Радиопередающие свойства углеродной нанотрубки-вибратора, расположенной на границе раздела диэлектриков

А. М. Лерер

Южный федеральный университет, физический факультет, кафедра прикладной электродинамики и компьютерного моделирования. Россия, 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Зорге, д. 5.
E-mail: lerer@sfedu.ru

Статья поступила 24.02.2010, подписана в печать 07.05.2010

Квантово-механические свойства углеродной нанотрубки в модели описаны с помощью макроскопического параметра — поверхностного импеданса. Решение краевой задачи для импедансного вибратора сведено к решению парных интегральных уравнений относительно тока на вибраторе. Парные интегральные уравнения решены методом Галеркина с чебышевским базисом. Исследовано влияние подложки на амплитудно-частотные характеристики антенны — углеродной нанотрубки.

Ключевые слова: углеродные нанотрубки, нанотрубки-вибраторы, антенны миллиметрового диапазона, интегральные уравнения, метод Галеркина.

УДК: 621.396.679.4. PACS: 84.40.Ba; 61.48.De.

Введение

В настоящее время исследуется возможность использования углеродных нанотрубок (УНТ) в качестве антенн санти- и миллиметрового диапазонов. Область применения таких антенн — использование для связи между наноэлектронными цепями и макроскопическими устройствами. Отмечается [1–7] их бóльшая электрическая длина, по сравнению с металлическими вибраторами, благодаря чему резонансы входного сопротивления наблюдается в миллиметровом диапазоне у нанотрубок-вибраторов длиной от 20 до 50 мкм. Электропроводность нанотрубок выше, чем у всех известных проводников сопоставимых размеров. При этом наблюдаемое при обычной температуре значение плотности тока в проводящей нанотрубке на два порядка превосходит значение, достигнутое в настоящее время в сверхпроводниках.

Во всех теоретических работах исследуется идеализированная модель — УНТ в вакууме. Целью настоящей работы является разработка метода расчета и исследование свойств УНТ-вибраторов, лежащих на диэлектрической подложке.

В работах [2–7] решается уравнение Поклингтона с добавлением резистивного члена. Это уравнение с помощью одномерной функции Грина сводится к уравнению Халлена. Для обычных вибраторов более современные и точные методы основаны на интегральных и интегродифференциальных уравнениях, в которых, в отличие от уравнений Поклингтона и Халлена, точки истока и наблюдения располагаются на поверхности вибратора. В результате интегральные уравнения имеют особенности: логарифмическую, сингулярную, бисингулярные. Такие интегродифференциальные и интегральные уравнения являются типичными для двумерной электродинамики, поэтому существует большое число методов их решения. Наиболее эффективны методы, использующие в качестве базиса полиномы Чебышева, учитывающие условие Мейкснера. Особенно эффективны эти методы при аналитической регуляризации интегродифференциальных уравнений на основе обращения интегральных операторов с логарифмическим, сингулярным или бисингулярными ядрами [8–11]. Эти методы можно назвать методами полуобращения. Одной из разновидностей метода полуобращения является использование свойств полиномов Чебышева. Полиномы Чебышева первого и второго рода — собственные функции соответственно интегрального и интегродифференциального операторов с логарифмическим ядром [12].

Конкуренцию этим методам составляют методы, основанные на методе коллокации. Обычно они приводят к системам линейных алгебраических уравнений большего порядка, чем указанные выше методы, но с гораздо более простыми матричными элементами, что упрощает численную реализацию и уменьшает время счета. Так как прямое применение метода коллокации к интегральным и интегродифференциальным уравнениям с особым ядром невозможно, то исходные уравнения вначале преобразуются. Модифицированный метод коллокации, разработанный в работе [13], — по сути метод Галеркина с базисом в виде сплайнов нулевого порядка. Идея выделения особой части ядра не нова (см., напр., [14]). В работах [15, 16] выделяется логарифмическая особенность ядра интегрального уравнения, дальнейшие преобразования аналогичны преобразованиям метода Крылова–Боголюбова [14]. В [17, 18] также выделяется логарифмическая особенность. При решении преобразованного интегрального уравнения используется квадратура, учитывающая условие на ребре. В [19], в отличие от [17, 18], логарифмическая часть ядра выделяется не сразу (она плохо описывает ядро интегрального уравнения для тонких вибраторов), а лишь после выделения статической части ядра. В [20] метод, описанный в [19], применен для расчета УНТ-вибраторов.

В настоящей работе разработан метод расчета вибраторов, основанный на решении парных интегральных уравнений относительно преобразования Фурье для плотности тока на вибраторе. В этом случае особенность ядра интегродифференциального уравнения относительно тока на вибраторе переносится на медленное убывание подынтегральной функции в интеграле Фурье. Улучшить сходимость интеграла Фурье

проще, чем регуляризовать интегродифференциальное уравнение. Для вибратора на подложке решение парных интегральных уравнений предпочтительнее решения интегродифференциальных уравнений также тем, что функция Грина выражается через интеграл Фурье.

