Свойства решений модельной задачи о колебаниях вращающейся жидкости в областях с угловыми точками

С. Д. Троицкая

Институт содержания и методов обучения Российской академии образования (УРАО ИСМО). Россия, 119098, Москва, ул. Погодинская, д. 8.
E-mail: troitsks@gmail.com

Статья поступила 21.05.2010, подписана в печать 15.06.2010

Исследовано поведение при $t \to \infty$ решений двумерной модельной задачи о колебаниях вращающейся идеальной жидкости в некоторых областях, содержащих угловые точки. Доказано, что существуют такие решения, вся энергия начального состояния которых со временем оказывается почти полностью сосредоточенной в сколь угодно малых окрестностях угловых точек.

Ключевые слова: вращающаяся жидкость, не почти периодические решения, распределение энергии.
УДК: 517.9. PACS: 47.32.Ef.

Введение

Изучение поведения вращающейся жидкости представляет собой важную задачу, актуальность которой в настоящее время не только не уменьшилась, но и возросла, что обусловлено целым рядом обстоятельств. Во-первых, в «классических» областях применения, таких, как геофизическая гидродинамика, существенно развились средства и системы сбора и обработки данных, что продвинуло задачи исследования образования и распространения вихревых потоков и течений гораздо ближе к задачам оперативного прогнозирования. Во-вторых, развитие физической науки привело к интенсивным теоретическим и экспериментальным исследованиям в таких областях, как астрофизика, физика высоких энергий, общая теория относительности и квантовая космология, где модель вращающейся жидкости является одной из главных. Наконец, задачи, рассматриваемые в технике, связанные, например, с центрифугированием, по-прежнему остаются актуальными. Вместе с тем многие теоретические вопросы, связанные с поведением вращающейся идеальной несжимаемой жидкости, еще очень далеки от окончательного решения.

В настоящей работе изучается поведение при $t \to \infty$ некоторого класса решений следующей двумерной модельной задачи о колебаниях идеальной жидкости, вращающейся вокруг оси Oz:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v - \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -u, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z}, \quad (x,z) \in D, \quad D \subset \boldsymbol{R}^2, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (x,z) \in D, \tag{2}$$

$$u|_{t=0} = u_0, \quad v|_{t=0} = v_0, \quad w|_{t=0} = w_0, \quad (x,z) \in D, \tag{3}$$

$$un_1 + wn_3|_{\partial D} = 0. \tag{4}$$

Предполагается, что область, занимаемая жидкостью, представляет собой цилиндр $Q = \{(x,y,z) | (x,z) \in D, y \in \boldsymbol{R}\}$, где область D является треугольником:

$$D := \left\{(x,z) \mid 0 < x < \frac{1}{\alpha}, \; 0 < z < \alpha x\right\} \quad (0 < \alpha < +\infty), \tag{5}$$

отклонение поля скоростей жидкости от равномерного вращения $\boldsymbol{U} = (u,v,w)$ и динамическое давление p зависят только от времени t и двух пространственных переменных x и z, $\boldsymbol{n} = (n_1, n_3)$ — вектор нормали к ∂D в плоскости Oxz, а функция p при всех t удовлетворяет равенству $\iint\limits_D p\,dx\,dz = 0$.

Исследуемый класс решений в явном виде построен в работе [1] с помощью интегральных представлений функции тока ψ, соответствующей данной системе. В настоящей работе показано, что при некотором выборе вектора начального возмущения отклонения компонент скорости u, v, w жидкости от равномерного вращения при $t \to \infty$ стремятся к нулю в каждой внутренней точке области, занимаемой жидкостью, при этом доля энергии той части жидкости, которая находится вне сколь угодно малых окрестностей ребер цилиндра Q, соответствующих вершинам острых углов треугольника D, стремится к нулю при увеличении t.

В дальнейшем мы будем использовать обозначения, введенные в [1].

1. О свойствах гладких решений задачи (1)–(4)

В области D рассмотрим гиперболическое уравнение

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, \quad a^2 = \frac{\lambda}{1-\lambda}. \tag{6}$$

Его характеристики вида $x = az + c'$ будем называть характеристиками первого семейства, а характеристики вида $x = -az + c''$ — второго. Зафиксируем произвольное значение $\lambda \in (0, (1+\alpha^2)^{-1})$. Определим следующие бесконечные ломаные, задав закон отражения лучей характеристических направлений от границы. Предположим, что луч, выпущенный из точки $B(1/\alpha, 1)$ в направлении первого семейства характеристик внутрь области D, встречая границу ∂D, отражается от нее и следует далее внутрь D уже в направлении характеристик второго семейства. Затем снова, достигая границы ∂D, отражается от нее и следует вдоль характеристик первого семейства, и так далее. Предположим также, что луч, выходящий из точки $A(1,0)$ в направлении первого семейства характеристик внутрь области D, ведет себя аналогично при отражении от ∂D. Заметим, что при рассматриваемых значениях $\lambda \in (0, (1+\alpha^2)^{-1})$ оба луча при этом локализуются в углу с вершиной O. Ломаные, являющиеся траекториями этих лучей, разбивают D на бесконечное число треугольников T_λ^i и параллелограммов P_λ^i. Обозначим вершины этих ломаных, лежащие на отрезке $[OB]$, через B_λ^i, вершины, лежащие на отрезке $[OA]$, — через A_λ^i, а внутренние точки их пересечений — через C_λ^i, $i = 1, 2, \ldots$, нумеруя их по порядку в направлении от отрезка $[AB]$ к точке $O(0,0)$.

