Начально-краевая электромагнитная задача в области с киральным заполнением

А. Н. Боголюбов[a], Ю. В. Мухартова[b], Гао Цзесин

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

E-mail: [a] bogan7@yandex.ru, [b] muhartova@yandex.ru

Статья поступила 03.03.2010, подписана в печать 20.04.2010

Настоящая работа посвящена исследованию задачи о возбуждении электромагнитных колебаний заданным распределением зарядов и токов в области с неоднородным киральным заполнением. При этом область, в которой рассматривается задача, может быть как конечной, ограниченной идеально проводящей поверхностью, так и бесконечной, представляющей собой дополнение к ограниченному идеально проводящему телу. Для возникающей начально-краевой задачи сформулирована обобщенная постановка в некотором специальном функциональном пространстве. При помощи метода Галеркина доказано существование и единственность слабого решения задачи.

Ключевые слова: киральная среда, начально-краевая задача, слабая постановка, обобщенное решение.

УДК: 517.958; 621.372.8. PACS: 41.20.Cv.

Введение

В настоящее время возрос интерес к изучению электромагнитных задач в бианизотропных средах, к числу которых относятся киральные среды. Это связано с тем, что стало возможным создавать искусственные среды, в которых киральность уже не является малой поправкой и может оказывать существенное воздействие на процесс распространения электромагнитных волн. Такие среды получают путем внедрения в диэлектрик электромагнитных частиц зеркально-ассиметричной формы. Материальные уравнения в киральных средах, как естественных, так и искуственных, имеют вид [1–9]

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} + i\xi \boldsymbol{B}, \quad \boldsymbol{H} = i\xi \boldsymbol{E} + \mu^{-1}\boldsymbol{B},$$

где ε и μ — материальные параметры среды, переходящие в диэлектрическую и магнитную проницаемости, если киральный адмитанс ξ стремится к нулю.

Процессы распространения гармонически зависящих от времени электромагнитных полей в однородной киральной среде и волноводах, имеющих киральное заполнение, а также поведение поля на границе раздела обычных и киральных сред активно исследуются [1, 3, 9, 10].

Задачи о дифракции электромагнитных волн на идеальных проводниках произвольной формы, помещенных в обычную (некиральную) среду, и на прозрачных телах, характеризующихся обычными материальными уравнениями, хорошо изучены, для них предложены алгоритмы построения приближенных решений [11].

В связи с этим представляется интересным исследовать начально-краевую задачу о возбуждении электромагнитных волн в киральных средах. В настоящей статье рассматривается достаточно общая задача о возбуждении колебаний заданным распределением тока в ограниченной и неограниченной областях, имеющих неоднородное киральное заполнение.

1. Постановка задачи

Пусть Ω — конечное или бесконечное множество в $\mathbb{R}_3$. В первом случае будем считать, что оно ограничено идеально проводящей поверхностью Γ. Во втором случае будем считать, что $\tilde{\Omega}$ — дополнение к Ω, конечно, ограничено поверхностью Γ и представляет собой идеальный проводник. Пусть область Ω состоит из конечного числа подобластей:

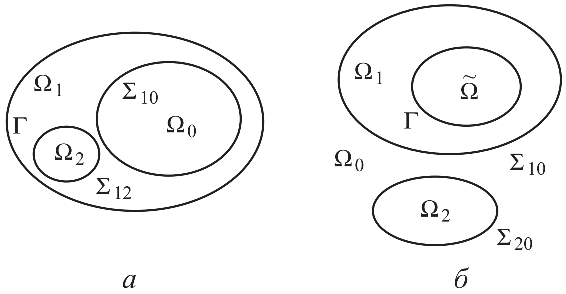
$$\Omega = \bigcup_{i=0}^{q} \Omega_i,$$

причем все они, кроме, быть может, подобласти Ω_0, конечны, и общая для Ω_i и Ω_j граница Σ_{ij} регулярна и ограниченна (рисунок). Подобласть Ω_0 неограниченна в случае бесконечной области Ω. Пусть подобласти Ω_i имеют однородные киральные заполнения с параметрами

$$\varepsilon = \varepsilon_i, \quad \mu = \mu_i, \quad \xi = \xi_i, \quad \sigma = \sigma_i \quad \text{в} \quad \Omega_i;$$
$$\varepsilon_i > 0, \quad \mu_i > 0, \quad \xi_i \geqslant 0, \quad \sigma_i \geqslant 0; \quad i = 0, 1, \ldots, q,$$

причем $\xi_0 = 0$ и $\sigma_0 = 0$, если подобласть Ω_0 неограниченна, т. е. в этом случае проводник $\tilde{\Omega}$ и ограниченные киральные вставки $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_q$ помещены в обычную непроводящую среду, характеризующуюся диэлектрической проницаемостью ε_0 и магнитной проницаемостью μ_0.