Рассмотрим УНТ, расположенную целиком в диэлектрике с диэлектрической проницаемостью ε_1 и лежащей на диэлектрической подложке ε_2, $\mu_1 = \mu_2 = 1$. Введем декартову систему координат, в которой ось X параллельна подложке и перпендикулярна УНТ, ось Y перпендикулярна подложке и УНТ, ось Z направлена вдоль вибратора, начало координат лежит на подложке. УНТ расположена при $|z| \leqslant l$, ее радиус a.

Полагаем, что на поверхности вибратора выполняется граничное условие

$$E_z = \rho_s j, \tag{1}$$

E_z, j — продольные компоненты напряженности электрического поля и плотности поверхностного тока, ρ_s — поверхностное сопротивление углеродной нанотрубки [5] $\rho_s = i\frac{\pi^2 a\hbar(\omega - i\nu)}{2e^2 v_F}$, где v_F — скорость Ферми (для УНТ $v_F = 9.71 \cdot 10^5$ м/с), ω — циклическая частота, ν — релаксационная частота (для УНТ $\nu = 3.33 \cdot 10^{11}$ Гц) e — заряд электрона, c — скорость света в вакууме, $\hbar$ — постоянная Планка. Поперечной компонентой плотности поверхностного тока пренебрегаем, считаем, что j зависит только от продольной координаты.

1. Решение парных интегральных уравнений для импедансного вибратора

С помощью функции Грина для продольного тока (см. приложение) нетрудно получить

$$E_z(z) = \frac{1}{i\omega\varepsilon_1\varepsilon_0}\left[\frac{d^2}{dz^2}\int\limits_{-1}^{l} j(z')g_e(z,z')\,dz' + k_1^2\int\limits_{-l}^{l} j(z')g_m(z,z')\,dz'\right] + E_z^e(z), \tag{2}$$

где $E_z^e(z)$ — внешнее поле. Подставив (2) в (1), получим интегродифференциальное уравнение относительно $j(z)$

$$\frac{1}{i\omega\varepsilon_1\varepsilon_0}\left[\frac{d^2}{dz^2}\int\limits_{-1}^{l} j(z')g_e(z,z')\,dz' + k_1^2\int\limits_{-1}^{l} j(z')g_m(z,z')\,dz'\right] + E_z^e(z) = \rho_s j(z), \quad |z| \leqslant l. \tag{3}$$

При $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$

$$g_e(z,z') = g_m(z,z') = \frac{a}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{R(z,z')}e^{-ikR} \approx g_0(z,z')e^{-ik|z-z'|},$$

где

$$R = \sqrt{2a^2(1-\cos\varphi) + (z-z')^2},$$

$$g_0(z,z') = \frac{a}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{R} = \frac{1}{2\pi}P\cdot K(P),$$

$K(P)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, $P = 2a/\sqrt{4a^2 + (z-z')^2}$.

В этом случае, как известно, интегродифференциальное уравнение преобразуется в интегральное уравнение, решать которое проще, чем исходное. При $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ нужно решать непосредственно интегродифференциальное уравнение (3). При решении как интегродифференциальных, так и интегральных уравнений нужно учитывать, что функции Грина $g_{e,m}(z,z')$ имеют логарифмическую особенность при $z' \to z$.

Уравнение (3) может быть преобразовано в парные интегральные уравнения

$$-\frac{1}{i\omega\varepsilon_1\varepsilon_0}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{j}(\gamma)\left[\gamma^2\tilde{g}_e(\gamma) - k_1^2\tilde{g}_m(\gamma)\right]\exp(i\gamma z)\,d\gamma + E_z^e(z) = \rho_s j(z) \quad \text{при} \quad |z| \leqslant l, \tag{4}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{j}(\gamma)\exp(i\gamma z)\,d\gamma = 0 \quad \text{при} \quad |z| \geqslant l.$$

В (4) и ниже символ «$\sim$» над функцией обозначает ее преобразование Фурье по z.

Уравнения (4) решаем методом Галеркина. В качестве базисных функций $V_n(z)$ используем взвешенные полиномы Чебышева второго рода

$$V_n(z) = \frac{i^n}{\pi(n+1)}\sqrt{1 - \frac{z^2}{l^2}}\,U_n\left(\frac{z}{l}\right), \quad n = 0, 1, 2\ldots$$

Преобразование Фурье полиномов $V_n(z)$ выражается через функции Бесселя $\tilde{V}_n(\gamma) = J_{n+1}(\gamma l)/\gamma$, $\tilde{V}_n(\gamma)$ удовлетворяют второму уравнению (4).