Пусть $\theta_1 \in L_2(0,1)$ — произвольная функция. По этой функции в треугольнике ABC_λ^1 построим такое обобщенное решение $\psi_0(x,z,\lambda) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(ABC_\lambda^1)$ уравнения (6), что

$$\psi_0|_{AB} = 0, \quad \frac{\partial \psi_0}{\partial x}\Big|_{AB} = \theta_1.$$

Из работы [6] следует, что такое решение ψ_0 существует и единственно. Далее, используя функцию ψ_0, в треугольнике $BC_\lambda^1 B_\lambda^1$ построим такое обобщенное решение $\psi_1(x,z,\lambda) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(BC_\lambda^1 B_\lambda^1)$ уравнения (6), что $\psi_1|_{BC_\lambda^1} = \psi_0|_{BC_\lambda^1}$, $\psi_1|_{BB_\lambda^1} = 0$. Существование и единственность ψ_1 следует из работы [3]. Затем, используя функции ψ_0 и ψ_1, в треугольнике $AB_\lambda^1 A_\lambda^2$ построим такое обобщенное решение $\psi_2(x,z,\lambda) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(AB_\lambda^1 A_\lambda^2)$ уравнения (6), что

$$\psi_2|_{AC_\lambda^1} = \psi_0|_{AC_\lambda^1}, \quad \psi_2|_{C_\lambda^1 B_\lambda^1} = \psi_1|_{C_\lambda^1 B_\lambda^1}, \quad \psi_2|_{AA_\lambda^2} = 0.$$

И так далее. Пусть

$$\psi(x,z;\theta_1;\lambda) := \begin{cases} \psi_0(x,z,\lambda) & \text{при } (x,z) \in \triangle ABC_\lambda^1, \\ \psi_1(x,z,\lambda) & \text{при } (x,z) \in \triangle BC_\lambda^1 B_\lambda^1, \\ \psi_2(x,z,\lambda) & \text{при } (x,z) \in \triangle AB_\lambda^1 A_\lambda^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{7}$$

Пусть $\theta_2(x) \in L_2(0, 1/\alpha)$ — произвольная функция. Аналогично тому, как для $\lambda \in (0, (1+\alpha^2)^{-1})$ была построена функция $\psi(x,z;\theta_1;\lambda)$, построим функцию $\chi(x,z;\theta_2;\lambda)$ для $\lambda \in ((1+\alpha^2)^{-1}, 1)$: функция χ является обобщенным решением уравнения (6), принадлежащим $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D \cap \{z < 1-\varepsilon\})$ для любого $0 < \varepsilon < 1$ и удовлетворяющим соотношениям $\chi|_{\partial D} = 0$ и $\chi_z|_{[OA]} = \theta_2$. Рассмотрим функцию

$$\tau(x,z;\lambda) := \begin{cases} \psi(x,z;\theta_1;\lambda) & \text{при } 0 < \lambda < (1+\alpha^2)^{-1}, \\ \chi(x,z;\theta_2;\lambda) & \text{при } (1+\alpha^2)^{-1} < \lambda < 1. \end{cases} \tag{8}$$

Пусть

$$u_0(x,z) = -\int_0^1 \sigma(\lambda) \frac{\partial \tau}{\partial z}(x,z;\lambda)\, d\lambda,$$
$$v_0(x,z) = 0,$$
$$w_0(x,z) = \int_0^1 \sigma(\lambda) \frac{\partial \tau}{\partial x}(x,z;\lambda)\, d\lambda,$$

где носитель $\operatorname{supp}\sigma$ лежит в объединении интервалов $(0, (1+\alpha^2)^{-1})$ и $((1+\alpha^2)^{-1}, 1)$, тогда, как доказано в [1], вектор-функция $\boldsymbol{U} := (u, v, w)$ с компонентами

$$u = -\frac{\partial \widetilde{\psi}}{\partial z}, \quad v = \int_0^t \frac{\partial \widetilde{\psi}}{\partial z}(x,z;s)\, ds, \quad w = \frac{\partial \widetilde{\psi}}{\partial x}, \tag{9}$$

где

$$\widetilde{\psi}(x,z;t) := \int_0^1 \cos\left(\sqrt{\lambda}\, t\right) \sigma(\lambda) \tau(x,z;\lambda)\, d\lambda \tag{10}$$

является решением задачи (1)–(4).

Пусть $\theta_1 \in C_0^\infty[0,1]$, $\theta_2 \in C_0^\infty[0, 1/\alpha]$, $\sigma(\lambda) \in C_0^\infty[0,1]$, носитель $\operatorname{supp}\sigma$ лежит в объединении интервалов $(0, (1+\alpha^2)^{-1})$ и $((1+\alpha^2)^{-1}, 1)$. Тогда для любого $n = 1, 2, \ldots$ существует такая постоянная $\mathcal{K}_n$, не зависящая от t, что при всех $t \in (0, \infty)$ справедлива оценка

$$\left\| \widetilde{\psi}(x,z;t) \right\|_{L_2(D)} \leqslant \frac{\mathcal{K}_n}{t^n}, \tag{11}$$

где $\widetilde{\psi}(x,z;t)$ определена в (10).

В настоящем исследовании этот факт является ключевым. Очевидно, что для его доказательства достаточно рассмотреть случай, когда $\theta_2 \equiv 0$, $\operatorname{supp}\sigma \subset [\lambda_*, \lambda_{**}] \subset (0, (1+\alpha^2)^{-1})$, т. е.

$$\widetilde{\psi}(x,y;t) = \int_0^1 \cos\left(\sqrt{\lambda}\, t\right) \sigma(\lambda) \tau(x,z;\lambda)\, d\lambda =$$
$$= \int_0^{(1+\alpha^2)^{-1}} \cos\left(\sqrt{\lambda}\, t\right) \sigma(\lambda) \tau(x,z;\lambda)\, d\lambda, \tag{12}$$

где $\tau(x,z;\lambda) = \psi(x,z;\theta_1;\lambda)$. Функция $\tau(x,z;\lambda)$ является бесконечно дифференцируемой по x, z, λ везде внутри призмы $D \times (0, (1+\alpha^2)^{-1})$ и может быть непрерывно продолжена со всеми своими производными на всю поверхность этой призмы за исключением прямой $x = 0$, $z = 0$.

