Построение точных решений модельной задачи о колебаниях вращающейся жидкости в областях с угловыми точками

С. Д. Троицкая

Институт содержания и методов обучения Российской академии образования (УРАО ИСМО). Россия, 119098, Москва, ул. Погодинская, д. 8.
E-mail: troitsks@gmail.com

Статья поступила 23.04.2010, подписана в печать 03.07.2010

Получен новый метод построения решений двумерной модельной задачи о колебаниях вращающейся идеальной жидкости в некоторых областях, содержащих угловые точки. Доказано, что эти решения соответствуют абсолютно непрерывной компоненте спектра линейного оператора, связанного с задачей.

Ключевые слова: вращающаяся жидкость, не почти периодические решения, абсолютно непрерывный спектр.

УДК: 517.9. PACS: 47.32.Ef.

Введение

Изучение поведения вращающейся жидкости представляет собой важную задачу, актуальность которой в настоящее время не только не уменьшилась, но возросла, будучи обусловленной тем, что принцип вращения жидкой среды используется для решения многих современных технических и научных проблем. Так, теория вращающихся жидкостей активно используется в геофизической гидродинамике для исследования явлений образования и распространения вихревых структур и течений в океане. В химической, пищевой, горнорудной и других отраслях промышленности вращение жидкостей применяется для осуществления процессов сепарации и исследования неоднородных смесей методом центрифугирования. Особый интерес в последнее время вызывают исследования черных дыр, в которых их поведение моделируется поведением вращающейся жидкости с ультранизкой вязкостью. Таких примеров можно привести много, но, вместе с тем, многие теоретические вопросы, связанные с поведением вращающейся идеальной несжимаемой жидкости, еще очень далеки от окончательного решения.

Движение идеальной жидкости, полностью заполняющей некоторый равномерно вращающийся закрытый сосуд Q, описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + 2\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{U} = -\nabla p, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{U} = 0, \quad \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n}|_{\partial Q} = 0, \quad (1)$$

где $\boldsymbol{k}$ — вектор оси вращения, $\boldsymbol{U}$ — отклонение поля скоростей жидкости от равномерного вращения, p — динамическое давление. Изучение качественных свойств решений этой системы, как известно, представляет собой сложную задачу (в настоящее время полностью она решена лишь для сосудов, имеющих форму прямых круговых цилиндров и эллипсоидов вращения, симметричных относительно оси вращения), и поэтому наряду с данной системой рассматривается следующая модельная двумерная задача:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v - \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -u, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z}, \quad (x, z) \in D, \quad D \subset \boldsymbol{R}^2, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, (x, z) \in D, \quad (3)$$

$$u|_{t=0} = u_0, \quad v|_{t=0} = v_0, \quad w|_{t=0} = w_0, \quad (x, z) \in D, \quad (4)$$

$$un_1 + wn_3|_{\partial D} = 0, \quad (5)$$

в которой предполагается, что компоненты скорости $\boldsymbol{U} = (u, v, w)$ и давление p зависят только от времени и двух пространственных переменных x и z, область, занимаемая жидкостью, представляет собой цилиндр $Q = \{(x, y, z) \mid (x, z) \in D, \ y \in \boldsymbol{R}\}$, $\boldsymbol{k} = (0, 0, \frac{1}{2})$ (что не ограничивает общности), $\boldsymbol{n} = (n_1, n_3)$ — вектор нормали к ∂D в плоскости Oxz. При этом для устранения произвола в определении функции давления p обычно считают, что p при всех t удовлетворяет равенству

$$\iint_D p \, dx \, dz = 0. \quad (6)$$

Одним из основных вопросов, возникающих при исследовании задачи (2)–(5), является вопрос о поведении ее решений при $t \to \infty$, которое, как известно, сильно зависит от вида области D.

Несложно показать, что соответствующая системе (2)—(5) функция тока ψ, определяемая уравнениями

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = w, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = -u, \quad (7)$$

является решением следующей задачи (см, например, [1]):

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, \quad (x, z; t) \in D \times (0, \infty), \quad (8)$$

$$\psi|_{\partial D \times (0,\infty)} = 0, \quad (9)$$

$$\psi|_{t=0} = \psi_0, \quad \psi_t|_{t=0} = \psi_1, \quad (\psi_0|_{\partial D} = 0, \psi_1|_{\partial D} = 0). \quad (10)$$

Обозначим через $\overset{\circ}{W}{}^1_2(D)$ пространство, являющееся пополнением множества $C_0^\infty(D)$ бесконечно дифференцируемых функций с носителями, содержащимися в D, в норме, порождаемой скалярным произведением

$$(f, g)_1 = \iint_D (\nabla f, \nabla \overline{g}) \, dx \, dz. \quad (11)$$

Для изучения задачи (8)–(10) естественно ввести в рассмотрение следующий оператор A, действующий в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$: на гладких функциях $h \in C_0^\infty(D)$ он определяется как решение задачи

$$\Delta(Ah) = \frac{\partial^2 h}{\partial z^2}, \quad Ah \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D), \tag{12}$$

а затем расширяется по непрерывности до ограниченного оператора в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, самосопряженного относительно скалярного произведения (11). Используя оператор A, задачу (8)–(10) можно переписать в виде абстрактной задачи Коши

$$\Psi'' = -A\Psi, \quad \Psi(0) = \Psi_0, \quad \Psi'(0) = \Psi_1, \tag{13}$$

где $t \to \Psi(x, y, t)$ — функция со значениями в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, а $\Psi_0, \Psi_1 \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ (см, например, [2]). Таким образом, получается, что первоначальная задача исследования поведения вращающейся жидкости в области D тесно связана с исследованием спектра оператора A.