В результате решения получим систему линейных алгебраических уравнений с матричными элементами A_{pn} в левой и B_p в правой частях:

$$B_p = i\omega\varepsilon_1\varepsilon_0\int\limits_{-1}^{l} E_z^e(z)V_p(z)\,dz, \quad A_{pn} = A_{pn}^{(1)} + A_{pn}^{(2)} + A_{pn}^{(3)},$$

где

$$A_{pn}^{(1)} = \frac{\zeta_{pn}}{\pi}\int\limits_0^{\infty}(\gamma^2 - k_1^2)\tilde{g}^{(1)}(\gamma)\frac{J_{p+1}(\gamma l)J_{n+1}(\gamma l)}{\gamma^2}d\gamma, \tag{5}$$

$$A_{pn}^{(2)} = \frac{\zeta_{pn}}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\left(\gamma^2\tilde{g}_e^{(2)}(\gamma) - k_1^2\tilde{g}_m^{(2)}(\gamma)\right)\frac{J_{p+1}(\gamma l)J_{n+1}(\gamma l)}{\gamma^2}\,d\gamma, \tag{6}$$

$$A_{pn}^{(3)} = i\rho_s\omega\varepsilon_1\varepsilon_0\int\limits_{-1}^{l} V_p(z)V_n(z)\,dz = i\rho_s\omega\varepsilon_1\varepsilon_0\zeta_{np}\frac{l}{\pi^2(p+1)(n+1)}\times \cos\frac{q\pi}{2}\left(\frac{1}{(p+n+2)^2-1} - \frac{1}{(p-n)^2-1}\right).$$

Функции $\tilde{g}^{(1)}(\gamma)$, $\tilde{g}_{e,m}^{(2)}(\gamma)$ определены в приложении; $\zeta_{pn} = 1$, если p, n одной четности, в противном случае $\zeta_{pn} = 0$.

Интегралы (5), (6) находим численно. Разбиваем (5) на четыре интеграла с отрезками интегрирования $[0, k_1]$, $[k_1, C]$, $[C, E]$, $[E, \infty)$, где константы C, E выбираются из условий $Cl \gg \max(p, n)$, $Ea \gg 1$. В первом интеграле сделаем замену переменных $\gamma = k_1 \cos\psi$, во втором $\gamma = k_1 \operatorname{ch}\theta$. Оба интеграла затем вычисляем по формуле прямоугольников. В третьем интеграле функции Бесселя заменяем их асимптотикой $J_{p+1}(\gamma l) J_{n+1}(\gamma l) \approx \frac{1}{\pi\gamma l} \cos\left(\frac{p-n}{2}\pi\right)$, преобразованный интеграл вычисляем по формуле прямоугольников. В четвертом интеграле функции Бесселя и $\tilde{g}^{(1)}(\gamma)$ заменяем их асимптотикой, преобразованный интеграл находим аналитически. Таким образом учтено медленное убывание (как γ^{-2} при $\gamma \to \infty$) подынтегрального выражения (5).

Интеграл (6) двойной. Переходим к новым переменным $\alpha = \rho\cos\theta$, $\gamma = \rho\sin\theta$. Интеграл по θ вычисляем по формуле прямоугольников. В интеграле по ρ интегрирование ведем только на отрезках $[0, k_1]$, $[k_1, C]$. Эти интегралы вычисляем так же как и соответствующие интегралы по γ в (5).

2. Численные результаты

Разработана программа на языке C++. Ядра интегралов (5), (6) одни и те же для всех матричных элементов. Они, так же как и $\tilde{V}_n(\gamma)$, вычисляются один раз и запоминаются. Это на порядок сокращает время расчетов. Время счета на ПЭВМ (тактовая частота процессора 2.33 ГГц) одной точки на частотных характеристиках около 0.4 с для УНТ на подложке и 0.015 с для УНТ без подложки, что на порядок меньше времени расчета УНТ без подложки модифицированным методом коллокации. Реализованы два варианта внешнего поля — падение плоской электромагнитной волны и возбуждение дельтовидным источником $E_z^e(z) = \delta(z)$. Ниже приведены результаты для второго варианта. Длина нанотрубки $2l = 20$ мкм.

Проведено исследование входного сопротивления Z_{in} одиночных однослойных УНТ-вибраторов. На рис. 1–3 приведено комплексное входное сопротивление, нормированное на $R_0 = h/(2e^2) \approx 12.9$ кОм. Кривые с символами — мнимая часть Z_{in}.

Проведены исследования внутренней сходимости решения. Число базисных функций (порядок системы линейных алгебраических уравнений) M растет, естественно, при увеличении электрической длины УНТ и увеличении ε_1, ε_2. Для расчетов Z_{in} с погрешностью по внутренней сходимости менее 1% при $f = 250$ ГГц (на вибраторе укладывается половина длины плазменной волны, распространяющейся вдоль УНТ) достаточно положить $M = 10$, при $f = 1000$ ГГц (восемь полуволн) $M = 50$. Скорость внутренней сходимости расчетов поля в дальней зоне при любом способе возбуждения в 3–5 раз выше, чем при расчете Z_{in}.

На рис. 1, 2 изображены частотные характеристики нанотрубок-вибраторов, расположенных на поверхности подложки (кривая *1*). Z_{in} сильно отличаются от Z_{in} без учета подложки (кривая *3*), при низких частотах и малых ε приближаются к Z_{in} вибратора, помещенного в однородный диэлектрик с ε, равной средней арифметической между ε подложки и вакуума (кривая *2*). При увеличении частоты поле сильнее втягивается в диэлектрик, отличие между кривыми *3* и *2* увеличивается. Резонансные частоты увеличиваются при уменьшении радиуса a. На рис. 1 приведена также кривая для мнимой части Z_{in} идеально проводящего металлического вибратора на подложке (кривая *4*). Реальная часть $Z_{\text{in}} \ll R_0$. Следует отметить, что у идеально проводящего металлического вибратора аналогичных размеров первая резонансная частота составляет около 7.255 ТГц для вибратора в воздухе и 6.0 ТГц для вибратора на подложке с $\varepsilon_2 = 2.2$.