Пусть $\mathcal{D}_{**} := D \cap \{a_{**} z > x + a_{**} - \frac{1}{\alpha}\}$, $a_{**} = \sqrt{\frac{\lambda_{**}}{1-\lambda_{**}}}$. Для $(x,z) \in \mathcal{D}_{**}$ при всех $\mu \in [\lambda_*, \lambda_{**}]$ по формуле Римана имеем (см. [2])

$$\psi(x,z;\theta_1;\mu) = \frac{\sqrt{\mu}}{2\sqrt{1-\mu}} \int_{P(x,z;\mu)}^{Q(x,z;\mu)} \varphi(x', \mu)\, dx', \tag{13}$$

где

$$\varphi(x,\mu) := \left(\alpha \psi'_x + \frac{1-\mu}{\mu} \psi'_z \right)\Big|_{z=\alpha x}, \tag{14}$$

$P(x,z;\mu)$ и $Q(x,z;\mu)$ — абсциссы правого и левого углов характеристического треугольника с вершиной в точке (x,z), соответствующего значению $\lambda = \mu$ и опирающегося на OB:

$$\begin{aligned} P(x,z;\mu) &= \frac{\alpha x - z}{2\alpha} l + \frac{\alpha x + z}{2\alpha}, \\ Q(x,z;\mu) &= \frac{\alpha x + z}{2\alpha} + \frac{\alpha x - z}{2\alpha l}, \end{aligned} \tag{15}$$

где

$$l = l(\mu) := \frac{\sqrt{1-\mu} + \alpha\sqrt{\mu}}{\sqrt{1-\mu} - \alpha\sqrt{\mu}} \tag{16}$$

— строго монотонно возрастающая на интервале $(0,\,(1+\alpha^2)^{-1})$ функция, принимающая значения из интервала $(1,+\infty)$, поэтому

$$l(\mu) > 1 \quad \text{для всякого} \quad \mu \in [\lambda_*, \lambda_{**}]. \tag{17}$$

Несложно видеть, что в наших условиях функция $\varphi(x,l)$ бесконечно дифференцируема по x,l везде внутри полуполосы $(0,1/\alpha)\times(1,\infty)$. Пусть $l_1 := l(\lambda_*)$, $l_2 := l(\lambda_{**})$. Тогда, очевидно, $1 < l_1 \leqslant l_2 < +\infty$. Из результатов работы [1] следует, что для любого $n = 0,1,2,\ldots$ имеют место следующие оценки:

$$\left|\frac{\partial^n \widetilde{\varphi}}{\partial l^n}\right| \leqslant C(n) k^n l^k, \quad \frac{1}{\alpha l^{k+1}} < x \leqslant \frac{1}{\alpha l^k}, \quad l_* \leqslant l \leqslant l_{**}, \tag{18}$$

где $k = 1,2,\ldots$, а постоянная $C(n)$ не зависит от k и (x,l).

Используя эти оценки, докажем оценку (11) при $n=1$. Имеем

$$\widetilde{\psi}(x,z;t) = \int\limits_0^1 \cos\left(\sqrt{\lambda}\,t\right)\sigma(\lambda)\tau(x,z;\lambda)\,d\lambda =$$

$$= \int\limits_0^1 \cos(\nu t)\cdot 2\nu\sigma(\nu^2)\tau(x,z;\nu^2)\,d\nu =$$

$$= -\frac{1}{t}\int\limits_0^1 \sin(\nu t)\left(2\nu\sigma(\nu^2)\right)'_\nu \tau(x,z;\nu^2)\,d\nu =$$

$$-\frac{1}{t}\int\limits_0^1 \sin(\nu t)\cdot 2\nu\sigma(\nu^2)\tau'_\nu(x,z;\nu^2)\,d\nu. \tag{19}$$

Докажем ограниченность L_2–нормы первого из интегралов:

$$\iint\limits_D \left\{\int\limits_0^1 \sin(\nu t)\left(2\nu\sigma(\nu^2)\right)'_\nu \tau(x,z;\nu^2)\,d\nu\right\}^2 dx\,dz \leqslant$$

$$\leqslant \iint\limits_D \int\limits_0^1 \left|\left(2\nu\sigma(\nu^2)\right)'_\nu \tau(x,z;\nu^2)\right|^2 d\nu\,dx\,dz =$$

$$= \int\limits_0^1 \iint\limits_D \left|\left(2\nu\sigma(\nu^2)\right)'_\nu \tau(x,z;\nu^2)\right|^2 dx\,dz\,d\nu \leqslant K_1,$$

где K_1 не зависит от t. Далее, для второго интеграла в (19) имеем

$$\iint\limits_D \left|\int\limits_0^1 \sin(\nu t)\cdot 2\nu\sigma(\nu^2)\tau'_\nu(x,z;\nu^2)\,d\nu\right|^2 dx\,dz =$$

$$= \iint\limits_D \left|\int\limits_{\lambda_*}^{\lambda_{**}} \sin\left(\sqrt{\mu}\,t\right)\sigma(\mu)\tau'_\mu(x,z;\mu)\cdot 2\sqrt{\mu}\,d\mu\right|^2 dx\,dz \leqslant$$

$$\leqslant (\lambda_{**}-\lambda_*)\iint\limits_D \int\limits_{\lambda_*}^{\lambda_{**}} \left|\sigma(\mu)\tau'_\mu(x,z;\mu)\cdot 2\sqrt{\mu}\right|^2 d\mu\,dx\,dz =$$

$$\leqslant (\lambda_{**}-\lambda_*)\iint\limits_{\mathcal{D}_{**}} \int\limits_{\lambda_*}^{\lambda_{**}} \left|\sigma(\mu)\tau'_\mu(x,z;\mu)\cdot 2\sqrt{\mu}\right|^2 d\mu\,dx\,dz +$$

$$+ (\lambda_{**}-\lambda_*)\iint\limits_{D\setminus\overline{\mathcal{D}_{**}}} \int\limits_{\lambda_*}^{\lambda_{**}} \left|\sigma(\mu)\tau'_\mu(x,z;\mu)\cdot 2\sqrt{\mu}\right|^2 d\mu\,dx\,dz.$$