Известно, что для любой области D спектром оператора A является весь отрезок $[0,1]$, однако его качественная структура сильно зависит от вида области. Исследованию свойств решений задачи (13) в зависимости от конфигурации области посвящены работы многих авторов, обширная библиография по этому и смежным вопросам имеется в [3–6]. Тем не менее и в этом модельном двумерном случае полностью эта задача исследована лишь для прямоугольников и эллипсов, симметричных относительно оси Oz: для этих областей спектр оператора A чисто точечный, а все решения задачи (2)–(5) являются почти периодическими функциями времени. Доказательство же существования таких областей, для которых эта задача имеет не почти периодические решения, а тем более построение конкретных примеров таких областей и исследование соответствующих решений уже представляет значительные трудности, поскольку приводит к необходимости исследования задачи Дирихле для гиперболического уравнения. В настоящей работе предложен новый метод построения точных решений задачи (8)–(10): подробно он рассмотрен для некоторого пространства начальных векторов в случае, когда D является треугольником:

$$D := \left\{(x,z) \mid \ 0 < x < \frac{1}{\alpha}, \ \ 0 < z < \alpha x\right\} \quad (0 < \alpha < +\infty). \tag{14}$$

Это позволяет получить представления некоторого класса решений задачи (2)–(5) в явном виде. Доказано, что эти решения соответствуют абсолютно непрерывной компоненте спектра оператора A. При этом, как становится ясно из рассуждений, данный метод легко переносится на достаточно широкий класс областей с угловыми точками (см. замечание в конце работы).

1. Спектр оператора A, дифференциальные решения

Легко видеть, что $\lambda \in (0,1)$ тогда и только тогда является собственным значением оператора A, когда гиперболическое уравнение

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0, \quad a^2 = \frac{\lambda}{1-\lambda}, \tag{15}$$

имеет по крайней мере одно нетривиальное обобщенное решение $\psi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$. Из работ автора [7, 8] следует, что для рассматриваемой области D таких решений нет, и спектр оператора A является чисто непрерывным: $\sigma(A) = \sigma_c(A)$. Поэтому если E_λ — спектральная функция оператора A, а h — произвольный элемент пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, то функция $(E_\lambda h, h)_1$ непрерывна на $[0,1]$.

В области D рассмотрим гиперболическое уравнение (15). Его характеристики вида $x = az + c'$ будем называть характеристиками первого семейства, а характеристики вида $x = -az + c''$ — второго. Зафиксируем произвольное значение $\lambda \in (0, (1+\alpha^2)^{-1})$. Определим следующие бесконечные ломаные, задав закон отражения лучей характеристических направлений от границы. Предположим, что луч, выпущенный из точки $B(1/\alpha, 1)$ в направлении первого семейства характеристик внутрь области D, встречая границу ∂D, отражается от нее и следует далее внутрь D уже в направлении характеристик второго семейства, затем снова, достигая границы ∂D, отражается от нее и следует вдоль характеристик первого семейства, и так далее. Предположим также, что луч, выпущенный из точки $A(1,0)$ в направлении первого семейства характеристик внутрь области D, ведет себя аналогично при отражении от ∂D. Заметим, что при рассматриваемых значениях $\lambda \in (0, (1+\alpha^2)^{-1})$ оба луча при этом локализуются в углу с вершиной O. Ломаные, представляющие собой траекториями этих лучей, разбивают D на бесконечное число треугольников T_λ^i и параллелограммов P_λ^i. Обозначим вершины этих ломаных, лежащие на отрезке $[OB]$, через B_λ^i, вершины, лежащие на отрезке $[OA]$, — через A_λ^i, а внутренние точки их пересечений — через C_λ^i, $i = 1, 2, \ldots$, нумеруя их по порядку в направлении от отрезка $[AB]$ к точке $O(0,0)$ (рис. 1).