На рис. 3 дана частотная характеристика нанотрубки-вибратора, внедренной в подложку (кривая *2*). При

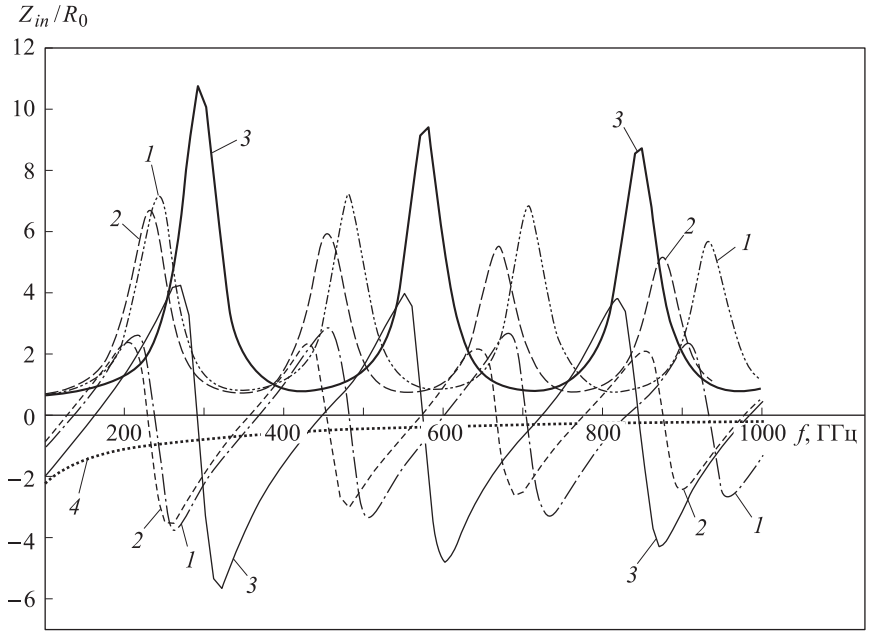

Рис. 1. Зависимость входного сопротивления нанотрубки от частоты. Нанотрубка расположена на поверхности подложки с $\varepsilon_2 = 2.2$, радиус $a = 2.712$ нм. Кривые *1* — $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 2.2$; *2* — $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1.6$; *3* — $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$; *4* — идеально проводящий вибратор

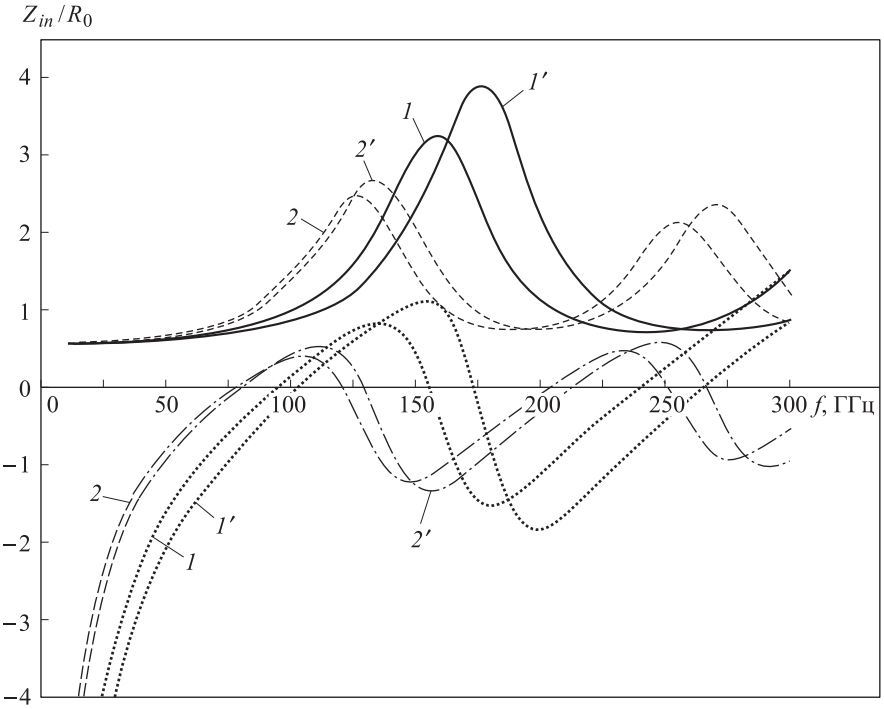

Рис. 2. Зависимость входного сопротивления нанотрубки от частоты. Нанотрубка расположена на поверхности подложки с $\varepsilon_2 = 9$. Кривые *1, 1′* — $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 9$; *2, 2′* — $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 5$, радиус $a = 2.712$ нм (кривые 1, 2) и 1.356 нм (кривые *1′, 2′*)