Предположим, что в Ω имеются сторонние токи плотности $\boldsymbol{j}$, сосредоточенные в некоторой конечной области. Получим начально-краевую задачу для векторов



а *б*

Конечная область Ω в случае $q = 2$ (*а*) и бесконечная область Ω в случае $q = 2$ (*б*). Здесь Ω_0 — бесконечная подобласть области Ω

$\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ индуцированного ими поля. Для этого используем уравнения Максвелла и материальные уравнения, позволяющие выразить векторы $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{B}$ через векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$. Воспользуемся также тем, что краевое условие для тангенциальной составляющей вектора $\boldsymbol{E}$ на границе между киральной средой и идеальным проводником сохраняет такой же вид, как и в случае границы между обычной средой и проводником. В результате приходим к следующей задаче: необходимо найти функцию $\boldsymbol{u}=\{\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}\}$, такую что

$$(\varepsilon+\xi^2\mu)\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}+i\xi\mu\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}-\operatorname{rot}\boldsymbol{H}+\sigma\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{j} \quad \text{в} \quad \Omega\times(0,T], \tag{1}$$

$$-i\mu\xi\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}+\mu\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}+\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=0 \quad \text{в} \quad \Omega\times(0,T], \tag{2}$$

$$[\boldsymbol{E},\boldsymbol{n}]=0 \quad \text{на} \quad \Gamma\times[0,T], \tag{3}$$

$$\boldsymbol{E}|_{t=0}=\boldsymbol{E_0}, \quad \boldsymbol{H}|_{t=0}=\boldsymbol{H_0} \quad \text{в } \Omega. \tag{4}$$

2. Слабая постановка задачи

Получим слабую постановку задачи (1)–(4). Пусть $\boldsymbol{\Phi}=\{\varphi,\psi\}$, где φ и ψ — произвольные гладкие трехкомпонентные функции, обращающиеся в нуль при $t=T$, такие что они сами и их первые производные квадратично интегрируемы в Ω. Умножим правую и левую части уравнения (1) скалярно в $(L^2(\Omega))^3$ на функцию φ, правую и левую части уравнения (2) соответственно на функцию ψ, сложим полученные равенства и проинтегрируем результат по времени от 0 до T:

$$\int_0^T\Big[-\Big((\varepsilon+\xi^2\mu)\boldsymbol{E}+i\xi\mu\boldsymbol{H},\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big)_\Omega-\Big(\mu\boldsymbol{H}-i\xi\mu\boldsymbol{E},\frac{\partial\psi}{\partial t}\Big)_\Omega+ \\ +(A\boldsymbol{u},\boldsymbol{\Phi})_K+(M\boldsymbol{u},\boldsymbol{\Phi})_K\Big]dt= \\ =-\int_0^T(\boldsymbol{j},\varphi)_\Omega\,dt+\big((\varepsilon+\xi^2\mu)\boldsymbol{E_0}+i\xi\mu\boldsymbol{H_0},\varphi|_{t=0}\big)_\Omega+ \\ +\big(\mu\boldsymbol{H_0}-i\xi\mu\boldsymbol{E_0},\psi|_{t=0}\big)_\Omega. \tag{5}$$

Здесь использованы обозначения

$$(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})_\Omega=\sum_{i=1}^3\int_\Omega f_i\bar{g}_i\,dx$$

для любых вектор-функций

$$\boldsymbol{f}=\{f_i\}\in(L_2(\Omega))^3 \quad \text{и} \quad \boldsymbol{g}=\{g_i\}\in(L_2(\Omega))^3 \quad (i=1,2,3),$$
$$(A\boldsymbol{u},\boldsymbol{\Phi})_K=-(\operatorname{rot}\boldsymbol{H},\varphi)_\Omega+(\operatorname{rot}\boldsymbol{E},\psi)_\Omega,$$
$$(M\boldsymbol{u},\boldsymbol{\Phi})_K=(\sigma\boldsymbol{E},\varphi)_\Omega.$$

Введем гильбертово пространство

$$K=(L^2(\Omega))^6=(L^2(\Omega))^3\times(L^2(\Omega))^3.$$

Если $\boldsymbol{\Phi}=\{\varphi,\psi\}\in K$ и $\boldsymbol{\Phi}_*=\{\varphi_*,\psi_*\}\in K$, положим

$$(\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{\Phi}_*)_K=(\varphi,\varphi_*)_\Omega+(\psi,\psi_*)_\Omega.$$

Все выражения в равенстве (5) будут иметь смысл при любой функции

$$\boldsymbol{\Phi}\in L^2(0,T;D(A)), \quad \frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial t}\in L^2(0,T;D(A))$$

и

$$\boldsymbol{u}\in L^\infty(0,T;D(A)), \quad \boldsymbol{u}|_{t=0}=\boldsymbol{u}_0=\{\boldsymbol{E}_0,\boldsymbol{H}_0\}\in D(A),$$

где множество $D(A)$ имеет вид

$$D(A)=\big\{\boldsymbol{\Phi}|\boldsymbol{\Phi}=\{\varphi,\psi\}\in K,\ \operatorname{rot}\varphi\in(L^2(\Omega))^3, \\ \operatorname{rot}\psi\in(L^2(\Omega))^3,\ [\boldsymbol{n},\varphi]=0 \ \text{ на } \Gamma\big\},$$

а также при условии $\boldsymbol{j}\in L^2(0,T;\Omega)$. При этом действующие на множестве $D(A)$ операторы A и M являются линейными и непрерывными. Смысл выражения $[\boldsymbol{n},\varphi]$ на Γ заключается в следующем: существует открытое множество $\Omega_1\subset\Omega$, такое что $\Gamma\subset\partial\Omega_1$ и $\varphi\to[\boldsymbol{n},\varphi]$ — линейное непрерывное отображение $H(\operatorname{rot};\Omega_1)\to(H^{-1/2}(\Gamma))^3$.

