Символ Маслова для матрицы плотности при квантовании по парам

Д. С. Голиков

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра квантовой статистики и теории поля. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
E-mail: dmitriy.golikov@gmail.com

Статья поступила 23.02.2010, подписана в печать 03.07.2010

Методы ультравторичного квантования применены к уравнению для матрицы плотности. Получено тождество для ультравторично квантованного гамильтониана, позволяющее определить истинный символ уравнения для матрицы плотности при ультравторичном квантовании по парам. Исследование соответствующей системы уравнений в вариациях показало, что система обладает спектром, полученным в модели сверхтекучести В. П. Маслова.

Ключевые слова: ультравторичное квантование, символ Маслова, матрица плотности.
УДК: 530.145. PACS: 05.30.Jp.

Рассмотрим систему N тождественных бозонов на трехмерном торе $\boldsymbol{T}$ со сторонами длины L. Уравнение для матрицы плотности, соответствующее этой системе, имеет вид

$$i\frac{\partial\rho}{\partial t}(x_1,y_1;\ldots;x_N,y_N,t) = \\ = \big(\widehat{H}_N(x)-\widehat{H}_N(y)\big)\rho(x_1,y_1;\ldots;x_N,y_N,t). \quad (1)$$

Здесь $\widehat{H}_N(x)$ — оператор в пространстве функций $L_2(\boldsymbol{T}^N)$, который действует на $\Phi\in L_2(\boldsymbol{T}^N)$ следующим образом:

$$\widehat{H}_N(x)\Phi(x_1,\ldots,x_N) = \\ = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{i=1}^{N}\Delta_{x_i}+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=i+1}^{N}V\left(\sqrt[3]{N}(x_i-x_j)\right)\right)\Phi(x_1,\ldots,x_N),$$

где Δ_{x_i} — оператор Лапласа, действующий на аргумент $x_i\in\boldsymbol{T}$, $V(\cdot)$ — гладкая четная функция на торе $\boldsymbol{T}$.

Функция $\rho(x_1,y_1;\ldots;x_N,y_N,t)$ симметрична относительно перестановок переменных x_i и x_j, а также относительно перестановок переменных y_i и y_j при любых $i,j=1,\ldots,N$ и удовлетворяет условиям

$$\rho(x_1,y_1;\ldots;x_N,y_N,t)=\rho^*(y_1,x_1;\ldots;y_N,x_N,t),$$
$$\int\cdots\int dx_1\ldots dx_N\,\rho(x_1,x_1;\ldots;x_N,x_N,t)<\infty.$$

Кроме того, следуя [1], будем считать, что функция $\rho(x_1,y_1;\ldots;x_N,y_N,t)$ является ядром положительно определенного оператора и представляется в виде

$$\rho(x_1,y_1;\ldots;x_N,y_N,t)=\int\cdots\int dz_1\cdots dz_N\,\times \\ \times d^*(z_1,x_1;\ldots;z_N,x_N,t)\,d(z_1,y_1;\ldots;z_N,y_N,t),$$

где $d(x_1,y_1;\ldots;x_N,y_N,t)$ — матрица полуплотности, симметричная функция переменных x и y, которая принадлежит пространству $L_2(\boldsymbol{T}^{2N})$ и удовлетворяет уравнению, аналогичному (1):

$$i\frac{\partial d}{\partial t}(x_1,y_1;\ldots;x_N,y_N,t) = \\ = \big(\widehat{H}_N(x)-\widehat{H}_N(y)\big)d(x_1,y_1;\ldots;x_N,y_N,t). \quad (2)$$

Вследствие симметрии функции $d(x_1,y_1;\ldots$ $\ldots;x_N,y_N,t)$ относительно переменных x и y она также симметрична относительно перестановок пар переменных (x_i,y_i) и (x_j,y_j). Поэтому, следуя монографии [2], рассмотрим уравнение (2) в представлении ультравторичного квантования по парам.

Пространство ультравторичного квантования [3] в случае бозонов при квантовании по парам представляет собой бозонное пространство Фока $\mathcal{F}^{\mathrm{Symm}}$ [4]. Элементами этого пространства являются векторы вида

$$|\Psi\rangle=\sum_{M=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{M!}}\int\cdots\int dx_1\cdots dx_M\,dy_1\cdots dy_M\,\times \\ \times\Psi_M(x_1,y_1;\ldots;x_M,y_M)\,\widehat{b}^+(x_1,y_1;x_2,y_2)\cdots \\ \cdots\widehat{b}^+(x_{M-1},y_{M1-};x_M,y_M)\,|0\rangle, \quad (3)$$

где $x_i\in\boldsymbol{T}$, $|0\rangle$ — вакуумный вектор пространства $\mathcal{F}^{\mathrm{Symm}}$, обладающий свойством

$$\widehat{b}(x_1,y_1;x_2,y_2)\,|0\rangle=0,$$

$\widehat{b}^+(x_1,y_1;x_2,y_2)$, $\widehat{b}(x_1,y_1;x_2,y_2)$ — операторы рождения и уничтожения пары частиц в $\mathcal{F}^{\mathrm{Symm}}$, а функции $\Psi_M(x_1,y_1;\ldots;x_M,y_M)\in L_2(\boldsymbol{T}^{2M})$, симметричные относительно перестановок пар переменных, удовлетворяют условию

$$\sum_{M=0}^{\infty}\int\cdots\int dx_1\cdots dx_M\,dy_1\cdots dy_M\,\times \\ \times|\Psi_M(x_1,y_1;\ldots;x_M,y_M)|^2<\infty. \quad (4)$$