Существование второго слагаемого очевидно, поэтому займемся первым, воспользовавшись представлением (13) функции $\psi(x,z;\theta_1;\mu)$ в области $\mathcal{D}_{**}$:

$$\iint\limits_{\mathcal{D}_{**}} \int\limits_{\lambda_*}^{\lambda_{**}} \left|\sigma(\mu)\tau'_\mu(x,z;\mu)\cdot 2\sqrt{\mu}\right|^2 d\mu\,dx\,dz \leqslant$$

$$\leqslant 4\iint\limits_{\mathcal{D}_{**}} \int\limits_{\lambda_*}^{\lambda_{**}} \left|\sigma(\mu)\cdot 2\sqrt{\mu}\left(\frac{\sqrt{\mu}}{2\sqrt{1-\mu}}\right)'_\mu \times\right.$$

$$\left.\times \int\limits_{P(x,z;\mu)}^{Q(x,z;\mu)} \varphi(x',\mu)\,dx'\right|^2 d\mu\,dx\,dz +$$

$$+4\iint\limits_{\mathcal{D}_{**}} \int\limits_{\lambda_*}^{\lambda_{**}} \left|\sigma(\mu)\frac{\mu}{\sqrt{1-\mu}}Q'_\mu(x,z;\mu)\varphi(Q(x,z;\mu),\mu)\right|^2 d\mu dx dz +$$

$$+4\iint\limits_{\mathcal{D}_{**}} \int\limits_{\lambda_*}^{\lambda_{**}} \left|\sigma(\mu)\frac{\mu}{\sqrt{1-\mu}}P'_\mu(x,z;\mu)\varphi(P(x,z;\mu),\mu)\right|^2 d\mu\,dx\,dz +$$

$$+4\iint\limits_{\mathcal{D}_{**}} \int\limits_{\lambda_*}^{\lambda_{**}} \left|\sigma(\mu)\frac{\mu}{\sqrt{1-\mu}} \int\limits_{P(x,z;\mu)}^{Q(x,z;\mu)} \varphi'_\mu(\widetilde{x},\mu)\,d\widetilde{x}\right|^2 d\mu\,dx\,dz. \tag{20}$$

Докажем существование последнего интеграла. Для этого достаточно доказать сходимость ряда

$$\sum_{k=k_0}^{+\infty} \iint\limits_{R_k} \int\limits_{\lambda_*}^{\lambda_{**}} \left|\int\limits_{P(x,z;\mu)}^{Q(x,z;\mu)} \varphi'_\mu(\widetilde{x},\mu)\,d\widetilde{x}\right|^2 d\mu\,dx\,dz, \tag{21}$$

где интегралы берутся по трапециям $R_k := \left\{(x,z) \mid \frac{1}{l_1^{k+1}} < x < \frac{1}{l_1^k},\ 0 < z < \alpha x\right\}$, а k_0 достаточно большое. Переходя к новой переменной интегрирования $l = l(\mu)$ (см. (16)), имеем

$$\int\limits_{\lambda_*}^{\lambda_{**}} \left|\int\limits_{P(x,z;\mu)}^{Q(x,z;\mu)} \varphi'_\mu(\widetilde{x},\mu)\,d\widetilde{x}\right|^2 d\mu \leqslant K_2 \int\limits_{l_1}^{l_2} \left|\int\limits_{\widetilde{P}(x,z;l)}^{\widetilde{Q}(x,z;l)} \widetilde{\varphi}'_l(\widetilde{x},l)\,d\widetilde{x}\right|^2 dl \leqslant$$

$$\leqslant K_2 \int\limits_{l_1}^{l_2} \left|\widetilde{P}(x,z;l)-\widetilde{Q}(x,z;l)\right| \int\limits_{\widetilde{P}(x,z;l)}^{\widetilde{Q}(x,z;l)} \left|\widetilde{\varphi}'_l(\widetilde{x},l)\right|^2 d\widetilde{x}\,dl,$$

где K_2 — некоторая положительная константа, зависящая только от λ_* и λ_{**}. Пусть

$$P_k := \max_{\substack{(x,z)\,\in\, R_k,\\ l\,\in\,[l_1,l_2]}} \widetilde{P}(x,z;l), \qquad Q_k := \min_{\substack{(x,z)\,\in\, R_k,\\ l\,\in\,[l_1,l_2]}} \widetilde{Q}(x,z;l).$$

Легко установить, что

$$P_k = \frac{l_2+1}{2l_1^k}, \quad Q_k = \frac{l_2+1}{2l_1^{k+1}l_2}, \tag{22}$$

поэтому для $(x,z)\in R_k$

$$\int\limits_{l_1}^{l_2} \left|\widetilde{P}(x,z;l)-\widetilde{Q}(x,z;l)\right| \int\limits_{\widetilde{P}(x,z;l)}^{\widetilde{Q}(x,z;l)} \left|\widetilde{\varphi}'_l(\widetilde{x},l)\right|^2 d\widetilde{x}\,dl \leqslant$$

$$\leqslant \frac{K_3}{l_1^k}\int\limits_{Q_k}^{P_k}\left\{\int\limits_{l_1}^{l_2}\left|\varphi'_l(\widetilde{x},l)\right|^2 dl\right\}d\widetilde{x}, \tag{23}$$