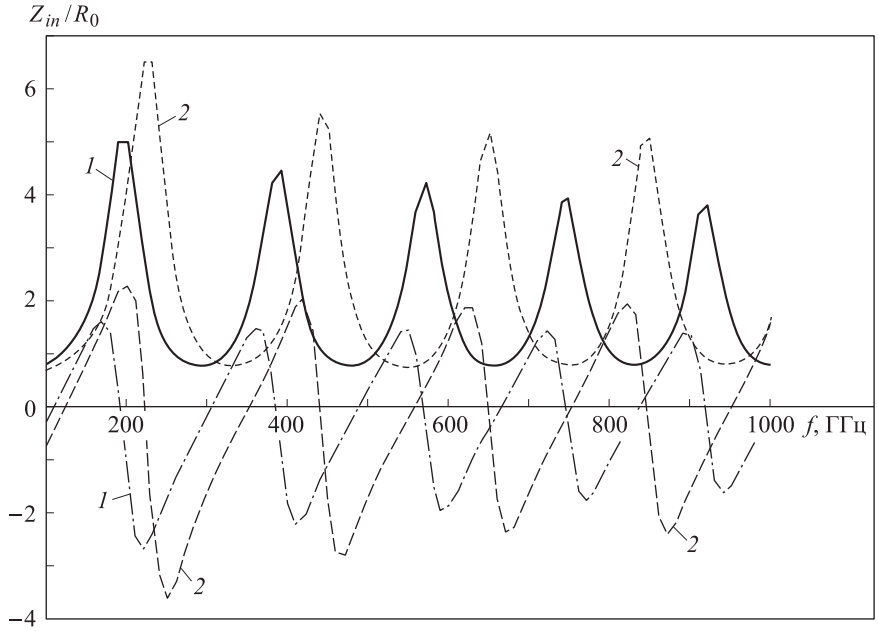

Рис. 3. Зависимость от частоты входного сопротивления нанотрубки, внедренной в подложку. Радиус $a = 2.712$ нм. Кривые *1* — $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 2.2$; *2* — $\varepsilon_1 = 2.2$, $\varepsilon_2 = 1$

низких частотах Z_{in} приближаются к Z_{in} вибратора, помещенного в однородный диэлектрик с диэлектрической проницаемостью, равной диэлектрической проницаемости подложки (кривая *1*).

Амплитудно-частотные зависимости поля в дальней зоне имеют экстремумы в точках, при которых мнимая часть входного сопротивления обращается в нуль. При этом максимумы (минимумы) напряженности электрического поля соответствуют минимумам (максимумам) действительной части входного сопротивления.

На рис. 4, 5 представлены диаграммы направленности $F(\varphi, \theta)$ в верхней полуплоскости. Угол ϕ отсчитывается от подложки, а угол θ — от вибратора. Частота $f = 100$ ГГц. С увеличением диэлектрической проницаемости подложки ε_2 диаграмма направленности в H-плоскости (перпендикулярной нановибратору проходящей через его центр) сужается, а в E-плоскости (проходящей через вибратор) расширяется. Мощность излучения вверх растет с увеличением ε_2.

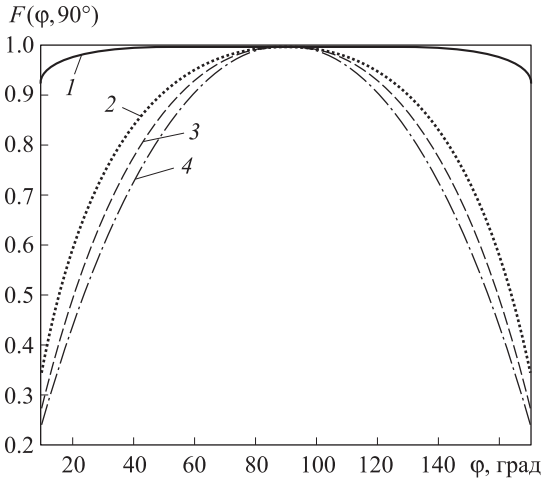

Рис. 4. Диаграмма направленности нанотрубки на подложке. H-плоскость, $\varepsilon_1 = 1$. Кривые *1* — $\varepsilon_2 = 1.01$, *2* — $\varepsilon_2 = 2.2$, *3* — $\varepsilon_2 = 4$, *4* — $\varepsilon_2 = 9$

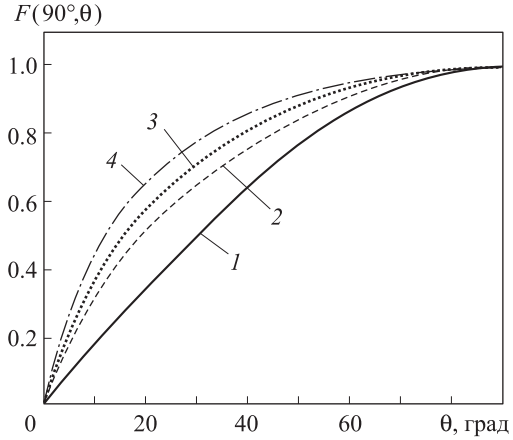

Рис. 5. Диаграмма направленности нанотрубки на подложке. E-плоскость. Обозначения кривых см. на рис. 4

