммы $w(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu})$ (приведенного выше), является свойство редукции

$$\int w(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu})\,dX_N=\tilde{w}(\boldsymbol{X}',\boldsymbol{\mu}',\boldsymbol{\nu}'), \quad (19)$$

где $\boldsymbol{X}'=(X_1,X_2,\ldots,X_{N-1})$, $\boldsymbol{\mu}'=(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_{N-1})$ и $\boldsymbol{\nu}'=(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_{N-1})$. Свойство редукции томограммы связано со свойством редукции функции распределения вероятностей

$$\int f(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})dq_N\,dp_N=\tilde{f}(\boldsymbol{q}',\boldsymbol{p}'), \quad (20)$$

где $\boldsymbol{q}'=(q,\ldots,q_{N-1})$, $\boldsymbol{p}'=(p,\ldots,p_{N-1})$. Функция распределения вероятностей $\tilde{f}(\boldsymbol{q}',\boldsymbol{p}')$ является функцией распределения вероятностей подсистемы, состоящей из $N-1$ частиц. Симплектическая томограмма $\tilde{w}(\boldsymbol{X}',\boldsymbol{\mu}',\boldsymbol{\nu}')$ получается из функции распределения вероятностей $\tilde{f}(\boldsymbol{q}',\boldsymbol{p}')$ при помощи преобразования Радона

$$\int f(\boldsymbol{q}',\boldsymbol{p}')\prod_{k=1}^{N-1}\delta(X_k-\mu_k q_k-\nu_k p_k)\,d\boldsymbol{q}\,d\boldsymbol{p}=\tilde{w}(\boldsymbol{X}',\boldsymbol{\mu}',\boldsymbol{\nu}'). \quad (21)$$

Симплектическая томограмма состояния многомодовой системы обладает свойством однородности

$$w(\lambda_1X_1,\lambda_2X_2,\ldots,\lambda_NX_N,\lambda_1\mu_1,\lambda_2\mu_2,\ldots,\ldots,\lambda_N\mu_N,\lambda_1\nu_1,\lambda_2\nu_2,\ldots,\lambda_N\nu_N)=\left(\prod_{k=1}^{N}\frac{1}{|\lambda_k|}\right)w(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu}) \quad (22)$$

и должна удовлетворять следующему условию:

$$\int w(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu})\left(\prod_{k=1}^{N}e^{i(X_k-\mu_k q_k-\nu_k p_k)}\right)d\boldsymbol{X}\,d\boldsymbol{\mu}\,d\boldsymbol{\nu}\geqslant 0 \quad (23)$$

ввиду того, что этот интеграл определяет функцию распределения вероятностей системы в фазовом пространстве.

2. Кинетическое уравнение Лиувилля в томографическом представлении и его редукция

2.1. Нерелятивистский случай свободной частицы

В настоящем разделе рассмотрим уравнение Лиувилля, которое описывает эволюцию во времени функции распределения в фазовом пространстве в томографическом представлении. Рассмотрим кинетическое уравнение Лиувилля для нерелятивистской частицы, которое имеет вид

$$\frac{df(q,p,t)}{dt}=\frac{\partial f(q,p,t)}{\partial q}\dot{q}+\frac{\partial f(q,p,t)}{\partial p}\dot{p}+\frac{\partial f(q,p,t)}{\partial t}=0. \quad (24)$$

Для свободной частицы (при отсутствии силы)

$$\dot{p}=0. \quad (25)$$

Если частица имеет единичную массу $m=1$

$$\dot{q}=p, \quad (26)$$

то кинетическое уравнение Лиувилля для свободной частицы имеет вид

$$p\frac{\partial f(q,p,t)}{\partial q}+\frac{\partial f(q,p,t)}{\partial t}=0. \quad (27)$$

Используя соотношение (7), получаем уравнение эволюции для свободной частицы

$$\frac{\partial w(X,\mu,\nu)}{\partial t}-\mu\frac{\partial w(X,\mu,\nu)}{\partial \nu}=0. \quad (28)$$