где K_3 — некоторая положительная константа, зависящая только от λ_* и λ_{**}. Кроме того, из (22) следует также, что существуют не зависящие от k натуральные числа m_0 и r_0 такие, что $l_1^{-(k+m_0)} \leqslant Q_k < P_k \leqslant l_1^{-(k-r_0)}$ для всех k. Поэтому, если обозначить подынтегральное выражение в правой части неравенства (23) через $\mathcal{F}$, то в силу его неотрицательности имеем

$$\int\limits_{Q_k}^{P_k}\mathcal{F}d\widetilde{x} \leqslant \int\limits_{l_1^{-(k+m_0)}}^{l_1^{-(k+m_0-1)}}\mathcal{F}d\widetilde{x} + \int\limits_{l_1^{-(k+m_0-1)}}^{l_1^{-(k+m_0-2)}}\mathcal{F}d\widetilde{x} + \ldots + \int\limits_{l_1^{-(k-r_0+1)}}^{l_1^{-(k-r_0)}}\mathcal{F}d\widetilde{x}.$$

Тогда

$$\sum_{k=k_0}^{+\infty}\iint\limits_{R_k}\int\limits_{\lambda_*}^{\lambda_{**}}\left|\int\limits_{P(x,z;\mu)}^{Q(x,z;\mu)}\varphi'_\mu(\widetilde{x},\mu)\,d\widetilde{x}\right|^2 d\mu\,dx\,dz \leqslant$$

$$\leqslant (m_0+r_0+1)K_3\sum_{k=k_0}^{+\infty}\frac{S_k}{l_1^k}\int\limits_{l_1^{-(k+1)}}^{l_1^{-k}}\left\{\int\limits_{l_1}^{l_2}\left|\widetilde{\varphi}'_l(\widetilde{x},l)\right|^2 dl\right\}d\widetilde{x}, \tag{24}$$

где S_k — площадь R_k.

Пусть $\widetilde{x}\in[l_1^{-(k+1)}, l_1^{-k}]$. Обозначим через $l_{\widetilde{x},i}$ значения l, соответствующие точкам пересечения прямой $x=\widetilde{x}$ с кривыми $x=\frac{1}{l^{k-i+1}}$, $i=0,1,2,\ldots$, так что

$$\widetilde{x} = \frac{1}{(l_{\widetilde{x},0})^{k+1}} = \frac{1}{(l_{\widetilde{x},1})^{k}} = \frac{1}{(l_{\widetilde{x},2})^{k-1}} = \ldots = \frac{1}{(l_{\widetilde{x},i+1})^{k-i}} = \ldots,$$

а через $N(\widetilde{x},k)$ — число таких пересечений, принадлежащих отрезку $[l_1,l_2]$. Легко установить, что для достаточно больших k выполняется $N(\widetilde{x},k)<\widehat{\gamma}k$, где $0<\widehat{\gamma}<1$ не зависит от k и $\widetilde{x}$. При этом, очевидно, $l_{\widetilde{x},0}\leqslant l_1\leqslant l_{\widetilde{x},1}$. Имеем

$$\int\limits_{l_1^{-(k+1)}}^{l_1^{-k}} d\widetilde{x}\int\limits_{l_1}^{l_2}\left|\widetilde{\varphi}'_l(\widetilde{x},l)\right|^2 dl \leqslant \int\limits_{l_1^{-(k+1)}}^{l_1^{-k}}\left\{\sum_{i=0}^{N(\widetilde{x},k)+1}\int\limits_{l_{\widetilde{x},i}}^{l_{\widetilde{x},i+1}}\left|\widetilde{\varphi}'_l(\widetilde{x},l)\right|^2 dl\right\}d\widetilde{x}.$$

Воспользуемся теперь оценкой (18) при $(n=1)$. Тогда

$$\int\limits_{l_1^{-(k+1)}}^{l_1^{-k}}\left\{\sum_{i=0}^{N(\widetilde{x},k)+1}\int\limits_{l_{\widetilde{x},i}}^{l_{\widetilde{x},i+1}}\left|\widetilde{\varphi}'_l(\widetilde{x},l)\right|^2 dl\right\}d\widetilde{x} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{l_1^{-(k+1)}}^{l_1^{-k}}\left\{\sum_{i=0}^{N(\widetilde{x},k)+1}\int\limits_{l_{\widetilde{x},i}}^{l_{\widetilde{x},i+1}} C^2(1)(k-i)^2 l^{2(k-i)}\,dl\right\}d\widetilde{x} \leqslant$$

$$\leqslant k^2C^2(1)\int\limits_{l_1^{-(k+1)}}^{l_1^{-k}}\left\{\sum_{i=0}^{N(\widetilde{x},k)+1}(l_{\widetilde{x},i+1})^{2(k-i)}(l_{\widetilde{x},i+1}-l_{\widetilde{x},i})\right\}d\widetilde{x} \leqslant$$

$$\leqslant k^2C^2(1)\int\limits_{l_1^{-(k+1)}}^{l_1^{-k}}\left\{(N(\widetilde{x},k)+2)(l_{\widetilde{x},0})^{2(k+1)}\right\}d\widetilde{x} \leqslant$$

$$\leqslant k^2C^2(1)\int\limits_{l_1^{-(k+1)}}^{l_1^{-k}}\left\{(\widehat{\gamma}k+2)l_1^{2(k+1)}\right\}d\widetilde{x} \leqslant K_4\,k^3 l_1^k,$$

где положительная постоянная K_4 не зависит от k, откуда с очевидностью следует сходимость ряда (24).

Ясно, что эти же рассуждения доказывают сходимость и первого из интегралов в правой части неравенства (20), поскольку функция $\varphi(x,\mu)$ растет не быстрее $\varphi'_\mu(x,\mu)$.