Заключение

Решение краевой задачи о возбуждении УНТ-вибратора сведено к решению парных интегральных уравнений. Использование парных интегральных уравнений предпочтительнее, чем интегродифференциальных, так как функция Грина задачи выражается через интеграл Фурье. Квантово-механические свойства углеродной нанотрубки в модели описаны с помощью макроскопического параметра — поверхностного импеданса. Парные интегральные уравнения решены методом Галеркина. Особенность ядра интегрального уравнения при решении парных интегральных уравнений проявляется в медленной сходимости интегралов в матричных элементах полученных линейных алгебраических уравнений. Улучшена сходимость этих интегралов. Показана быстрая внутренняя сходимость решения. Исследовано влияние подложки на амплитудно-частотные характеристики антенны — углеродной нанотрубки. Показано, что эти характеристики можно описать, введя эффективную диэлектрическую проницаемость $\varepsilon_{\text{eff}} = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/2$, только при низких частотах и малых диэлектрических проницаемостях подложки.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 09-02-13530офи_ц).

Приложение. Функция Грина для вибратора

Определим электромагнитное поле, создаваемое продольным током $j_z\delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z')$ как суперпозицию LM- и LE-волн, описываемых y-компонентой электрического и магнитного векторных потенциалов $A(x, x', y, y', z, z')$, $F(x, x', y, y', z, z')$ [21]. Полагаем, что $y' \geqslant 0$. Преобразование Фурье от A, F по координатам x, z обозначим $\tilde{A}(y, y', \alpha, \gamma)\exp[-i(\alpha x' + \gamma z')]$, $\tilde{F}(y, y', \alpha, \gamma)\exp[-i(\alpha x' + \gamma z')]$. Функции $\tilde{A}, \tilde{F}$ есть решения дифференциальных уравнений

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \beta_j^2\right)\begin{Bmatrix}\tilde{A}(y, y', \alpha, \gamma)\\ \tilde{F}(y, y', \alpha, \gamma)\end{Bmatrix} = 0, \qquad (\text{П}1)$$

где $\beta_j = \sqrt{\rho^2 - k_j^2}$, $\rho^2 = \alpha^2 + \gamma^2$, $k_j = k\sqrt{\varepsilon_j}$, k — волновое число в вакууме. Уравнения (П1) справедливы при $y \neq y'$. Ищем решение в виде

$$\begin{aligned}\tilde{A}(y, y', \alpha, \gamma) &= i\omega\varepsilon_1\varepsilon_0 a(\alpha, \gamma)U_e(y, y', \alpha, \gamma),\\ \tilde{F}(y, y', \alpha, \gamma) &= b(\alpha, \gamma)U_m(y, y', \alpha, \gamma),\end{aligned} \qquad (\text{П}2)$$

где $a(\alpha, \gamma)$, $b(\alpha, \gamma)$ — неизвестные коэффициенты,

$$U_e(y, y', \alpha, \gamma) = \begin{cases} M^-(y, \alpha, \gamma)M'^+(y', \alpha, \gamma), & y \leqslant y',\\ M^+(y, \alpha, \gamma)M'^-(y', \alpha, \gamma), & y \geqslant y',\end{cases}$$

$$U_m(y, y', \alpha, \gamma) = \begin{cases} E^-(y, \alpha, \gamma)E^+(y', \alpha, \gamma), & y \leqslant y',\\ E^+(y, \alpha, \gamma)E^-(y', \alpha, \gamma), & y \geqslant y',\end{cases}$$

индексы «$\pm$» обозначают решения соответственно при $y \geqslant y'$, $y \leqslant y'$, $M'^{\pm}(y, \alpha, \gamma) = \frac{\partial}{\partial y}M^{\pm}(y, \alpha, \gamma)$, $M^{\pm}(y, \alpha, \gamma)$, $E^{\pm}(y, \alpha, \gamma)$ удовлетворяют в каждом слое уравнению (П1) и условию излучения. На границах раздела диэлектриков непрерывны функции

$$\begin{gathered} M^{\pm}(y, y', \alpha, \gamma), \quad E^{\pm}(y, y', \alpha, \gamma),\\ \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y}M^{\pm}(y, y', \alpha, \gamma), \quad \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial y}E^{\pm}(y, y', \alpha, \gamma).\end{gathered} \qquad (\text{П}3)$$

Условия непрерывности функций (П3) — следствия условий непрерывности тангенциальных компонент напряженности электрического и магнитного полей. Из (П2) видна непрерывность функций $\frac{\partial}{\partial y}\tilde{A}(y, y', \alpha, \gamma)$, $\tilde{F}(y, y', \alpha, \gamma)$ при $y = y'$. Это значит, что при $y = y'$ будут непрерывны $E_{x,z}$.