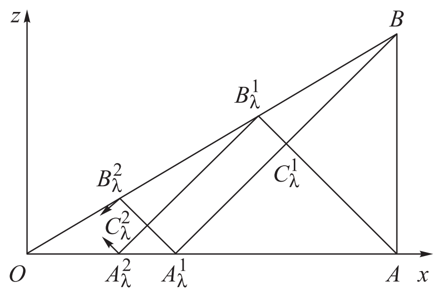

Рис. 1. Разбиение области D

Пусть $\theta_1 \in L_2(0,1)$ — произвольная функция. По этой функции в треугольнике ABC_λ^1 построим такое обобщенное решение $\psi_0(x,z,\lambda) \in W_2^1(ABC_\lambda^1)$ уравнения (15), что

$$\psi_0|_{AB} = 0, \quad \frac{\partial\psi_0}{\partial x}\Big|_{AB} = \theta_1.$$

Из работы [11] следует, что такое решение ψ_0 существует и единственно. Далее, используя функцию ψ_0, в треугольнике $BC^1_\lambda B^1_\lambda$ построим такое обобщенное решение $\psi_1(x,z,\lambda) \in W^1_2(BC^1_\lambda B^1_\lambda)$ уравнения (15), что

$$\psi_1|_{BC^1_\lambda} = \psi_0|_{BC^1_\lambda}, \quad \psi_1|_{BB^1_\lambda} = 0.$$

Существование и единственность ψ_1 следует из работы [8]. Затем, используя функции ψ_0 и ψ_1, в треугольнике $AB^1_\lambda A^2_\lambda$ построим такое обобщенное решение $\psi_2(x,z,\lambda) \in W^1_2(AB^1_\lambda A^2_\lambda)$ уравнения (15), что

$$\psi_2|_{AC^1_\lambda} = \psi_0|_{AC^1_\lambda}, \quad \psi_2|_{C^1_\lambda B^1_\lambda} = \psi_1|_{C^1_\lambda B^1_\lambda}, \quad \psi_2|_{AA^2_\lambda} = 0.$$

И так далее. Пусть

$$\psi(x,z;\theta_1;\lambda) := \begin{cases} \psi_0(x,z,\lambda) & \text{при } (x,z) \in \triangle ABC^1_\lambda, \\ \psi_1(x,z,\lambda) & \text{при } (x,z) \in \triangle BC^1_\lambda B^1_\lambda, \\ \psi_2(x,z,\lambda) & \text{при } (x,z) \in \triangle AB^1_\lambda A^2_\lambda, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \tag{16}$$

Несложно показать, что для любой $\theta_1 \in L_2(0,1)$ и для всех $\lambda \in (0, (1+\alpha^2)^{-1})$ построенная таким образом функция $\psi(x,z;\theta_1;\lambda)$ обладает следующими свойствами:

а) функция $\psi(x,z;\theta_1;\lambda)$ принадлежит $L_2(D)$ и является обобщенным решением уравнения (15);

б) для любого $0<\varepsilon<1$ функция $\psi(x,z;\theta_1;\lambda)$ принадлежит пространству $W^1_2(D \cap \{x>\varepsilon\})$;

в) для любой гладкой кривой $\boldsymbol{r}(t) := \{x(t), z(t), \lambda(t)\}$, $t \in [t_0, t_1]$, лежащей в области $D \times (0, (1+\alpha^2)^{-1})$, функция $\psi(x(t), z(t); \theta_1; \lambda(t))$ абсолютно непрерывна на $[t_0,t_1]$;

г) для почти всех $x \in (0, 1/\alpha)$ определены $\psi'_x(x,\alpha x;\theta_1;\lambda)$, $\psi'_z(x,\alpha x;\theta_1;\lambda)$, $\psi'_x(x,0;\theta_1;\lambda)$, $\psi'_z(x,0;\theta_1;\lambda)$ и для любого $0<\varepsilon<1/\alpha$ существует постоянная C_ε, не зависящая от θ_1, такая, что

$$\|\psi'_x(x,\alpha x;\theta_1;\lambda)\|_{L_2(\varepsilon,1/\alpha)} \leqslant C_\varepsilon \|\theta_1\|_{L_2},$$
$$\|\psi'_z(x,\alpha x;\theta_1;\lambda)\|_{L_2(\varepsilon,1/\alpha)} \leqslant C_\varepsilon \|\theta_1\|_{L_2},$$
$$\|\psi'_x(x,0;\theta_1;\lambda)\|_{L_2(\varepsilon,1/\alpha)} \leqslant C_\varepsilon \|\theta_1\|_{L_2},$$
$$\|\psi'_z(x,0;\theta_1;\lambda)\|_{L_2(\varepsilon,1/\alpha)} \leqslant C_\varepsilon \|\theta_1\|_{L_2}.$$

Построенная таким образом функция $\psi(x,z;\theta_1;\lambda)$, как легко видеть, является некоторым нетривиальным решением задачи Дирихле для гиперболического уравнения (15), но она не принадлежит пространству $\overset{\circ}{W}{}^1_2(D)$ (имеет сингулярность в точке $O(0,0)$), а потому не является собственной функцией оператора A и не порождает решения изучаемой начально-краевой задачи (2)–(5). При этом оказывается, что если ее проинтегрировать по спектральному параметру λ, то полученная функция уже принадлежит пространству $\overset{\circ}{W}{}^1_2(D)$.