2.2. Обобщение кинетического уравнения Лиувилля в томографическом представлении

Уравнение Лиувилля является простейшим кинетическим уравнением для функции распределения вероятностей $f(q,p,t)$ в фазовом пространстве состояния частицы в классической статистической механике. Оно имеет вид

$$\frac{\partial f(q,p,t)}{\partial t}+p\frac{\partial f(q,p,t)}{\partial q}-\frac{\partial U(q)}{\partial q}\frac{\partial f(q,p,t)}{\partial p}=0, \quad (29)$$

где $U(q)$ — потенциальная энергия. В этом случае уравнение Ньютона записывается следующим образом:

$$\dot{p}=-\frac{\partial U(q)}{\partial q}. \quad (30)$$

Гамильтониан системы со многими степенями свободы имеет вид

$$H(q_1,q_2,\ldots,q_N,p_1,p_2,\ldots,p_N)=\sum_{j=1}^{N}\frac{p_j^2}{2}+U(q_1,q_2,\ldots,q_N). \quad (31)$$

Уравнение Ньютона, соответствующее гамильтониану (31), записывается следующим образом:

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial U(q_1,\dots,q_N)}{\partial q_j}. \quad (32)$$

Кинетическое уравнение Лиувилля имеет вид

$$\frac{\partial f(q_1,q_2,\dots,q_N,p_1,p_2,\dots,p_N,t)}{\partial t} + \sum_{j=1}^{N} p_j \frac{\partial f(q_1,q_2,\dots,q_N,p_1,p_2,\dots,p_N,t)}{\partial q_j} - \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f(q_1,q_2,\dots,q_N,p_1,p_2,\dots,p_N,t)}{\partial p_j} \times \frac{\partial U(q_1,q_2,\dots,q_N,p_1,p_2,\dots,p_N)}{\partial q_j} = 0. \quad (33)$$

Кинетическое уравнение Лиувилля может быть записано в томографическом представлении. Это означает, что мы заменим плотности вероятностей

$$f(q_1,q_2,\dots,q_N,p_1,p_2,\dots,p_N,t)$$

их преобразованиями Радона и напишем уравнение для томографических плотностей вероятности (томограмм). Для систем с одной степенью свободы мы воспользуемся соотношениями отображения (7) и получим кинетическое уравнение Лиувилля в томографическом представлении

$$\frac{\partial w(X,\mu,\nu,t)}{\partial t} - \mu \frac{\partial w(X,\mu,\nu,t)}{\partial \nu} - \frac{\partial U}{\partial q}\left(q \to -\Big(\frac{\partial}{\partial X}\Big)^{-1}\frac{\partial}{\partial \mu}\right)\nu \frac{\partial w(X,\mu,\nu,t)}{\partial X} = 0. \quad (34)$$

Для систем с N степенями свободы соответствующие правила имеют вид

$$\begin{aligned}
&f(q_1,\dots,q_N,p_1,\dots,p_N,t) \longleftrightarrow \\
&\longleftrightarrow w(X_1,\dots,X_N,\mu_1,\dots,\mu_N,\nu_1,\dots,\nu_N,t);\\
&p_j f(q_1,\dots,q_N,p_1,\dots,p_N,t) \longleftrightarrow \\
&\longleftrightarrow -\Big(\frac{\partial}{\partial X_j}\Big)^{-1}\frac{\partial}{\partial \nu_j} w(X_1,\dots,X_N, \mu_1,\dots,\mu_N,\nu_1,\dots,\nu_N,t);\\
&\frac{\partial}{\partial q_j} f(q_1,\dots,q_N,p_1,\dots,p_N,t) \longleftrightarrow \\
&\longleftrightarrow \mu_j \frac{\partial}{\partial X_j} w(X_1,\dots,X_N,\mu_1,\dots,\mu_N,\nu_1,\dots,\nu_N,t); \quad (35)\\
&q_j f(q_1,\dots,q_N,p_1,\dots,p_N,t) \longleftrightarrow \\
&\longleftrightarrow -\Big(\frac{\partial}{\partial X_j}\Big)^{-1}\frac{\partial}{\partial \mu_j} w(X_1,\dots,X_N, \mu_1,\dots,\mu_N,\nu_1,\dots,\nu_N,t);\\
&\frac{\partial}{\partial p_j} f(q_1,\dots,q_N,p_1,\dots,p_N,t) \longleftrightarrow \\
&\longleftrightarrow \nu_j \frac{\partial}{\partial X_j} w(X_1,\dots,X_N,\mu_1,\dots,\mu_N,\nu_1,\dots,\nu_N,t).
\end{aligned}$$