С помощью (П2) находим фурье-преобразования всех компонент электромагнитного поля. Неизвестные $a(\alpha, \gamma)$, $b(\alpha, \gamma)$ выразим через продольную компоненту плотности тока j_z

$$\begin{aligned}\mp j_{z,x} &= \tilde{H}_{x,z}(y'+0, y', \alpha, \gamma) - \tilde{H}_{x,z}(y'-0, y', \alpha, \gamma) =\\ &= -\omega\varepsilon_1\varepsilon_0 a(\alpha, \gamma)\varphi_e(\alpha, \gamma)\begin{Bmatrix}\gamma\\ -\alpha\end{Bmatrix} - \frac{1}{\omega\mu_0}b(\alpha, \gamma)\varphi_m(\alpha, \gamma)\begin{Bmatrix}\alpha\\ \gamma\end{Bmatrix},\end{aligned} \qquad (\text{П}4)$$

где

$$\varphi_e(\alpha, \gamma) = M^-(y', \alpha, \gamma)M'^+(y', \alpha, \gamma) - M^+(y', \alpha, \gamma)M'^-(y', \alpha, \gamma),$$

$$\varphi_m(\alpha, \gamma) = E'^-(y', \alpha, \gamma)E^+(y', \alpha, \gamma) - E'^+(y', \alpha, \gamma)E^-(y', \alpha, \gamma).$$

Так как $j_x = 0$, то из (П4) получим

$$a(\alpha, \gamma) = \frac{Z_{c1}}{k_1}\frac{\gamma}{\rho^2\varphi_e(\alpha, \gamma)}j_z, \quad b(\alpha, \gamma) = Z_{c1}\frac{\alpha k_1}{\rho^2\varphi_m(\alpha, \gamma)}j_z, \qquad (\text{П}5)$$

где $Z_{c1} = \sqrt{\mu_0/(\varepsilon_1\varepsilon_0)}$.

Теперь найдем выражение для $E_z(y, y', \alpha, \gamma)$ и подставим в него (П5). В результате получим

$$E_z(y, y', \alpha, \gamma) = \\ = i\frac{k_1}{Z_{c1}\rho^2}\left[\frac{\gamma^2}{\varphi_e(\alpha,\gamma)}U_e'(y, y', \alpha, \gamma) - \frac{\alpha^2 k_1^2}{\varphi_m(\alpha,\gamma}) U_m(y, y', \alpha, \gamma)\right] = \\ = i\frac{k_1}{Z_{c1}}\left[\gamma^2\tilde{G}_e(y, y', \alpha, \gamma) - k_1^2\tilde{G}_m(y, y', \alpha, \gamma)\right],$$

где

$$\tilde{G}_e(y, y', \alpha, \gamma) = \frac{1}{\rho^2}\left[\frac{U_e'(y, y', \alpha, \gamma)}{\varphi_e(\alpha,\gamma)} + \frac{k_1^2 U_m(y, y', \alpha, \gamma)}{\varphi_m(\alpha,\gamma)}\right],$$

$$\tilde{G}_m(y, y', \alpha, \gamma) = \frac{U_m(y, y', \alpha, \gamma)}{\varphi_m(\alpha,\gamma)}.$$

Полученные формулы справедливы для любого диэлектрика с плоскими границами раздела диэлектриков. Для двухслойного диэлектрика (рис. 1) нетрудно получить

$$M^+(y, \alpha, \gamma) = E^+(y, \alpha, \gamma) = \exp(-\beta_1 y), \quad y \geqslant y',$$

$$M^-(y, \alpha, \gamma) = \begin{cases} \varepsilon_1[\varepsilon_2\beta_1 \operatorname{ch}(\beta_1 y) + \varepsilon_1\beta_2 \operatorname{sh}(\beta_1 y)], & y' \geqslant y \geqslant 0, \\ \varepsilon_1\varepsilon_2\beta_1 \exp(\beta_2 y), & y \leqslant 0, \end{cases}$$

$$E^-(y, \alpha, \gamma) = \begin{cases} \beta_1 \operatorname{ch}(\beta_1 y) + \beta_2 \operatorname{sh}(\beta_1 y), & y' \geqslant y \geqslant 0, \\ \beta_1 \exp(\beta_2 y), & y \leqslant 0, \end{cases} \qquad (\text{П6})$$

$$\tilde{G}_{e,m}(y, y', \alpha, \gamma) = \frac{1}{2\beta_1} \times \\ \times \left\{\exp[-\beta_1|y - y'|] + R_{e,m}(\alpha, \gamma)\exp[-\beta_1(y + y')]\right\},$$

где

$$R_e(\alpha, \gamma) = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\frac{\beta_1(\beta_1 + \beta_2) - k_1^2}{(\beta_1 + \beta_2)(\varepsilon_2\beta_1 + \varepsilon_1\beta_2)},$$

$$R_m(\alpha, \gamma) = \frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_1 + \beta_2}.$$

При $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ имеем $R_{e,m} = 0$.