Заметим, что в равенстве (5) пока не учтены граничные условия исходной задачи. Но они учтены при задании области $D(A)$ — области определения оператора A.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Область $D(A)$ плотна в K, и оператор A замкнут.*

Ее доказательство полностью аналогично доказательству соответствующей леммы для начально-краевой задачи в области, заполненной обычной (некиральной) неоднородной средой, полученному в [12].

Замечание. $\boldsymbol{\Phi}=\{\varphi,\psi\}\in D(A)$, если и только если выполняются условия:

$$\operatorname{rot}\varphi^i,\ \operatorname{rot}\psi^i\in(L^2(\Omega_i))^3, \quad [\boldsymbol{n},\psi^i]=[\boldsymbol{n},\psi^j] \ \text{ на } \Sigma_{ij}; \tag{6}$$

$$[\boldsymbol{n},\varphi^i]=[\boldsymbol{n},\varphi^j] \ \text{ на } \Sigma_{ij}, \quad [\boldsymbol{n},\varphi^1]=0 \ \text{ на } \Gamma. \tag{7}$$

Лемма 2. *Пусть граница Γ области Ω регулярна и ограниченна. Тогда любой элемент $\boldsymbol{\Phi}_*\in K$, такой что форма $(A\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{\Phi}_*)_K$ непрерывна на $D(A)$, принадлежит области $D(A)$ и справедливо равенство $(A\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{\Phi}_*)_K=-(\boldsymbol{\Phi},A\boldsymbol{\Phi}_*)_K$ для любого $\boldsymbol{\Phi}\in D(A)$.*

Доказательство. Определим $D(A^*)$ как множество всех таких $\boldsymbol{\Phi}_*\in K$, что

$$\boldsymbol{\Phi}\to(A\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{\Phi}_*)_K \tag{8}$$

является непрерывной на $D(A)$ формой. В частности, она должна быть непрерывна на $(\pi\mathcal{D}(\Omega_i))^6$, где

$$(\pi(\mathcal{D}(\Omega_i)))^6=\{\boldsymbol{\Phi}|\boldsymbol{\Phi}^i\in(\mathcal{D}(\Omega_i))^6,\ i=0,\ldots,q\},$$

$\mathcal{D}(\mathcal{O})$ — пространство всех бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в $\mathcal{O}$, а $\boldsymbol{\Phi}^i=\{\varphi^i,\psi^i\}$ — это сужение $\boldsymbol{\Phi}=\{\varphi,\psi\}$ на Ω_i, $i=0,\ldots,q$. Но если $\boldsymbol{\Phi}\in(\pi\mathcal{D}(\Omega_i))^6$, то на каждом из Ω_i можно определить $\operatorname{rot}\varphi_*^i$ и $\operatorname{rot}\psi_*^i$ в смысле обобщенных производных:

$$\big(\psi^i,\operatorname{rot}\varphi_*^i\big)_{\Omega_i}=\big(\operatorname{rot}\psi^i,\varphi_*^i\big)_{\Omega_i}$$
$$\text{и } \big(\varphi^i,\operatorname{rot}\psi_*^i\big)_{\Omega_i}=\big(\operatorname{rot}\varphi^i,\psi_*^i\big)_{\Omega_i}.$$

Но тогда

$$(A\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{\Phi}_*)=-\sum_i\big(\psi^i,\operatorname{rot}\varphi_*^i\big)_{\Omega_i}+\sum_i\big(\varphi^i,\operatorname{rot}\psi_*^i\big)_{\Omega_i},$$

откуда в силу непрерывности формы (8) следует, что $\operatorname{rot}\varphi_*^i\in(L^2(\Omega_i))^3$ и $\operatorname{rot}\psi_*^i\in(L^2(\Omega_i))^3$. Таким образом, поскольку граница Γ области Ω регулярна и ограниченна, имеет место линейное непрерывное отображение $H(\mathrm{rot}, \Omega_1) \to H^{-1/2}(\Gamma)$, где Ω_1 — конечная подобласть Ω, часть границы которой совпадает с Γ. Следовательно, можно определить $[\boldsymbol{n}, \varphi^i_*]$ и $[\boldsymbol{n}, \psi^i_*]$ на Σ_{ij} и Γ.

Далее, если элемент $\boldsymbol{\Phi} = \{\varphi, \psi\} \in D(A)$ такой, что $\boldsymbol{\Phi}^i \in (C^1_K(\overline{\Omega}))$, то в силу условий (6), (7) имеет место равенство

$$(A\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Phi}_*)_K = -\int\limits_\Omega \mathrm{rot}\,\psi \cdot \bar{\varphi}_*\,dx + \int\limits_\Omega \mathrm{rot}\,\varphi \cdot \bar{\psi}_*\,dx =$$

$$= -\int\limits_\Omega \mathrm{rot}\,\bar{\varphi}_* \cdot \psi\,dx + \int\limits_\Omega \mathrm{rot}\,\bar{\psi}_* \cdot \varphi\,dx +$$

$$+\sum_{i,j}\oint\limits_{\Sigma_{ij}} \left(-[\boldsymbol{n}^j, \psi^j] \cdot \bar{\varphi}^j_* + [\boldsymbol{n}^j, \psi^i] \cdot \bar{\varphi}^i_*\right) d\sigma_{ij} +$$