А именно пусть $0<\lambda_*<\lambda_{**}<(1+\alpha^2)^{-1}$ и пусть функция $\sigma(\mu) \in C^1[\lambda_*, \lambda_{**}]$. Тогда для любых λ_1, λ_2, таких, что $\lambda_* \leqslant \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \lambda_{**}$, функция

$$\Upsilon(x,z;\theta_1;\sigma) := \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sigma(\mu)\psi(x,z;\theta_1;\mu)\,d\mu \tag{17}$$

принадлежит пространству $\overset{\circ}{W}{}^1_2(D)$, и справедлива следующая оценка:

$$\|\Upsilon(x,z;\theta_1;\sigma)\|_1 \leqslant M(\lambda_2-\lambda_1)\|\theta_1\|_{L_2}, \tag{18}$$

где M не зависит от λ_1, λ_2, θ_1.

Последний факт удивителен, и именно он является ключевым моментом в настоящей работе, поскольку эта новая функция и позволяет впоследствии строить точные решения задачи (2)—(5). Перейдем к основным моментам его доказательства.

Для того чтобы доказать, что $\Upsilon(x,z;\theta_1;\sigma) \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(D)$ в силу свойства *б*, достаточно показать, что

$$\|\Upsilon'_x\|_{L_2(\mathcal{D}_2)} < \infty, \quad \|\Upsilon'_z\|_{L_2(\mathcal{D}_2)} < \infty,$$

где $\mathcal{D}_2 := D \cap \{a_2 z > x + a_2 - \frac{1}{\alpha}\}$, $a_2 = \sqrt{\frac{\lambda_2}{1-\lambda_2}}$. Для $(x,z) \in \mathcal{D}_2$ при всех $\mu \in [\lambda_1, \lambda_2]$ по формуле Римана имеем (см. [7])

$$\psi(x,z;\theta_1;\mu) = \frac{\sqrt{\mu}}{2\sqrt{1-\mu}} \int\limits_{P(x,z;\mu)}^{Q(x,z;\mu)} \varphi(x',\mu)\,dx', \tag{19}$$

где

$$\varphi(x,\mu) := \left(\alpha\psi'_x + \frac{1-\mu}{\mu}\psi'_z\right)\Big|_{z=\alpha x}, \tag{20}$$

а $P(x,z;\mu)$ и $Q(x,z;\mu)$ — абсциссы правого и левого углов характеристического треугольника с вершиной в точке (x,z), соответствующего значению $\lambda=\mu$ и опирающегося на OB. Несложно установить, что

$$\begin{aligned} P(x,z;\mu) &= \frac{\alpha x - z}{2\alpha} l + \frac{\alpha x + z}{2\alpha}, \\ Q(x,z;\mu) &= \frac{\alpha x + z}{2\alpha} + \frac{\alpha x - z}{2\alpha l}, \end{aligned} \tag{21}$$

где

$$l = l(\mu) := \frac{\sqrt{1-\mu}+\alpha\sqrt{\mu}}{\sqrt{1-\mu}-\alpha\sqrt{\mu}} \tag{22}$$

— строго монотонно возрастающая на интервале $(0, (1+\alpha^2)^{-1})$ функция, принимающая значения из интервала $(1, +\infty)$, поэтому

$$l(\mu) > 1 \quad \text{для всякого} \quad \mu \in [\lambda_1, \lambda_2]. \tag{23}$$

Таким образом, для $(x,z) \in \mathcal{D}_2$ имеем

$$\Upsilon(x,z;\theta_1;\sigma) = \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\sigma(\mu)\sqrt{\mu}}{2\sqrt{1-\mu}} \left\{ \int\limits_{P(x,z;\mu)}^{Q(x,z;\mu)} \varphi(\tilde{x},\mu)\,d\tilde{x} \right\} d\mu,$$

поэтому

$$\begin{aligned} &\|\Upsilon'_x\|^2_{L_2(\mathcal{D}_2)} = \\ &= \iint\limits_{\mathcal{D}_2} \left| \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\sigma(\mu)\sqrt{\mu}}{2\sqrt{1-\mu}} \{Q'_x\varphi(Q,\mu) - P'_x\varphi(P,\mu)\}\,d\mu \right|^2 dx\,dz \leqslant \\ &\leqslant 2\iint\limits_{\mathcal{D}_2} \left| \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\sigma(\mu)\sqrt{\mu}}{2\sqrt{1-\mu}} P'_x\varphi(P,\mu)\,d\mu \right|^2 dx\,dz + \\ &+ 2\iint\limits_{\mathcal{D}_2} \left| \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\sigma(\mu)\sqrt{\mu}}{2\sqrt{1-\mu}} Q'_x\varphi(Q,\mu)\,d\mu \right|^2 dx\,dz. \end{aligned} \tag{24}$$

Доказательство существования этих интегралов для любой функции $\theta_1 \in L_2(0,1)$ и любой $\sigma(\mu) \in C^1[\lambda_*, \lambda_{**}]$