Рассмотрим теперь второй интеграл в правой части (20). Поскольку $P'_\mu(x,z;\mu)=\frac{\alpha x-z}{2\alpha}l'_\mu$, то, очевидно,

$$\iint\limits_{\mathcal{D}_{**}}\int\limits_{\lambda_*}^{\lambda_{**}}\left|\sigma(\mu)\frac{\mu}{\sqrt{1-\mu}}P'_\mu(x,z;\mu)\varphi(P(x,z;\mu),\mu)\right|^2 d\mu\,dx\,dz \leqslant$$

$$\leqslant K_5\iint\limits_{\mathcal{D}_{**}}|x|\int\limits_{\lambda_*}^{\lambda_{**}}|\varphi(P(x,z;\mu),\mu)|^2\,d\mu\,dx\,dz \leqslant$$

$$\leqslant K_6\iint\limits_{\mathcal{D}_{**}}|x|\int\limits_{l_1}^{l_2}\left|\widetilde{\varphi}(\widetilde{P}(x,z;l),l)\right|^2 dl\,dx\,dz,$$

где K_5 и K_6 — некоторые положительные постоянные, зависящие только от σ_0, λ_* и λ_{**}. Для всякой фиксированной точки $(x,z)\in R_k$ обозначим значения l, соответствующие точкам пересечения кривой $x=\widetilde{P}(x,z;l)$ с кривыми $x_{k',j}(l)$ в плоскости Olx через $l_{k,k',j}$. Пусть $N(x,z;k)$ — число таких пересечений $l_{k,k',j}$, принадлежащих отрезку $[l_1,l_2]$, и пусть при этом k' принимает значения $\{k'_m,\ k'_m+1,\ \ldots,\ k'_M\}$. Используя результаты работы [1], покажем, что сходится ряд

$$\sum_{k=k_0}^{+\infty}\iint\limits_{R_k}|x|\int\limits_{l_1}^{l_2}\left|\widetilde{\varphi}(\widetilde{P}(x,z;l),l)\right|^2 dl\,dx\,dz, \tag{25}$$

где k_0 достаточно большое. Для любой точки $(x,z)\in R_k$ имеем

$$\int\limits_{l_1}^{l_2}\left|\widetilde{\varphi}(\widetilde{P}(x,z;l),l)\right|^2 dl = \int\limits_{l_1}^{l_{k,k'_M,n}}\left|\widetilde{\varphi}(\widetilde{P}(x,z;l),l)\right|^2 dl +$$

$$+\int\limits_{l_{k,k'_M,n}}^{l_{k,k'_M-1,n}}\left|\widetilde{\varphi}(\widetilde{P}(x,z;l),l)\right|^2 dl + \ldots + \int\limits_{l_{k,k'_m,n}}^{l_2}\left|\widetilde{\varphi}(\widetilde{P}(x,z;l),l)\right|^2 dl \leqslant$$

$$\leqslant C(0)\Bigg\{\int\limits_{l_{k,k'_M+1,n}}^{l_{k,k'_M,n}} l^{2k'_M}dl+\int\limits_{l_{k,k'_M,n}}^{l_{k,k'_M-1,n}} l^{2k'_M-2}dl+\ldots+$$

$$+\int\limits_{l_{k,k'_m,n}}^{l_{k,k'_m-1,n}} l^{2k'_m-2}\,dl\Bigg\}\leqslant C(0)(l_2-l_1)\Big((l_{k,k'_M,n})^{2k'_M}+$$

$$+(l_{k,k'_M-1,n})^{2k'_M-2}+\ldots+(l_{k,k'_m-1,n})^{2k'_m-2}\Big)=$$

$$=C(0)(l_2-l_1)\big(P(x,z;l_{k,k'_M,n})^{-2}+P(x,z;l_{k,k'_M-1,n})^{-2}+$$

$$+\ldots+P(x,z;l_{k,k'_m-1,n})^{-2}\big)\leqslant$$

$$\leqslant C(0)(l_2-l_1)(N(x,z;k)+1)\frac{4\alpha^2}{(\alpha x+z)^2}\leqslant\frac{K_7k}{x^2},$$

где K_7 не зависит от k, поэтому ряд (25) действительно сходится.

Таким образом, при $n=1$ оценка (11) доказана. Для того, чтобы доказать справедливость этой оценки при $n=2$, заметим, что

$$\widetilde{\psi}(x,z;t)=-\frac{1}{t}\int\limits_0^1\sin(\nu t)(2\nu\sigma(\nu^2))'_\nu\tau(x,z;\nu^2)\,d\nu-$$

$$-\frac{1}{t}\int\limits_0^1\sin(\nu t)\cdot 2\nu\sigma(\nu^2)\tau'_\nu(x,z;\nu^2)\,d\nu=$$

$$=-\frac{1}{t^2}\Bigg(\int\limits_0^1\cos(\nu t)(2\nu\sigma(\nu^2))''_{\nu\nu}\tau(x,z;\nu^2)\,d\nu+$$

$$+2\int\limits_0^1\cos(\nu t)(2\nu\sigma(\nu^2))'_\nu\tau'_\nu(x,z;\nu^2)\,d\nu+$$

$$+\int\limits_0^1\cos(\nu t)\cdot 2\nu\sigma(\nu^2)\tau''_{\nu\nu}(x,z;\nu^2)\,d\nu\Bigg).$$

Существование первых двух интегралов в последнем выражении доказано выше, а для доказательства сходимости третьего интеграла, учитывая представление $\psi(x,z;\theta_1;\mu)$ в виде (13), очевидно, достаточно доказать, что сходится ряд

$$\sum_{k=k_0}^{+\infty}\iint\limits_{R_k}\int\limits_{\lambda_*}^{\lambda_{**}}\Bigg|\int\limits_{P(x,z;\mu)}^{Q(x,z;\mu)}\varphi''_{\mu\mu}(\widetilde{x},\mu)\,d\widetilde{x}\Bigg|^2 d\mu\,dx\,dz. \qquad (26)$$

Доказательство сходимости этого ряда полностью повторяет доказательство сходимости ряда (21) с той лишь разницей, что использует оценку (18) для $n=2$.