$$+\sum_{i,j}\oint\limits_{\Sigma_{ij}} \left([\boldsymbol{n}^j, \varphi^j] \cdot \bar{\psi}^j_* - [\boldsymbol{n}^j, \varphi^i] \cdot \bar{\psi}^i_*\right) d\sigma_{ij} -$$

$$-\oint\limits_\Gamma \bar{\varphi}^1_* \cdot [\boldsymbol{n}, \psi_1]\,d\Gamma \;=\; (\varphi, \mathrm{rot}\,\psi_*)_\Omega - (\psi, \mathrm{rot}\,\varphi_*)_\Omega +$$

$$+\sum_{i,j}\oint\limits_{\Sigma_{ij}} \psi^j \cdot \left([\boldsymbol{n}^j, \bar{\varphi}^j_*] - [\boldsymbol{n}^j, \bar{\varphi}^i_*]\right) d\sigma_{ij} -$$

$$-\sum_{i,j}\oint\limits_{\Sigma_{ij}} \varphi^j \cdot \left([\boldsymbol{n}^j, \bar{\psi}^j_*] - [\boldsymbol{n}^j, \bar{\psi}^i_*]\right) d\sigma_{ij} + \oint\limits_\Gamma \psi^1 [\boldsymbol{n}, \bar{\varphi}^1_*]\,d\Gamma,$$

где $\boldsymbol{n}^j$ и $\boldsymbol{n}$ — единичные векторы внешних нормалей к поверхностям Σ_{ij} и Γ соответственно. В полученном выражении объемные интегралы непрерывны по $\boldsymbol{\Phi}$ на множестве $D(A)$, следовательно, то же самое должно быть справедливо и для поверхностных интегралов. Интеграл

$$\oint\limits_{\Sigma_{ij}} \psi^j \cdot \left([\boldsymbol{n}^j, \bar{\varphi}^j_*] - [\boldsymbol{n}^j, \bar{\varphi}^i_*]\right) d\sigma_{ij}$$

непрерывен на $D(A)$, если и только если $[\boldsymbol{n}^j, \bar{\varphi}^i_*] = [\boldsymbol{n}^j, \bar{\varphi}^j_*]$ на Σ_{ij}. Аналогично получаем $[\boldsymbol{n}^j, \bar{\psi}^i_*] = [\boldsymbol{n}^j, \bar{\psi}^j_*]$ на Σ_{ij} и $[\boldsymbol{n}, \bar{\varphi}^1_*] = 0$ на Γ. Следовательно, $\boldsymbol{\Phi}_* \in D(A)$, и $(A\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Phi}_*)_K = -(\boldsymbol{\Phi}, A\boldsymbol{\Phi}_*)_K$. □

Используя доказанную лемму, можно сформулировать обобщенную постановку исходной задачи следующим образом.

Необходимо найти функцию $\boldsymbol{u} \in L^\infty(0, T; D(A))$, *удовлетворяющую равенству*

$$\int\limits_0^T \Bigg[-\left((\varepsilon + \xi^2\mu)\boldsymbol{E} + i\xi\mu\boldsymbol{H}, \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_\Omega - \left(\mu\boldsymbol{H} - i\xi\mu\boldsymbol{E}, \frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_\Omega -$$

$$- (\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{\Phi})_K + (M\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\Phi})_K\Bigg] dt =$$

$$= -\int\limits_0^T (\boldsymbol{j}, \varphi)_\Omega\,dt + \left((\varepsilon + \xi^2\mu)\boldsymbol{E_0} + i\xi\mu\boldsymbol{H_0}, \varphi|_{t=0}\right)_\Omega +$$

$$+ \left(\mu\boldsymbol{H_0} - i\xi\mu\boldsymbol{E_0}, \psi|_{t=0}\right)_\Omega \quad (9)$$

при любой функции $\boldsymbol{\Phi}$, *такой что*

$$\boldsymbol{\Phi} \in L^2(0, T; D(A)), \quad \frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial t} \in L^2(0, T; D(A)),$$

и обращающейся в нуль при $t = T$, *где* $\boldsymbol{u}_0 = \{\boldsymbol{E}_0, \boldsymbol{H}_0\} \in D(A)$ *и* $\boldsymbol{j} \in L^2(0, T; \Omega)$.

3. Существование и единственность слабого решения

Теорема 1. *Решение задачи* (9) *существует.*

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$\boldsymbol{\Phi} = \{\varphi, \psi\} \to (\boldsymbol{\Phi}, \mathrm{rot}\,\varphi, \mathrm{rot}\,\psi).$$

Оно позволяет отождествить $D(A)$ с замкнутым подпространством пространста $(L^2(\Omega))^{12}$, откуда следует, что $D(A)$ сепарабельно. Пусть $\boldsymbol{\Phi}_1, \ldots, \boldsymbol{\Phi}_m, \ldots$ — базис в $D(A)$. Будем искать «приближенное» решение $\boldsymbol{u}_m$ уравнения (9):

$$\boldsymbol{u}_m(t) = \sum_{k=1}^m \chi^{(m)}_k \boldsymbol{\Phi}_k.$$

Пусть $\boldsymbol{u}_m(t)$ удовлетворяет задаче

$$\left(\left((\varepsilon + \xi^2\mu)\frac{\partial}{\partial t}u_{1,m}(t) + i\xi\mu\frac{\partial}{\partial t}u_{2,m}(t)\right), \varphi_j\right)_\Omega +$$