Применив преобразование Радона к кинетическому уравнению Лиувилля (33), получаем

$$\frac{\partial w(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu},t)}{\partial t} - \sum_{j=1}^{N} \mu_j \frac{\partial w(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu},t)}{\partial \nu_j} - \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial q_j}\left(q_1 \to -\Big(\frac{\partial}{\partial X_1}\Big)^{-1}\frac{\partial}{\partial \mu_1}, q_2 \to -\Big(\frac{\partial}{\partial X_2}\Big)^{-1}\frac{\partial}{\partial \mu_2},\dots, \dots, q_N \to -\Big(\frac{\partial}{\partial X_N}\Big)^{-1}\frac{\partial}{\partial \mu_N}\right)\nu_j \frac{\partial w(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu},t)}{\partial X_j} = 0. \quad (36)$$

Полученное уравнение описывает эволюцию томограммы и соответствует стандартному уравнению Лиувилля для функции распределения плотности вероятности в фазовом пространстве.

Обсудим теперь редуцированное уравнение Лиувилля в томографическом представлении. Цепочка уравнений Боголюбова для функции распределения вероятностей одной частицы может быть получена с использованием уравнения Лиувилля на функцию распределения для многих частиц. Этот прием заключается в следующем. Уравнение Лиувилля для многих частиц интегрируется по $2(N-1)$ переменным, а именно по $q_2,q_3,\dots,q_N,p_2,p_3,\dots,p_N$. Полученное уравнение для одной степени свободы учитывает вклад взаимодействия одной частицы с остальными. Приведем этот вывод на примере системы двух частиц, уравнение Лиувилля для которых имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} f(q_1,q_2,p_1,p_2,t) + p_1 \frac{\partial f(q_1,q_2,p_1,p_2,t)}{\partial q_1} + p_2 \frac{\partial f(q_1,q_2,p_1,p_2,t)}{\partial q_2} - \frac{\partial U(q_1,q_2)}{\partial q_1}\frac{\partial f(q_1,q_2,p_1,p_2,t)}{\partial p_1} - \frac{\partial U(q_1,q_2)}{\partial q_2}\frac{\partial f(q_1,q_2,p_1,p_2,t)}{\partial p_2} = 0. \quad (37)$$

Интегрируем уравнение (37) по переменным связанным со второй частицей q_2, p_2. Предположим, что потенциальная энергия зависит от расстояния между частицами, тогда

$$U(q_1,q_2) = U(|q_1-q_2|) = U(|X_{1,2}|), \quad X_{1,2} = q_1 - q_2, \quad (38)$$

получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{f}(q_1,p_1,t) + p_1 \frac{\partial}{\partial q_1}\tilde{f}(q_1,p_1,t) + \int p_2 \frac{\partial}{\partial q_2} f(q_1,q_2,p_1,p_2,t)\,dq_2\,dp_2 - \int U'(|X_{1,2}|)\Big(\frac{\partial}{\partial q_1}|q_1-q_2|\Big)\frac{\partial}{\partial p_1} f(q_1,q_2,p_1,p_2,t)\,dq_2\,dp_2 + \int U'(|X_{1,2}|)\Big(\frac{\partial}{\partial q_1}|q_1-q_2|\Big)\frac{\partial}{\partial p_2} f(q_1,q_2,p_1,p_2,t)\,dq_2\,dp_2 = 0, \quad (39)$$

где мы использовали обозначения

$$\tilde{f}(q_1,p_1,t) = \int f(q_1,q_2,p_1,p_2,t)\,dq_2\,dp_2. \quad (40)$$

Уравнение (39) может быть преобразовано аналогичным образом, как и уравнение Лиувилля (33). Цепочка Боголюбова в случае многих частиц может быть получена при помощи аналогичной процедуры (36). В этом случае интегрирование производится по переменным $X_2, X_3, \ldots, X_N$. Рассмотрим следующую процедуру получения редуцированного уравнения на примере двух частиц. Уравнение для $f(q_1, p_1, q_2, p_2, t)$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + p_1 \frac{\partial f}{\partial q_1} + p_2 \frac{\partial f}{\partial q_2} + F_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + F_2 \frac{\partial f}{\partial p_2} = 0, \qquad (41)$$