основано на том факте, что множество всех кусочно-постоянных функций, заданных на интервале $(0,1)$, таких, что концы интервалов постоянства являются рациональными числами, всюду плотно в $L_2(0,1)$, поэтому если в качестве $\theta_1(x)$ взять функцию

$$\theta_{1,n}(x)=\begin{cases}\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_i, \quad \frac{i-1}{n}<x<\frac{i}{n}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\end{cases} \tag{25}$$

где $c_i \in \boldsymbol{C}$ — некоторые числа, $i=1,2,\dots,n$, то функцию φ можно предъявить в явном виде. Это позволяет установить, что

$$\iint\limits_{\mathcal{D}_2}\left|\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2}\sigma(\mu)\frac{\partial P}{\partial x}(x,z;\mu)\varphi(P(x,z;\mu),\mu)\,d\mu\right|^2 dx\,dz \leqslant$$
$$\leqslant C_1(l_2-l_1)^2\|\theta_1(x)\|^2_{L_2}.$$

где C_1 — некоторая константа. Очевидно, что для второго интеграла в (24) имеет место аналогичная оценка, поэтому

$$\|V'_x\|^2_{L_2(\mathcal{D}_2)} \leqslant C_2(\lambda_2-\lambda_1)^2\|\theta_1(x)\|^2_{L_2}, \tag{26}$$

где C_2 не зависит от $\theta_1, \lambda_1, \lambda_2$, откуда следует, что функция $\Upsilon(x,z;\theta_1;\sigma)$ принадлежит пространству $\overset{\circ}{W}{}^1_2(D)$.

Для доказательства же заявленной оценки для ее нормы в $\overset{\circ}{W}{}^1_2(D)$ оценим теперь величину $\|\Upsilon'_x\|^2_{L_2(D\setminus\overline{\mathcal{D}_2})}$. Пусть $M(x,z)\in\{D\setminus\overline{\mathcal{D}_2}\}$, т.е. $M(x,z)\in\triangle AA_{\lambda_2}B$ (рис. 2).

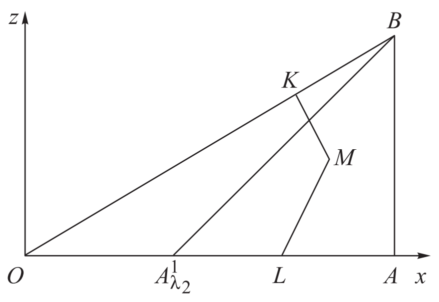

Рис. 2. Многоугольник $T(x,z,\lambda)$

Через эту точку проведем характеристику уравнения (15) первого семейства до пересечения с отрезком OA и полученную точку пересечения обозначим через $L(x-az;0)$. Затем через точку $M(x,z)$ проведем характеристику второго семейства до пересечения с отрезком OB и полученную точку пересечения обозначим через $K\left(\frac{x+az}{1+a\alpha};\alpha\frac{x+az}{1+a\alpha}\right)$. Заметим, что из свойств *б, в, г* функции $\psi(x,z;\theta_1;\lambda)$ следует, что для многоугольника $T(x,z,\lambda)$ с вершинами в точках M,K,B,A,L выполнено

$$\int\limits_{\partial T(x,z;\lambda)}\frac{\partial\psi}{\partial x}\,dz+\frac{1}{a^2}\,\frac{\partial\psi}{\partial z}\,dx=$$
$$=\iint\limits_{T(x,z;\lambda)}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)dx\,dz=0.$$

Отсюда следует равенство

$$\psi|_M=\psi(x,z;\theta_1;\lambda)= \tag{27}$$
$$=-\frac{a}{2}\int\limits_{x-az}^{1/\alpha}\varphi_0(t,\lambda)\,dt+\frac{a}{2}\int\limits_A^B\theta_1(t)\,dt+\frac{a}{2}\int\limits_{1/\alpha}^{(x+az)/(1+a\alpha)}\varphi(t,\lambda)\,dt,$$

где $\varphi_0(t,\lambda):=\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial\psi}{\partial z}\Big|_{z=0}$. Поэтому для почти всех $(x,z)\in\{D\setminus\overline{\mathcal{D}_2}\}$

$$\Upsilon'_x=\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2}\psi(x,z;\theta_1;\lambda)'_x\,d\lambda= \tag{28}$$
$$=\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2}\frac{a}{2}\left(\varphi_0(x-az,\lambda)+\frac{1}{1+a\alpha}\varphi\left(\frac{x+az}{1+a\alpha},\lambda\right)\right)d\lambda.$$