$$+ \left(\left(\mu\frac{\partial}{\partial t}u_{2,m}(t) - i\xi\mu\frac{\partial}{\partial t}u_{1,m}(t)\right), \psi_j\right)_\Omega +$$

$$+ (A\boldsymbol{u}_m(t), \boldsymbol{\Phi}_j)_K + (M\boldsymbol{u}_m(t), \boldsymbol{\Phi}_j)_K = -(\boldsymbol{j}, \varphi_j)_\Omega,$$

$$1 \leqslant j \leqslant m, \boldsymbol{u}_m(0) = \boldsymbol{u}_{0m}, \quad \boldsymbol{u}_{0m} \in [\boldsymbol{\Phi}_1, \ldots, \boldsymbol{\Phi}_m],$$

$$\boldsymbol{u}_{0m} \to \boldsymbol{u}_0 \in K. \quad (10)$$

Функция $\boldsymbol{u}_m$ определена единственным образом на $[0, T]$. Умножим уравнение (10) на $\chi^{(m)}_j$ и просуммируем по j. Так как $(A\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi})_K = -(\boldsymbol{\Phi}, A\boldsymbol{\Psi})_K$, то

$$(A\boldsymbol{u}_m(t), \boldsymbol{u}_m(t))_K = 0,$$

и, следовательно, для $\boldsymbol{u}_m$ справедливо равенство

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}\left\{\left((\varepsilon + \xi^2\mu)u_{1,m}(t), u_{1,m}(t)\right)_\Omega + (\mu u_{2,m}(t), u_{2,m}(t))_\Omega\right\} =$$

$$= i\left(\xi\mu\frac{\partial}{\partial t}u_{1,m}(t), u_{2,m}(t)\right)_\Omega - i\left(\xi\mu\frac{\partial}{\partial t}u_{2,m}(t), u_{1,m}(t)\right)_\Omega -$$

$$- (M\boldsymbol{u}_m(t), \boldsymbol{u}_m(t))_K - (\boldsymbol{j}, u_{1,m}(t))_\Omega. \quad (11)$$

Проинтегрируем (11) по времени. Существуют такие числа $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$, зависящие от параметров среды, что

$$\frac{1}{2}\left\{\left((\varepsilon + \xi^2\mu)u_{1,m}(t), u_{1,m}(t)\right)_\Omega + (\mu u_{2,m}(t), u_{2,m}(t))_\Omega\right\} \geqslant$$

$$\geqslant C_1 \cdot \|\boldsymbol{u}_m(t)\|^2_K,$$

$$\frac{1}{2}\left\{\left((\varepsilon + \xi^2\mu)u_{1,m}(0), u_{1,m}(0)\right)_\Omega + (\mu u_{2,m}(0), u_{2,m}(0))_\Omega\right\} \leqslant C_2,$$

так как начальные значения $\boldsymbol{u}_{0m}$ ограничены по норме для всех m.

Оставшиеся слагаемые можно оценить, используя теорему о среднем и учитывая, что $\|\boldsymbol{u}_m(t)\|$ не превосходят выражений $\int\limits_0^t \|\boldsymbol{u}_m(\tau)\|\,d\tau$. В итоге приходим к неравенству

$$C_1\|\boldsymbol{u}_m(t)\|^2 \leqslant C_2 + C_3\int_0^t \|\boldsymbol{u}_m(\tau)\|^2\,d\tau + \left|\int_0^t (\boldsymbol{j}(\tau), u_{1,m}(\tau))_\Omega\,d\tau\right|,$$

где $C_3 > 0$ — некоторое число, зависящее от T и параметров среды. В этом неравенстве остается оценить последнее слагаемое:

$$\left|\int_0^t (\boldsymbol{j}(\tau), u_{1,m}(\tau))_\Omega\,d\tau\right| \leqslant \frac{1}{2}\int_0^t \{\|\boldsymbol{u}_m(\tau)\|^2 + \|\boldsymbol{j}(\tau)\|^2\}\,d\tau \leqslant$$
$$\leqslant C_4 + \frac{1}{2}\int_0^t \|\boldsymbol{u}_m(\tau)\|^2\,d\tau.$$

Таким образом, решение $\boldsymbol{u}_m(t)$ задачи (10) удовлетворяет неравенству

$$\|\boldsymbol{u}_m(t)\|_K^2 \leqslant C_5 + C_6\int_0^t \|\boldsymbol{u}_m(\tau)\|_K^2\,d\tau,$$

где $C_5 = (C_2 + C_4)/C_1$ и $C_6 = (C_3 + 1/2)/C_1$. Используя лемму Гроноулла, находим

$$\|\boldsymbol{u}_m(t)\|_K \leqslant C,$$

где константа C не зависит от m. Это означает, что из последовательности $\{\boldsymbol{u}_m(t)\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{\boldsymbol{u}_\mu(t)\}$, которая будет слабо сходиться в $L^\infty(0,T;K)$ к некоторому $\boldsymbol{u}$. Не ограничивая общности, будем считать, что слабо сходится вся последовательность $\{\boldsymbol{u}_m(t)\}$. Пусть

$$\boldsymbol{\Psi} = \sum_{j=1}^{m_0} \kappa_j(t)\boldsymbol{\Phi}_j, \tag{12}$$