где $F_j \equiv F_j(q_1, p_1, q_2, p_2)$, $j = 1, 2$, с учетом соотношений

$$\int f(q,p,A) F(q,p,B)\, dq\, dp =$$
$$= \int w_f(X,\mu,\nu,A) w_F(Y,\mu,\nu,B) e^{i(X-Y)}\, dX\, dY\, d\mu\, d\nu; \quad (42)$$

$$w_f(X,\mu,\nu,A) = \int f(q,p,A)\delta(X - \mu q - \nu p) \frac{dq\, dp}{2\pi}; \qquad (43)$$

$$w_F(Y,\mu,\nu,B) = \int F(q,p,B)\delta(Y - \mu q - \nu p) \frac{dq\, dp}{2\pi} \qquad (44)$$

можно представить в виде

$$\frac{\partial w_1(X_1,\mu_1,\nu_1,t)}{\partial t} - \mu_1 \frac{\partial w_1(X_1,\mu_1,\nu_1,t)}{\partial \nu_1} +$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\int \Omega_1\left(q_1 \to -\mu_1\left(\frac{\partial}{\partial X_1}\right)^{-1}, p_1 \to -\nu_1\left(\frac{\partial}{\partial X_1}\right)^{-1},\right.$$
$$\left. X_2, \mu_2, \nu_2\right) \nu_1 \frac{\partial}{\partial X_1} w(X_1,\mu_1,\nu_1,Y_2,\mu_2,\nu_2,t) \times$$
$$\times e^{i(X_2 - Y_2)}\, dX_2\, dY_2\, d\mu_2\, d\nu_2 +$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\int \Omega_2\left(q_1 \to -\mu_1\left(\frac{\partial}{\partial X_1}\right)^{-1}, p_1 \to -\nu_1\left(\frac{\partial}{\partial X_1}\right)^{-1},\right.$$
$$\left. X_2, \mu_2, \nu_2\right) \nu_2 \frac{\partial}{\partial Y_2} w(X_1,\mu_1,\nu_1,Y_2,\mu_2,\nu_2,t) \times$$
$$\times e^{i(X_2 - Y_2)}\, dX_2\, dY_2\, d\mu_2\, d\nu_2 = 0. \quad (45)$$

Здесь

$$w(X_1,\mu_1,\nu_1,Y_2,\mu_2,\nu_2,t) = \int f(q_1,p_1,q_2,p_2,t) \times \qquad (46)$$
$$\times \delta(X_1 - \mu_1 q_1 - \nu_1 p_1)\delta(Y_2 - \mu_2 q_2 - \nu_2 p_2)\, dq_1\, dq_2\, dp_1\, dp_2,$$

$$w_1(X_1,\mu_1,\nu_1,t) = \int w(X_1,\mu_1,\nu_1,Y_2,\mu_2,\nu_2,t)\, dY_2, \qquad (47)$$

а также

$$\Omega_1(q_1,p_1,X_2,\mu_2,\nu_2) =$$
$$= \int F_1(q_1,p_1,q_2,p_2)\delta(X_2 - \mu_2 q_2 - \nu_2 p_2)\frac{dq_2\, dp_2}{2\pi}, \qquad (48)$$

$$\Omega_2(q_1,p_1,X_2,\mu_2,\nu_2) =$$
$$= \int F_1(q_1,p_1,q_2,p_2)\delta(X_2 - \mu_2 q_2 - \nu_2 p_2)\frac{dq_2\, dp_2}{2\pi}. \qquad (49)$$

Уравнение (45) обощается на случай редукции уравнения Лиувилля для многих частиц.