Хотя обратное преобразование Фурье первого члена (П6) по α, γ можно найти аналитически (это известная трехмерная функция Грина для диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε_1), будем использовать его интегральное представление.

Найдем теперь преобразования Фурье функции Грина, входящие в парные интегральные уравнения (4). Перейдем к переменным $x = a\cos\varphi$, $y = a + a\sin\varphi$, $x' = a\cos\varphi'$, $y' = a + a\sin\varphi'$:

$$\tilde{g}_{e,m}(\gamma) = \frac{a}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi' \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}_{e,m}(y, y', \alpha, \gamma)\exp[i\alpha(x - x')]\, d\alpha = \\ = a\left[I_0(\eta a)K_0(\eta a) + \int_0^{\infty} R_{e,m}(\alpha, \gamma) I_0^2(\eta a)\frac{\exp(-2\beta_1 a)}{\beta_1} d\alpha\right] = \\ = \tilde{g}^{(1)}(\gamma) + \tilde{g}^{(2)}_{e,m}(\gamma),$$

где $I_0(\eta a)$, $K_0(\eta a)$ — модифицированные функции Бесселя, $\eta = \sqrt{\gamma^2 - k_1^2}$.

В (2), (3) входят функции

$$g_{e,m}(z, z') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}_{e,m}(\gamma)\exp[i\gamma(z - z')]\, d\gamma.$$

Список литературы

1. *Burke P.J., Shengdong Li, Zhen Yu.* // IEEE Trans. Nanotechnology. 2006. **5**, N 4. P. 314.
2. *Hanson G.W.* // IEEE Trans. Antennas and Propagation. 2006. **54**, N 1. P. 76.
3. *Hanson G.W.* // IEEE Trans. Antennas and Propagation. 2005. **53**, N 11. P. 3426.
4. *Hao J., Hanson G.W.* // IEEE Trans. Nanotechnology. 2006. **5**, N 6. P. 766.
5. *Shuba M.V., Slepyan G.Ya., Maksimenko S.A.* // Phys. Rev. 2009. **79**. P. 155403.
6. *Attiya A.M.* // Progress In Electromagnetics Research. PIERS 94. 2009. P. 419.
7. *Hanson G.W.* // IEEE Antennas and Propagation Magazine. 2008. **50**, N 3. P. 66.
8. *Гуссейнов Э.А., Ильинский А.С.* // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1987. **27**, № 7. С. 1050.
9. *Лифанов И.К., Ненашев А.С.* // Электромагн. волны и электронные системы. 2003. **8**, № 5. С. 25.
10. *Эминов С.И.* // Радиотехника и электроника. 1993. **38**, № 12. С. 2161.
11. *Неганов В.А., Табаков Д.П., Яровой Г.П.* Современная теория и практические применения антенн. М., 2009.
12. *Клещенков А.Б., Лерер А.М., Лабунько О.С.* // Успехи соврем. радиоэлектроники. 2006. № 6. С. 60.
13. *Эминов С.И.* // Письма в ЖТФ. 2005. **31**, № 15. С. 55.
14. *Канторович Л.В.. Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. М., 1950.
15. *Pearson W.* // IEEE Trans. 1975. **AP-23**, N 3. P. 256.
16. *Butler C.M.* // IEEE Trans. 1975. **AP-23**, N 3. P. 293.
17. *Лерер А.М.. Ячменов А.А.* // Радиотехника и электроника. 2004. **49**, № 4. С. 445.
18. *Лерер А.М., Махно В.В., Ячменов А.А.* // Радиотехника и электроника. 2006. **51**, № 1. С. 46.
19. *Лерер А.М., Клещенков А.Б., Лерер В.А.* и др. // Радиотехника и электроника. 2008. **53**, № 4. С. 423.
20. *Лерер А.М., Махно В.В., Махно П.В., Шуров Г.А.* // Электромагн. волны и электронные системы. 2010. **15**. № 3. С. 64.
21. *Егоров Ю.В.* Частично заполненные прямоугольные волноводы. М., 1967.

Radio transmitting properties of carbon nanotube-vibrator located at the boundary of dielectrics

A. M. Lerer

Department of Applied Electrodynamics and Computer Modeling, Faculty of Physics, Southern Federal University, Zorge str. 5, Rostov-on-Don 344090, Russia.
E-mail: lerer@sfedu.ru.

Quantum-mechanical properties of carbon nanotube in the model are described using macroscopic parameter — surface impedance. Solving of boundary problem for the impedance vibrator is reduced to solving of paired integral equations (PIEs) in the current on the vibrator. PIEs are solved by means of Galerkin method with Chebyshev's basis. The substrate's influence on the amplitude-frequency characteristics of the carbon nanotube antenna was investigated.

Keywords: carbon nanotubes, CNT, nanotubes-vibrators, millimeter wavelength range antenna, integral equations, Galerkin method.
PACS: 84.40.Ba; 61.48.De.
Received 24 February 2010.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 5(2010).

Сведения об авторе

Лерер Александр Михайлович — докт. физ.-мат. наук, профессор, профессор; тел.: (863) 297-51-29, e-mail: lerer@sfedu.ru.