где $\kappa_j(t) \in C^1([0,T])$, $\kappa_j(T) = 0$. Фиксируем некоторое m, умножим (10) на $\kappa_j(t)$, $j \leqslant m_0 \leqslant m$, просуммируем по j и проинтегрируем полученное равенство по частям по t от 0 до T:

$$-\int_0^T \Big\{ \Big(((\varepsilon+\xi^2\mu)u_{1,m}(t) + i\xi\mu u_{2,m}(t)), \frac{d\Psi_1}{dt}\Big)_\Omega +$$
$$+ \Big((\mu u_{2,m}(t) - i\xi\mu u_{1,m}(t)), \frac{d\Psi_2}{dt}\Big)_\Omega \Big\} dt +$$
$$+\int_0^T \{(M\boldsymbol{u}_m(t), \boldsymbol{\Psi})_K - (\boldsymbol{u}_m(t), A\boldsymbol{\Psi})_K\}\,dt =$$
$$= -\int_0^T (\boldsymbol{j}, \Psi_1)_\Omega\,dt + \big(((\varepsilon+\xi^2\mu)u_{1,m} + i\xi\mu u_{2,m}), \Psi_1\big)_\Omega\big|_{t=0} +$$
$$+ \big((\mu u_{2,m} - i\xi\mu u_{1,m}), \Psi_2\big)_\Omega\big|_{t=0}.$$

В полученном равенстве можно перейти к пределу по m. В результате получим существование вектор-функции $\boldsymbol{u}$, принадлежащей $L^\infty(0,T;K)$ и удовлетворяющей уравнению (9) при любой функции $\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Psi}$ вида (12). Но если $\boldsymbol{\Phi}$ удовлетворяет условиям, указанным в слабой постановке задачи (9), то можно найти последовательность $\boldsymbol{\Psi}_k$ вида (12), такую что

$$\boldsymbol{\Psi}_k \to \boldsymbol{\Phi} \ \text{ в } \ L^2(0,T;D(A)) \ \text{ и } \ \frac{\partial\boldsymbol{\Psi}_k}{\partial t} \to \frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial t} \ \text{ в } \ L^2(0,T;K).$$

Следовательно, равенство (9) выполняется при любой функции $\boldsymbol{\Phi}$ с указанными в постановке задачи свойствами. □

Теорема 2. *Решение задачи (9) единственно.*

Доказательство. Для доказательства единственности решения задачи (9) положим $\boldsymbol{j} = 0$ и $\boldsymbol{u}_0 = 0$. Функцию $\boldsymbol{u}$ продолжим нулем в полуплоскость $t < 0$ и обозначим проложение как $\tilde{\boldsymbol{u}}$. В уравнении (9) можно взять $\boldsymbol{\Phi} = \theta\boldsymbol{\Psi}$, где θ — сужение на $[0,T]$ функции $\Theta \in \mathcal{D}(-\infty,T)$, а $\boldsymbol{\Psi}$ — произвольная функция из $L^2(0,T;D(A))$, такая что $\frac{\partial\boldsymbol{\Psi}}{\partial t} \in L^2(0,T;D(A))$. Тогда в смысле распределений $\mathcal{D}'(-\infty,T)$ справедливо равенство

$$\left(\left((\varepsilon+\xi^2\mu)\frac{\partial\tilde{u}_1}{\partial t} + i\xi\mu\frac{\partial\tilde{u}_2}{\partial t}\right), \varphi_1\right)_\Omega +$$
$$+\left(\left(\mu\frac{\partial\tilde{u}_2}{\partial t} - i\xi\mu\frac{\partial\tilde{u}_1}{\partial t}\right), \varphi_2\right)_\Omega - (\tilde{\boldsymbol{u}}, A\boldsymbol{\Phi})_K + (M\tilde{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{\Phi})_K = 0.$$

Если теперь продолжить $\tilde{\boldsymbol{u}}$ нулем для $t > T$, то в смысле распределений $\mathcal{D}'(\boldsymbol{R}_t)$ получится равенство

$$\left(\left((\varepsilon+\xi^2\mu)\frac{\partial\tilde{u}_1}{\partial t} + i\xi\mu\frac{\partial\tilde{u}_2}{\partial t}\right), \varphi_1\right)_\Omega +$$
$$+\left(\left(\mu\frac{\partial\tilde{u}_2}{\partial t} - i\xi\mu\frac{\partial\tilde{u}_1}{\partial t}\right), \varphi_2\right)_\Omega - (\tilde{\boldsymbol{u}}, A\boldsymbol{\Phi})_K + (M\tilde{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{\Phi})_K =$$
$$= c\delta(t-T). \tag{13}$$

Пусть $\rho(t) \in \mathcal{D}(\boldsymbol{R}_t)$ имеет носитель в $[0,\epsilon]$. Рассмотрим свертку равенства (13) с функцией $\rho(t)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\left((\varepsilon+\xi^2\mu)\frac{\partial\tilde{u}_1(t)}{\partial t} + i\xi\mu\frac{\partial\tilde{u}_2(t)}{\partial t}\right)\rho(\tau-t), \varphi_1\right)_\Omega dt +$$
$$+\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\left(\mu\frac{\partial\tilde{u}_2(t)}{\partial t} - i\xi\mu\frac{\partial\tilde{u}_1(t)}{\partial t}\right)\rho(\tau-t), \varphi_2\right)_\Omega dt -$$
$$-\int_{-\infty}^{+\infty} (\tilde{\boldsymbol{u}}(t)\rho(\tau-t), A\boldsymbol{\Phi})_K\,dt +$$
$$+\int_{-\infty}^{+\infty} (M\tilde{\boldsymbol{u}}(t)\rho(\tau-t), \boldsymbol{\Phi})_K\,dt = c\rho(\tau-T),$$