Случаи $n=3,4,\ldots$ рассматриваются аналогично.

2. Распределение энергии начального состояния

Несложно установить, что для решений задачи (1)–(4) выполняется закон сохранения энергии:

$$\mathcal{E}(t,D):=\int\limits_D\left(|u|^2+|v|^2+|w|^2\right)dx\,dz=\mathrm{const}\,.$$

Известно, что если область D является дополнением $\boldsymbol{R}^2\setminus\overline{\Omega}$ к некоторой выпуклой ограниченной области Ω, то энергия начального возмущения перераспределяется при $t\to\infty$ так, что что ее доля, сосредоточенная на любом компакте $\mathcal{A}\in\boldsymbol{R}^2\setminus\overline{\Omega}$, стремится к нулю, т.е. происходит рассеяние энергии. В нашем случае картина такова: если $\theta_1\in C_0^\infty[0,1]$, $\theta_2\in C_0^\infty[0,1/\alpha]$, $\sigma(\lambda)\in C_0^\infty[0,1]$ и носитель $\operatorname{supp}\sigma$ лежит в объединении интервалов $(0,\,(1+\alpha^2)^{-1})$ и $((1+\alpha^2)^{-1},\,1)$, то для любых $\varepsilon>0$ и $\delta>0$ существует такое $T=T(\varepsilon,\delta)$, что для решения $U=(u,v;w)$ задачи (1)–(4) при всех $t>T$

$$\mathcal{E}(t,D_\varepsilon):=\iint\limits_{D_\varepsilon}\left(|u|^2+|v|^2+|w|^2\right)dx\,dz<\delta, \qquad (27)$$

где $D_\varepsilon:=D\cap\{x>\varepsilon\}\cap\{z<1-\varepsilon\}$. Действительно, полагая для простоты $\theta_2\equiv 0$, $\operatorname{supp}\sigma\subset[\lambda_*,\lambda_{**}]\subset(0,\,(1+\alpha^2)^{-1})$, для функции тока $\widetilde{\psi}$ имеем

$$\widetilde{\psi}(x,z;t)=\int\limits_0^1\cos\left(\sqrt{\lambda}\,t\right)\sigma(\lambda)\tau(x,z;\lambda)\,d\lambda=$$

$$=-\frac{1}{t}\int\limits_0^1\sin\left(\sqrt{\lambda}\,t\right)\left(2\sqrt{\lambda}\,\sigma(\lambda)\right)'_\lambda\tau(x,z;\lambda)\,d\lambda-$$

$$-\frac{1}{t}\int\limits_0^1\sin\left(\sqrt{\lambda}\,t\right)\sigma(\lambda)\tau'_\lambda(x,z;\lambda)\cdot 2\sqrt{\lambda}\,d\lambda$$

(см. (19)). Как уже отмечалось, в наших условиях $\tau(x,z;\lambda)$ является бесконечно дифференцируемой по x,z,λ везде внутри призмы $D\times(0,\,(1+\alpha^2)^{-1})$ и может быть непрерывно продолжена со всеми своими производными на всю поверхность призмы $(D\cap\{x>\varepsilon\})\times(0,\,(1+\alpha^2)^{-1})$, $\varepsilon>0$. Имеем

$$u=\frac{1}{t}\int\limits_0^1\sin\left(\sqrt{\lambda}\,t\right)\left(2\sqrt{\lambda}\,\sigma(\lambda)\right)'_\lambda\tau'_z(x,z;\lambda)\,d\lambda+$$

$$+\frac{1}{t}\int\limits_0^1\sin\left(\sqrt{\lambda}\,t\right)\sigma(\lambda)\tau''_{z\lambda}(x,z;\lambda)\cdot 2\sqrt{\lambda}\,d\lambda,$$

поэтому

$$\iint\limits_{D\cap\{x>\varepsilon\}}|u|^2\,dx\,dz\leqslant\frac{2}{t^2}\iint\limits_{D\cap\{x>\varepsilon\}}\times$$

$$\times\left|\int\limits_0^1\sin\left(\sqrt{\lambda}\,t\right)\left(2\sqrt{\lambda}\,\sigma(\lambda)\right)'_\lambda\tau'_z(x,z;\lambda)\,d\lambda\right|^2dx\,dz+$$

$$+\frac{2}{t^2}\iint\limits_{D\cap\{x>\varepsilon\}}\left|\int\limits_0^1\sin\left(\sqrt{\lambda}\,t\right)\sigma(\lambda)\tau''_{z\lambda}(x,z;\lambda)\cdot 2\sqrt{\lambda}\,d\lambda\right|^2dx\,dz\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2}{t^2}\iint\limits_{D\cap\{x>\varepsilon\}}\int\limits_0^1\left|\left(2\sqrt{\lambda}\,\sigma(\lambda)\right)'_\lambda\tau'_z(x,z;\lambda)\right|^2d\lambda\,dx\,dz+$$

$$+\frac{2}{t^2}\iint\limits_{D\cap\{x>\varepsilon\}}\int\limits_0^1\left|\sigma(\lambda)\tau''_{z\lambda}(x,z;\lambda)\cdot 2\sqrt{\lambda}\right|^2d\lambda\,dx\,dz\leqslant\frac{K_\varepsilon}{t^2}\to 0$$

$$(t\to\infty),$$

где положительная константа K_ε не зависит от t. Остальные слагаемые в (27) оцениваются аналогично. Таким образом, доказательство этого неравенства завершено.