2.3. Релятивистский случай

Рассмотрим релятивистскую частицу и применим к описанию ее движения томографический подход по аналогии со случаем нерелятивистской частицы. Изменение описания в релятивистском случае связано с формулой (24), связывающей момент и скорость частицы. В релятивистской классической механике связь между скоростью и импульсом задается следующей формулой

$$\dot{q} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}. \qquad (50)$$

Мы положили для простоты скорость света $c = 1$ и массу частицы $m=1$. Релятивистское кинетическое уравнение для распределения плотности вероятности $f(q,p,t)$ имеет вид (24). В случае свободной частицы силы равны нулю, а следовательно, $\dot{p} = 0$ ввиду уравнения (25).

Для свободной частицы скорость $\dot{q}$ зависит только от импульса частицы (50) и кинетическое уравнение (24) принимает вид

$$\frac{\partial f(q,p,t)}{\partial t} + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\frac{\partial f(q,p,t)}{\partial q} = 0. \qquad (51)$$

При малых значениях импульса ($p^2 \ll 1$) можно использовать приближенное соотношение

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \simeq p. \qquad (52)$$

Используя приближенное соотношение (52) и подставляя его в кинетическое уравнение (51) получаем уравнение, имеющее вид кинетического уравнения Лиувилля (29). Учитывая первую релятивистскую поправку получаем уравнение

$$\frac{\partial f(q,p,t)}{\partial t} + p\frac{\partial f(q,p,t)}{\partial q} = \frac{p^3}{2}\frac{\partial f(q,p,t)}{\partial q}. \qquad (53)$$

Чтобы получить кинетическое уравнение в томографической форме, используем соотношения соответствия (7). Применив эти соотношения, получаем кинетическое уравнение в томографическом представлении в случае релятивистской частицы

$$\frac{\partial w(X,\mu,\nu,t)}{\partial t} -$$
$$- \left[1 + \left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^{-2}\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)^2\right]^{-1/2} \mu \frac{\partial w(X,\mu,\nu,t)}{\partial \nu} = 0. \quad (54)$$

В нерелятивистском приближении с учетом первой релятивистской поправки уравнение (54) имеет вид

$$\frac{\partial w(X,\mu,\nu,t)}{\partial t} - \mu\frac{\partial w(X,\mu,\nu,t)}{\partial \nu} =$$
$$= \frac{\mu}{2}\left[-\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^{-3}\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)^3\right] w(X,\mu,\nu,t). \quad (55)$$

Следовательно, используя преобразование Радона мы получаем релятивистское кинетическое уравнение для свободной частицы в томографическом представлении.

Некоторые аспекты томографического подхода использовались в работах [15–22]. Для многих частиц релятивистских свободных частиц обощение уравнения (55) можно получить простым суммированием по степеням свободы.

Заключение

В работе дан обзор свойств преобразования Радона и построено томографическое представление состояний классической частицы с флуктуациями координаты и импульса. Получено кинетическое уравнение Лиувилля в томографическом представлении для многих частиц и выполнена процедура редукции этого уравнения, аналогичная построению цепочки Боголюбова. Главным результатом работы являются формулы (36) и (45). Рассмотрен простейший пример релятивистского кинетического уравнения для свободной частицы в томографической картине движения. Построенное в работе томографическое представление кинетических уравнений в классической статистической механике допускает обобщение на квантовую область. Действительно, редуцируя кинетическое уравнениями Мойала для многих частиц, можно получить квантовый аналог цепочки Бололюбова, основанной на томографической функции распределения вероятностей. Данная процедура эквивалентна получению уравнения для редуцированного оператора плотности $\hat{\rho}(1) = \mathrm{Tr}_2\,\hat{\rho}(1,2)$ из уравнения фон Неймана, где $\hat{\rho}(1,2)$ является оператором плотности системы, состоящей из двух подсистем. Проводя усреднение по степени свободы второй подсистемы в этом уравнении, можно получить уравение для редуцированного оператора плотности. Его томографическое представление также может быть получено не только с использованием усреднения, как это было сделано с уравнением Лиувилля и уравнением Мойала, но и с помощью взятия следа по степеням свободы второй подсистемы непосредственно в уравнении фон Неймана. Различные методы получения томографического представления цепочки Боголюбова в квантовой области будут представленны в другой работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 10-02-00312-а, 09-02-00142-а). Работа выполнена на физическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова и в Институте нанотехнологий микроэлектроники РАН.