Тогда

$$\|\Upsilon'_x\|^2_{L_2(D\setminus\overline{\mathcal{D}_2})}=\iint\limits_{D\setminus\overline{\mathcal{D}_2}}\left\{\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2}\frac{a}{2}\Bigg(\varphi_0(x-az,\lambda)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{1+a\alpha}\varphi\left(\frac{x+az}{1+a\alpha},\lambda\right)\Bigg)d\lambda\right\}^2 dx\,dz\leqslant$$
$$\leqslant(\lambda_2-\lambda_1)\iint\limits_{D\setminus\overline{\mathcal{D}_2}}\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2}\frac{a^2}{4}\Bigg|\varphi_0(x-az,\lambda)+$$
$$+\frac{1}{1+a\alpha}\varphi\left(\frac{x+az}{1+a\alpha},\lambda\right)\Bigg|^2 d\lambda\,dx\,dz\leqslant$$
$$\leqslant M_0(\lambda_2-\lambda_1)\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2}\Bigg\{\iint\limits_{D\setminus\overline{\mathcal{D}_2}}|\varphi_0(x-az,\lambda)|^2+$$
$$+\left|\varphi\left(\frac{x+az}{1+a\alpha},\lambda\right)\right|^2 dx\,dz\Bigg\}d\lambda\leqslant$$
$$\leqslant M_1(\lambda_2-\lambda_1)\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2}\left\{\|\varphi_0\|^2_{L_2(A^1(\lambda_2)A)}+\|\varphi\|^2_{L_2(B^2(\lambda_2)B)}\right\}d\lambda\leqslant$$
$$\leqslant M_2(\lambda_2-\lambda_1)^2\|\theta_1\|^2_{L_2}, \tag{29}$$

где положительные константы M_i, $i=0,1,2$, не зависят от λ_1, λ_2 и θ_1. Принимая во внимание (26), получаем

$$\|\Upsilon'_x\|^2_{L_2(D)}\leqslant M_3(\lambda_2-\lambda_1)^2\|\theta_1\|^2_{L_2},$$

где постоянная M_3 не зависит от λ_1, λ_2 и θ_1. Очевидно, что для $\|\Upsilon'_z\|^2_{L_2(D\setminus\overline{\mathcal{D}_2})}$ имеет место аналогичная оценка.

Итак, оценка (18) доказана. Посмотрим теперь, что это дает для исследования структуры спектра оператора A.

Определим функцию

$$\Psi(x,z;\theta_1;\sigma;\lambda) := \begin{cases} \mathbf{0} & \text{при } \lambda \leqslant \lambda_*, \\ \int\limits_{\lambda_*}^{\lambda} \sigma(\mu)\psi(x,z;\theta_1;\mu)\,d\mu & \text{при } \lambda_* < \lambda \leqslant \lambda_{**}, \\ \int\limits_{\lambda_*}^{\lambda_{**}} \sigma(\mu)\psi(x,z;\theta_1;\mu)\,d\mu & \text{при } \lambda_{**} < \lambda, \end{cases} \qquad (30)$$

где $\mathbf{0}$ — нулевой элемент пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$.

Из доказанного выше следует непрерывность и даже абсолютная непрерывность по λ функции $\|\Psi(x,z;\theta_1;\sigma;\lambda)\|_1$.

Докажем теперь, что при любых $\lambda_1, \lambda_2 \in (0, (1+\alpha^2)^{-1})$ справедливо равенство

$$A\left(\Psi(\lambda_2) - \Psi(\lambda_1)\right) = \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \lambda\, d\Psi(\lambda). \qquad (31)$$

Так как $\Psi(x,z;\theta_1;\sigma;\lambda_2) - \Psi(x,y;\theta_1;\sigma;\lambda_1) = \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sigma(\lambda)\psi(x,z;\theta_1;\lambda)\,d\lambda$, а $d\Psi(x,z;\theta_1;\sigma;\lambda) = \sigma(\lambda)\cdot\psi(x,z;\theta_1;\lambda)\,d\lambda$, то наша задача — доказать равенство

$$A\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sigma(\lambda)\psi(x,z;\theta_1;\lambda)\,d\lambda = \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \lambda\,\sigma(\lambda)\psi(x,z;\theta_1;\lambda)\,d\lambda,$$

или, что равносильно, после применения к обеим его частям оператора Лапласа доказать равенство

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sigma(\lambda)\psi(x,z;\theta_1;\lambda)\,d\lambda = \Delta\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \lambda\sigma(\lambda)\psi(x,z;\theta_1;\lambda)\,d\lambda$$

в пространстве $W_2^{-1}(D)$. Это означает, что для произвольной $g \in C_0^\infty(D)$ надо доказать, что

$$\iint\limits_D \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2}\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sigma(\lambda)\psi(x,z;\theta_1;\lambda)\,d\lambda\cdot g - \Delta\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \lambda\sigma(\lambda)u(x,y;\theta_1;\lambda)\,d\lambda\cdot g \right\} dx\,dz = 0.$$

Поскольку по построению функция $\sigma(\lambda)\psi(x,z;\theta_1;\lambda) \in W_2^1(D\cap\{x>\varepsilon\})$, $\varepsilon>0$, является обобщенным решением уравнения (15), то для любой $g\in C_0^\infty(D)$ имеем

$$\iint\limits_D \sigma\psi\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}\,dx\,dz = \lambda\iint\limits_D \sigma\psi\Delta g\,dx\,dz.$$