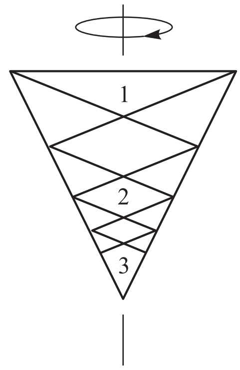
Из него следует, что при таком выборе начальных возмущений $\boldsymbol{U}_0 = (u_0, v_0, w_0)$ решения задачи (1)–(4) таковы, что вся энергия их начального состояния с течением времени оказывается почти полностью сосредоточенной в сколь угодно малых окрестностях вершин O и B области D. При этом, очевидно, что если $\theta_2 \equiv 0$ или $\operatorname{supp}\sigma \in (0,\,(1+\alpha^2)^{-1})$, то энергия аккумулируется лишь в окрестности точки O; соответственно, если $\theta_1 \equiv 0$ или $\operatorname{supp}\sigma \in ((1+\alpha^2)^{-1},\,1)$, то энергия аккумулируется в окрестности точки B.

В [1] указано, что предложенный метод построения точных решений задачи (1)–(4) может быть использован для некоторого достаточно широкого класса областей с угловыми точками: например, когда D является «криволинейным треугольником», стороны OA и OB которого являются некоторыми гладкими кривыми, пересекающимися в точке O под ненулевым углом, и такими, что при всех λ из некоторого интервала (λ', λ'') лучи характеристических направлений, закон отражения от границы которых описан в разд. 1, локализуются в углу с вершиной O. Ясно, что поведение этих решений при $t \to \infty$ будет аналогичным описанному выше.

Проведенное исследование двумерной модельной задачи в бесконечном цилиндре позволяет сделать прогноз относительно поведения идеальной жидкости как внутри конуса, так и внутри, например, тора, симметричного относительно оси вращения и такого, что его осевое сечение является треугольником D, а именно можно утверждать, что при некотором выборе начальных возмущений колебания жидкости будут такими, что почти вся энергия этих возмущений с течением времени окажется в сколь угодно малой окрестности какого-либо ребра или конической точки.

И в заключение кратко обсудим экспериментальные исследования. Известно, что вопрос о поведении вращающейся жидкости в контейнерах разных конфигураций давно интересовал исследователей, в связи с чем и были поставлены следующие эксперименты. Прямой круговой конус, полностью заполненный жидкостью, был установлен на столе, который вращался вокруг вертикальной оси с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega} = \Omega(1+\varepsilon\cos\omega t)\boldsymbol{k}$ (см. [7]). Это была установка, аналогичная той, что была использована ранее [8], чтобы исследовать инерционные моды в сфере. Но если в случае сферы при медленном изменении ω жидкость проходила определенные состояния резонанса, соответствующие собственным частотам осесимметричных инерционных волн, то в конусе картина была принципиально иной, и здесь было получено лишь качественное описание поведения жидкости.

На рисунке показан устойчивый внутренний поток, как он был виден благодаря освещению алюминиевых хлопьев, введенных в жидкость. Оказалось, что амплитуда колебания жидкости вдоль оси увеличивается от значения, близкого к нулю в области 1, до значения, близкого к значению амплитуды наложенных колебаний в области 2. Однако в непосредственной близости от вершины (в области 3) амплитуда колебаний снова становится очень малой. При этом вид потока остается одинаковым для тех значений ω, при которых соответствующие им характеристики, локализуются в вершине конуса.



Движение жидкости в коническом контейнере

Теоретического объяснения такого поведения жидкости в то время не было получено. Проведенное в настоящей работе исследование решений двумерной модельной задачи как раз объясняет такое поведение жидкости: резонансных явлений в этой ситуации не может быть, поскольку спектр соответствующего оператора является непрерывным, а амплитуда движения жидкости увеличивается по мере приближения к вершине, потому что энергия с течением времени оказывается сконцентрированной в окрестности вершины — если значения ω таковы, что характеристики рассмотренного нами гиперболического уравнения при отражении от границы локализуются именно в углу, соответствующем этой вершине. С другой стороны, по-видимому, в исследованиях колебаний реальной вращающейся жидкости в контейнере, обладающем такими особенностями границы, нельзя пренебрегать вязкостью, а значит, при проведении расчетов необходимо рассматривать соответствующие нелинейные системы.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Программы поддержки научного потенциала высшей школы (грант РНП.2.1.1.5031).

Список литературы

1. *Троицкая С.Д.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2010. № 6. С. 14.
2. *Троицкая С.Д.* // Изв. РАН. Сер. мат. 1994. **58**, № 4. С. 97.
3. *Троицкая С.Д.* // Матем. заметки. 1999. **63**, № 2. С. 128.
4. *Гринспэн Х.* Теория вращающихся жидкостей. Л., 1975.
5. *Маслов В.П.* // Сиб. матем. журнал. 1968. **9**, № 6. С. 1351.
6. *Троицкая С.Д.* // Изв. РАН. Сер. мат. 1998. **62**, № 2. С. 193.
7. *Greenspan H.P.* // Stud. Appl. Math. 1969. **48**. P. 19.
8. *Aldridge K.D., Toomre A.* // J. Fluid Mechanics. 1969. **37**, N 2. P. 307.
9. *Morize C., Moisy F.* // Phys. Fluids. 2006. **18**. P. 065107.

Properties of solutions of a model problem on oscillations of a rotating fluid in domains with angular points

S. D. Troitskaya

Institute for Content and Methods of Education, Russian Academy of Education, Pogodinskaya str. 8, Moscow 119098, Russia.
E-mail: troitsks@gmail.com.

The behavior of solutions of a two-dimensional model problem on oscillations of an ideal rotating fluid in some domains containing angular points is studied as $t \to \infty$. It is proved that there exist solutions such that all the energy of the initial motion becomes almost completely concentrated in arbitrary small neighborhoods of angular points as time grows.

Keywords: rotating fluid, non almost-periodical solutions, absolutely continuous spectrum.
PACS: 47.32.Ef.
Received 21 May 2010.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 6(2010).

Сведения об авторе

Троицкая Сауле Джумабековна — канд. физ.-мат. наук, доцент, вед. науч. сотр.; тел.: (499) 246-32-48, e-mail: troitsks@gmail.com.