Список литературы

1. *Bogolyubov N.N.* Selected articles. In three volumes. Kiev, 1966.
2. *Bogolyubov N.N. Jr., Sadovnikov B.I.* Some Aspects in the Statistical Mechanics. Moscow, 1975.
3. *Wigner E.* // Phys. Rev. 1932. **40**. P. 749.
4. *Moyal J.E.* // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1949. **45**. P. 99.
5. *Mancini S., Man'ko V.I., Tombesi P.* // Phys. Lett. A. 1996. **213**. P. 1.
6. *Radon J.* // Ber. Sachs. Akad. Wiss. (Leipzig). 1917. **69**. P. 262.
7. *Man'ko O.V., Man'ko V.I.* // J. Russ. Laser Res. 1997. **18**. P. 407.
8. *Bertrand J., Bertrand P.* // Found. Phys. 1989. **17**. P. 397.
9. *Vogel K., Risken H.* // Phys. Rev. A. 1989. **40**. P. 2847.
10. *Smithey D.T., Beck M., Raymer M.G., Faridani A.* // Phys. Rev. Lett. 1993. **70**. P. 1244.
11. *Dunn I.J., Walmsley I.A., Mukamel C.* // Phys. Rev. Lett. 1995. **74**. P. 884.
12. *Shiller S., Breitenbach G., Pereira S.F.* et al. // Phys. Rev. Lett. 1996. **77**. P. 2933.
13. *Lvovsky A.I., Hansen H., Aichele T.* et al. // Phys. Rev. Lett. 2001. **87**, N 5. P. 050402-1.
14. *Wallentowitz S., Vogel W.* // Phys. Rev. Lett. 1995. **75**. P. 2932.
15. *Chernega V.N., Man'ko O.V., Man'ko V.I.* et al. // J. Russ. Laser Res. 2006. **27**, 132.
16. *Chernega V.N., Man'ko V.I.* // J. Russ. Laser Res. 2007. **28**. P. 103.
17. *Chernega V.N., Man'ko V.I.* // J. Russ. Laser Res. 2008. **29**. P. 505.
18. *Chernega V.N., Man'ko V.I.* // J. Russ. Laser Res. 2008. **29**. P. 43.
19. *Chernega V.N., Man'ko V.I.* // J. Russ. Laser Res. 2007. **28**. P. 535.
20. *Chernega V.N., Man'ko V.I.* // J. Russ. Laser Res. 2008. **29**. P. 347.
21. *Chernega V.N., Man'ko V.I.* // J. Russ. Laser Res. 2009. **30**. P. 359.
22. *Манько В.И., Манько О.В., Чернега В.Н.* // Мат-лы XXXIX и XL зимней школы «Физика атомного ядра и элементарных частиц». СПб., 2007. С. 261.

Tomographic representation of kinetic equations in classical statistical mechanics

V. I. Man'ko[1,a], **B. I. Sadovnikov**[2,b], **V. N. Chernega**[2]

[1] *Department of High Energy Electrons, P. N. Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Sciences, Leninskii Prosp. 53, Moscow 119991, Russia.*

[2] *Department of Quantum Statistics and Field Theory, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.*

E-mail: [a] *manko@sci.lebedev.ru,* [b] *b.i.sadovnikov@gmail.com.*

Using the Radon transform the tomographic representation of kinetic equations is constructed. The Liouville equation for one particle and for many particles is considered. The reduced Liouville equation is obtained in the tomographic representation? and the Bogolubov chain of equations is studied in this representation. Example of relativistic kinetic equation in the tomographic representation is considered.

Keywords: Symplectic tomography, probability distributions, kinetic equations, phase-space, reduced Liuville equation.

PACS: 03.65.–w.

Received 23 February 2010.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 5(2010).

Сведения об авторах

1. Манько Владимир Иванович — докт. физ.-мат. наук, гл. нуч. сотр.; тел.: (499) 132-62-19, e-mail: manko@sci.lebedev.ru.
2. Садовников Борис Иосифович — докт. физ.-мат. наук, зав. отделением; тел.: (495) 932-80-10, e-mail: b.i.sadovnikov@gmail.com.
3. Чернега Владимир Николаевич — студент; тел.: (495) 939-12-90, e-mail: vchernega@gmail.com.