Поэтому

$$\iint\limits_D \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2}\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sigma(\lambda)\psi(x,z;\theta_1;\lambda)\,d\lambda\cdot g - \Delta\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \lambda\sigma(\lambda)\psi(x,z;\theta_1;\lambda)\,d\lambda\cdot g \right\} dx\,dz =$$

$$= \iint\limits_D \left\{ \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sigma(\lambda)\psi(x,z;\theta_1;\lambda)\,d\lambda\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial z^2} - \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \lambda\sigma(\lambda)\psi(x,z;\theta_1;\lambda)\,d\lambda\cdot\Delta g \right\} dx\,dz =$$

$$= \iint\limits_D \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left\{ \sigma(\lambda)\psi(x,z;\theta_1;\lambda)\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial z^2} - \lambda\sigma(\lambda)\psi(x,z;\theta_1;\lambda)\cdot\Delta g \right\} d\lambda\,dx\,dz =$$

$$= \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \iint\limits_D \left\{ \sigma(\lambda)\psi(x,z;\theta_1;\lambda)\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial z^2} - \lambda(\lambda)\,\psi(x,z;\theta_1;\lambda)\cdot\Delta g \right\} dx\,dz\,d\lambda = 0.$$

Доказанное означает, что существует такой вектор $h \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, что $\Psi(\lambda) = E_\lambda h$, где E_λ — спектральная функция оператора A, т.е. $\Psi(\lambda)$ является дифференциальным решением спектрального уравнения для оператора A (см. [10]).

Далее, пусть $\theta_2(x) \in L_2(0, 1/\alpha)$ — произвольная функция. Аналогично тому как для $\lambda \in (0, (1+\alpha^2)^{-1})$ была построена функция $\psi(x,z;\theta_1;\lambda)$, построим функцию $\chi(x,z;\theta_2;\lambda)$ для $\lambda \in ((1+\alpha^2)^{-1}, 1)$: функция χ является обобщенным решением уравнения (15), принадлежащим $W_2^1(D\cap\{z<1-\varepsilon\})$ для любого $0<\varepsilon<1$ и удовлетворяющим соотношениям $\chi|_{\partial D}=0$ и $\chi_z|_{[OA]} = \theta_2$. Рассмотрим функцию

$$\tau(x,z;\lambda) := \begin{cases} \psi(x,z;\theta_1;\lambda) & \text{при } 0<\lambda<(1+\alpha^2)^{-1}, \\ \chi(x,z;\theta_2;\lambda) & \text{при } (1+\alpha^2)^{-1}<\lambda<1. \end{cases} \qquad (32)$$

Из предыдущих рассуждений следует, что если $\sigma(\lambda)$ — произвольная функция из $C^1(0,1)$, такая что ее носитель $\operatorname{supp}\sigma$ лежит в объединении интервалов $(0, (1+\alpha^2)^{-1})$ и $((1+\alpha^2)^{-1}, 1)$, то функция

$$\Psi(x,z;\lambda) := \int\limits_0^{\lambda} \sigma(\mu)\tau(x,z;\mu)d\mu, \quad \lambda\in[0,1], \qquad (33)$$

со значениями в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1$ является дифференциальным решением спектрального уравнения для оператора A.

Более того, если теперь через H_0 обозначить замыкание линейной оболочки всех дифференциальных решений спектрального уравнения для оператора A вида (33), то из доказанного выше следует, что на H_0 спектр оператора A абсолютно непрерывен: $\sigma(A|_{H_0}) = \sigma_{ac}(A|_{H_0})$.

2. Решения задачи (2)–(5)

С помощью построенных выше дифференциальных решений $\Psi(x,z;\lambda)$ вида (33) можно теперь выписать точные решения задач (8)–(10) и (2)–(5). А именно пусть

$$\widetilde{\psi}_0(x,z) := \int_0^1 \sigma_0(\lambda)\tau_0(x,z;\lambda)\,d\lambda,$$
$$\widetilde{\psi}_1(x,z) := \int_0^1 \sigma_1(\lambda)\tau_1(x,z;\lambda)\,d\lambda, \qquad (34)$$

где τ_0, τ_1 построены описанным выше способом по функциям $\theta_1^{(0)}$, $\theta_2^{(0)}$, $\theta_1^{(1)}$, $\theta_2^{(1)}$ соответственно, а носители $\operatorname{supp}\sigma_i$ лежат в объединении интервалов $(0,\,(1+\alpha^2)^{-1})$ и $((1+\alpha^2)^{-1},\,1)$. Тогда функция

$$\widetilde{\psi}(x,z;t) := \int_0^1 \cos\left(\sqrt{\lambda}\,t\right)\sigma_0(\lambda)\tau_0(x,z;\lambda)\,d\lambda + \int_0^1 \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda}\,t\right)}{\sqrt{\lambda}}\sigma_1(\lambda)\tau_1(x,z;\lambda)\,d\lambda, \qquad (35)$$

является решением задачи (8)–(10), причем $\|\widetilde{\psi}(x,z;t)\|_{L_2(D)} \to 0$ при $t\to\infty$.