или

$$\int_0^\epsilon \bigg(\frac{\partial}{\partial\tau}\Big((\varepsilon+\xi^2\mu)\tilde{u}_1(\tau-t')\rho(t') +$$
$$+ i\xi\mu\tilde{u}_2(\tau-t')\rho(t')\Big), \varphi_1\bigg)_\Omega dt' +$$
$$+\int_0^\epsilon \left(\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\mu\tilde{u}_2(\tau-t')\rho(t') - i\xi\mu\tilde{u}_1(\tau-t')\rho(t')\right), \varphi_2\right)_\Omega dt' -$$
$$-\int_0^\epsilon \left(\tilde{\boldsymbol{u}}(\tau-t')\rho(t'), A\boldsymbol{\Phi}\right)_K dt' + \int_0^\epsilon \left(M\tilde{\boldsymbol{u}}(\tau-t')\rho(t'), \boldsymbol{\Phi}\right)_K dt' =$$
$$= c\rho(\tau-T) \tag{14}$$

При $\tau \leqslant T$ правая часть (14) равна нулю, а это означает, что форма

$$\boldsymbol{\Phi}(t',\tau) \to \left(\tilde{\boldsymbol{u}}(\tau - t')\rho(t'), A\boldsymbol{\Phi}(t',\tau)\right)_K$$

непрерывна на $D(A)$. Следовательно, $\tilde{\boldsymbol{u}}(\tau - t')\rho(t') \in \in D(A)$ и можно положить

$$\boldsymbol{\Phi} = \tilde{\boldsymbol{u}}(\tau - t') \cdot \rho(t').$$

При этом

$$\int\limits_0^{\epsilon} \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\tau}\Big\{ \left((\varepsilon + \xi^2\mu)\tilde{u}_1(\tau - t')\rho(t'), \tilde{u}_1(\tau - t')\rho(t')\right)_\Omega + \\ + \left(\mu\tilde{u}_2(\tau - t')\rho(t'), \tilde{u}_2(\tau - t')\rho(t')\right)_\Omega \Big\} dt' + \\ + i\int\limits_0^{\epsilon} \Big(\frac{\partial}{\partial\tau}(\xi\mu\tilde{u}_2(\tau - t')\rho(t')), \tilde{u}_1(\tau - t')\rho(t')\Big)_\Omega dt' - \\ - i\int\limits_0^{\epsilon} \Big(\frac{\partial}{\partial\tau}(\xi\mu\tilde{u}_1(\tau - t')\rho(t')), \tilde{u}_2(\tau - t')\rho(t')\Big)_\Omega dt' + \\ + \int\limits_0^{\epsilon} \left(M\tilde{\boldsymbol{u}}(\tau - t')\rho(t'), \tilde{\boldsymbol{u}}(\tau - t')\rho(t')\right)_K dt' = 0.$$

Проинтегрируем полученное равенство по τ в пределах от $-\epsilon$ до некоторого $t \leqslant T$. Так как функция $\tilde{\boldsymbol{u}}$ отлична от нуля только при положительном аргументе, то в результате получим

$$\int\limits_0^{\epsilon} \frac{1}{2}\Big\{ \left((\varepsilon + \xi^2\mu)\tilde{u}_1(t - t')\rho(t'), \tilde{u}_1(t - t')\rho(t')\right)_\Omega + \\ + \left(\mu\tilde{u}_2(t - t')\rho(t'), \tilde{u}_2(t - t')\rho(t')\right)_\Omega \Big\} dt' + \\ + i\int\limits_{-\epsilon}^{t}\int\limits_0^{\epsilon} \Big(\frac{\partial}{\partial\tau}(\xi\mu\tilde{u}_2(\tau - t')\rho(t')), \tilde{u}_1(\tau - t')\rho(t')\Big)_\Omega dt'\,d\tau - \\ - i\int\limits_{-\epsilon}^{t}\int\limits_0^{\epsilon} \Big(\frac{\partial}{\partial\tau}(\xi\mu\tilde{u}_1(\tau - t')\rho(t')), \tilde{u}_2(\tau - t')\rho(t')\Big)_\Omega dt'\,d\tau + \\ + \int\limits_0^{\epsilon}\int\limits_{-\epsilon}^{t} \left(M\tilde{\boldsymbol{u}}(\tau - t')\rho(t'), \tilde{\boldsymbol{u}}(\tau - t')\rho(t')\right)_K d\tau\,dt' = 0. \quad (15)$$

Оценим модули интегралов:

$$I_1(t') = \int\limits_{-\epsilon}^{t} \Big(\frac{\partial}{\partial\tau}(\xi\mu\tilde{u}_2(\tau - t')\rho(t')), \tilde{u}_1(\tau - t')\rho(t')\Big)_\Omega d\tau,$$

$$I_2(t') = \int\limits_{-\epsilon}^{t} \Big(\frac{\partial}{\partial\tau}(\xi\mu\tilde{u}_1(\tau - t')\rho(t')), \tilde{u}_2(\tau - t')\rho(t')\Big)_\Omega d\tau.$$