Здесь в пояснении нуждается лишь последнее утверждение: поскольку на H_0 спектр оператора A абсолютно непрерывен, то для всякого элемента g пространства $\mathring{W}_2^1(D)$ функция $(\widetilde{\psi},g)_1$ стремится к нулю при $t\to\infty$, откуда уже следует убывание L_2-нормы этого решения. И наконец, теперь мы можем предъявить класс точных решений исходной модельной задачи (2)–(5), описывающей колебания вращающейся жидкости. Пусть

$$u_0(x,z) = -\int_0^1 \sigma_0(\lambda)\frac{\partial\tau_0}{\partial z}(x,z;\lambda)\,d\lambda,$$
$$w_0(x,z) = \int_0^1 \sigma_0(\lambda)\,\frac{\partial\tau_0}{\partial x}(x,z;\lambda)\,d\lambda,$$

$v_0(x,z)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial v_0}{\partial z} = -\Delta\int_0^1 \sigma_1(\lambda)\tau_1(x,z;\lambda)\,d\lambda, \qquad (36)$$

тогда вектор-функция $U := (u,v,w)$, где

$$u = -\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial z}, \quad v = \int_0^t \frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial z}(x,z;s)\,ds + v_0(x,z), \quad w = \frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial x}, \qquad (37)$$

является решением задачи (2)–(5).

Несложно заметить, что функция $v_0(x,z)$ определяется из (36) с точностью до слагаемого $v_*(x)$. При этом функция гидродинамического давления $p(x,z,t)$ с точностью до слагаемого $p_*(x) = \int v_*(x)\,dx$ может быть найдена из системы

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \int_0^t \frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial z}(x,z;s)\,ds + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial z} + v_0(x,z), \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial x}. \qquad (38)$$

Таким образом, с точностью до стационарных решений задачи, мы получили явные представления для компонент скорости вращающейся жидкости в исследуемом модельном случае.

В заключение отметим, что предложенный метод построения точных решений задачи (2)–(5) может быть использован для некоторого достаточно широкого класса областей с угловыми точками. Пусть, к примеру, D является «криволинейным треугольником», стороны OA и OB которого являются некоторыми гладкими кривыми, пересекающимися в точке O под ненулевым углом. Если при всех $\lambda\in(\lambda',\lambda'')$ лучи характеристических направлений, закон отражения от границы которых описан в разд. 1, локализуются в углу с вершиной O, то на этом интервале (λ',λ'') можно построить дифференциальные решения спектрального уравнения для оператора A аналогично тому, как это было сделано в разд. 1, и соответствующие им решения нестационарной задачи (8)–(10).

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке "Программы поддержки научного потенциала высшей школы"(грант РНП 2.1.1.5031).

Список литературы

1. *Ralston J.V.* // J. of Math. Anal. and Appl. 1973. **44**, N 2. P. 366.
2. *Зеленяк Т.И.* Избранные вопросы качественной теории уравнений с частными производными. Новосибирск, 1970.
3. *Александрян Р.А., Березанский Ю.Н., Ильин В.А., Костюченко А.Г.* // Труды симпозиума, посвященного 60-летию акад. С.Л. Соболева. М., 1970. С. 3.
4. *Гринспэн Х.* Теория вращающихся жидкостей. Л., 1975.
5. *Маслов В.П.* // Сиб. матем. журн. 1968. **9**, № 6. С. 1351.
6. *Фокин М.В.* Гамильтоновы системы и малые колебания вращающейся идеальной жидкости // Препринт РАН. Сиб. отделение. Ин-та математики. 1995. № 20.
7. *Троицкая С.Д.* // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. **58**, № 4. С. 97.
8. *Троицкая С.Д.* // Матем. заметки. 1999. **63**, № 2. С. 128.
9. *Greenspan H.P.* // Stud. Appl. Math. 1969. **48**. P. 19.
10. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. М., 1959.
11. *Троицкая С.Д.* // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. **62**, № 2. С. 193.
12. *Троицкая С.Д.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2010. № 6. С. 21.
13. *Aldridge K.D., Toomre A.* // J. Fluid Mech. 1969. **37**, N 2. P. 307.
14. *Morize C., Moisy F.* // Phys. Fluids. 2006. **18**. P. 065107.

Construction of exact solutions of a model problem on oscillations of a rotating fluid in domains with angular points

S. D. Troitskaya

Institute for Content and Methods of Education, Russian Academy of Education, Pogodinskaya str. 8, Moscow 119098, Russia.
E-mail: troitsks@gmail.com.

A new method of construction of solutions of a two-dimensional model problem on oscillations of an ideal rotating fluid in some domains containing angular points is developed. It is proved that these solutions correspond to the absolutely continuous component of spectrum of a linear operator related to the problem.

Keywords: rotating fluid, non almost-periodical solutions, absolutely continuous spectrum.
PACS: 47.32.Ef.
Received 23 April 2010.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 6(2010).

Сведения об автору

Троицкая Сауле Джумабековна — канд. физ.-мат. наук, доцент, вед. науч. сотр.; тел.: (499) 246-32-48, e-mail: troitsks@gmail.com.