Используя теорему о среднем аналогично тому, как это было сделано при доказательстве существования обобщеного решения задачи, получим оценку

$$|I_1(t')| \leqslant \tilde{C}_1(\epsilon, t, \xi, \mu) \int\limits_{-\epsilon}^{t} \|\tilde{u}(t' + \tau)\rho(t')\|_K^2 \, d\tau.$$

Такого же вида оценка может быть получена и для $I_2(t')$. Таким образом, из равенства (15), оценок для $I_1(t')$ и $I_2(t')$, а также ограниченности оператора M следует, что найдется такая константа $\tilde{C} > 0$, которая не зависит от функций $\tilde{\boldsymbol{u}}$ и ρ, что справедливо неравенство

$$\int\limits_0^{\epsilon} \|\tilde{\boldsymbol{u}}(t - t')\rho(t')\|^2 dt' \leqslant \tilde{C} \int\limits_{-\epsilon}^{t} \left\{ \int\limits_0^{\epsilon} \|\tilde{\boldsymbol{u}}(\tau - t')\rho(t')\|^2 \, dt' \right\} d\tau.$$

Пусть

$$Z(t) = \int\limits_{-\epsilon}^{t} \left\{ \int\limits_0^{\epsilon} \|\tilde{\boldsymbol{u}}(\tau - t')\rho(t')\|^2 \, dt' \right\} d\tau.$$

Тогда

$$Z'(t) = \int\limits_0^{\epsilon} \|\tilde{\boldsymbol{u}}(t - t')\rho(t')\|^2 dt' \leqslant \tilde{C} Z(t),$$

откуда

$$0 \leqslant Z(t) \leqslant Z(-\epsilon) \cdot e^{\tilde{C}(t+\epsilon)} = 0, \quad t \leqslant T.$$

Это означает, что для $\forall\, t' \in \boldsymbol{R}_t$ и $\forall\, \tau \leqslant T$ справедливо равенство $\tilde{u}(\tau - t') \cdot \rho(t') \equiv 0 \quad \forall\, \rho$. Следовательно, $\tilde{u} \equiv 0$, а значит, как следует из определения $\tilde{u}$, и $u \equiv 0$. □

Заключение

Таким образом, показано, что задача о возбуждении сторонними источниками электромагнитных колебаний в области с неоднородным киральным заполнением, ограниченной идеально проводящей поверхностью либо являющейся дополнением к ограниченному идеальному проводнику, имеет единственное обобщенное решение из $L^\infty(0, T; D(A))$. При доказательстве существования решения применялся метод Галеркина, который может быть использован в дальнейшем для построения приближенного решения. Полученные результаты являются обобщением на случай киральной среды классических результатов о существовании и единственности решения задач дифракции электромагнитных волн на неоднородностях в среде, которая описывается обычными материальными уравнениями.

Список литературы

1. *Боголюбов А.Н., Мосунова Н.А., Петров Д.А.* // Матем. моделирование. 2007. **19**, № 5. С.3.
2. *Кацеленбаум Б.З., Коршунова Е.Н., Сивов А.Н., Шатров А.Д.* // Phys. Usp. 1997. **40**. С. 1201.
3. *Pelet P.* // IEEE Trans. Antennas and Propagation. 1990. **38**, N 1. P. 90.
4. *Третьяков С.А.* // Радиотехника и электроника. 1994. **39**, № 10. С. 1457.
5. *Виноградов А.П., Айвазян А.В.* // Радиотехника и электроника. 2002. **47**, № 2. С. 192.
6. *Bahr A.J., Clausing K.R.* // IEEE Trans. Antennas and Propagation. 1994. **42**, N 12. P. 1592.
7. *Jaggard D.L., Mickelson A.R., Papas C.H.* // Appl. Phys. 1979. **18**. P. 211.
8. *Brewitt-Taylor C.R., Lederer P.G., Smith F.C., Haq S.* // IEEE Trans. Antennas and Propagation. 1999. **47**, N 4. P. 692.

9. *Reinert J., Busse G., Jacob A.F.* // IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques. 1999. **47**, N 3. P. 290.
10. *Моденов В.П., Цветков И.В.* // Вестн. Моск. ун=та. Физ. Астрон. 2004. № 3. С. 8.
11. *Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г.* Математические модели электродинамики. М., 1991.
12. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М., 1980.

The mixed electromagnetic problem in a region with chiral filling

A. N. Bogolyubov[a], **Yu. V. Mukhartova**[b], **Gao Dzesin**

Department of Mathematics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.
E-mail: [a] *bogan7@yandex.ru, muhartova@yandex.ru.*

The problem of excitation of electromagnetic oscillations by a given charge and current distributions in a region with a nonhomogeneous chiral filling is considered. The area in which the problem is formulated may be a finite region bounded with an ideally conducting surface, or it may be also an infinite complement to an ideally conducting finite object. For the corresponding mixed problem the generalized formulation in a special functional space is given and the existence and uniqueness of a weak solution are proved, using the Galerkin method.

Keywords: chiral media, mixed problem, weak formulation, generalized solution.
PACS: 41.20.Cv.
Received 3 March 2010.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 5(2010).

Сведения об авторах

1. Боголюбов Александр Николаевич — докт. физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939–10–33, e-mail: bogan7@yandex.ru.
2. Мухартова Юлия Вячеславовна — канд. физ.-мат. наук, науч. сотр.; тел.: (495) 939–10–33, e-mail: muhartova@yandex.ru.
3. Гао Цзесин — аспирант; тел.: (495) 939–10–33.