Операторы рождения и уничтожения подчиняются коммутационным соотношениям

$$\big[\widehat{b}(x_1,y_1;x_2,y_2),\widehat{b}^+(x_1',y_1';x_2',y_2')\big]_-= \\ =\delta(x_1-x_1')\delta(y_1-y_1')\delta(x_2-x_2')\delta(y_2-y_2'),$$
$$\big[\widehat{b}(x_1,y_1;x_2,y_2),\widehat{b}(x_1',y_1';x_2',y_2')\big]_-= \\ =\big[\widehat{b}^+(x_1,y_1;x_2,y_2),\widehat{b}^+(x_1',y_1';x_2',y_2')\big]_-=0,$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака. Оператор числа пар частиц в пространстве $\mathcal{F}^{\mathrm{Symm}}$ имеет вид

$$\widehat{N} = \iint dx_1\, dx_2\, dy_1\, dy_2\, \widehat{b}^+(x_1, y_1; x_2, y_2)\widehat{b}(x_1, y_1; x_2, y_2).$$

В соответствии с [2] оператору $\widehat{H}_N$ соответствует ультравторично квантованный оператор Гамильтона $\overline{\overline{H}}$ следующего вида:

$$\overline{\overline{H}} = \sum_{N=0}^{\infty} \int \cdots \int dx_1\, dy_1 \cdots dx_{2N}\, dy_{2N} \overset{2}{\widehat{b}^+}(x_1, y_1; x_2, y_2) \cdots$$
$$\cdots \overset{2}{\widehat{b}^+}(x_{2N-1}, y_{2N-1}; x_{2N}, y_{2N})\big(\widehat{H}_{2N}(x) - \widehat{H}_{2N}(y)\big) \times$$
$$\times \underset{x_1,\dots,x_{2N}}{\mathrm{Symm}}\big(\overset{1}{\widehat{b}}(x_1, y_1; x_2, y_2) \cdots \overset{1}{\widehat{b}}(x_{2N-1}, y_{2N-1}; x_{2N}, y_{2N})\big) \times$$
$$\times \exp\left(-\iint du_1\, dv_1\, du_2\, dv_2\, \overset{2}{\widehat{b}^+}(u_1, v_1; u_2, v_2)\overset{1}{\widehat{b}}(u_1, v_1; u_2, v_2)\right), \tag{5}$$

где число над оператором обозначает порядок действия [5], $\mathrm{Symm}_{x_1,\dots,x_{2M}}$ — оператор симметризации по переменным $x_1, \dots, x_{2M}$.

Оператор ортогонального проектирования пространства $\mathcal{F}$, состоящего из всех векторов (3), удовлетворяющих (4), на подпространство $\mathcal{F}^{\mathrm{Symm}}$ имеет вид

$$\overline{\overline{E}} = \sum_{N=0}^{\infty} \int \cdots \int dx_1\, dy_1 \cdots dx_{2N}\, dy_{2N} \overset{2}{\widehat{b}^+}(x_1, y_1; x_2, y_2) \cdots$$
$$\cdots \overset{2}{\widehat{b}^+}(x_{2N-1}, y_{2N-1}; x_{2N}, y_{2N}) \times$$
$$\times \underset{x_1,\dots,x_{2N}}{\mathrm{Symm}}\big(\overset{1}{\widehat{b}}(x_1, y_1; x_2, y_2) \cdots \overset{1}{\widehat{b}}(x_{2N-1}, y_{2N-1}; x_{2N}, y_{2N})\big) \times$$
$$\times \exp\left(-\iint du_1\, dv_1\, du_2\, dv_2\, \overset{2}{\widehat{b}^+}(u_1, v_1; u_2, v_2)\overset{1}{\widehat{b}}(u_1, v_1; u_2, v_2)\right).$$

Утверждение. *Уравнение для матрицы полуплотности (2) в представлении ультравторичного квантования имеет вид*

$$i\frac{\partial}{\partial t}\overline{\overline{E}}\,|\Psi(t)\rangle = \overline{\overline{H}}\,|\Psi(t)\rangle, \tag{6}$$

где

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{M=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{M!}} \int \cdots \int dx_1 \dots dx_M\, dy_1 \cdots dy_M \times$$
$$\times d(x_1, y_1; \dots; x_M, y_M, t) \times$$
$$\times \widehat{b}^+(x_1, y_1; x_2, y_2) \cdots \widehat{b}^+(x_{M-1}, y_{M1-}; x_M, y_M)\,|0\rangle$$

— зависящий от времени t вектор бозонного фоковского пространства $\mathcal{F}^{\mathrm{Symm}}$, удовлетворяющий соотношениям

$$\widehat{N}\,|\Psi(t)\rangle = \frac{N}{2}\,|\Psi(t)\rangle, \quad \overline{\overline{E}}\,|\Psi(t)\rangle \neq 0,$$

N — произвольное четное натуральное число, $\overline{\overline{E}}$ и $\overline{\overline{H}}$ — соответственно ультравторично квантованный единичный оператор и ультравторично квантованный гамильтониан уравнения для матрицы полуплотности в пространстве $\mathcal{F}^{\mathrm{Symm}}$.

Утверждение. *Пусть вектор $|\Psi(t)\rangle \in \mathcal{F}^{\mathrm{Symm}}$ является решением уравнения*

$$i\frac{\partial}{\partial t}\overline{\overline{E}}\,|\Psi(t)\rangle = \overline{\overline{H}}\,|\Psi(t)\rangle \tag{7}$$

и удовлетворяет условиям

$$\widehat{N}\,|\Psi(t)\rangle = \frac{N}{2}\,|\Psi(t)\rangle, \quad \overline{\overline{E}}\,|\Psi(t)\rangle \neq 0,$$

где N — произвольное четное натуральное число. Тогда функция

$$d(x_1, y_1; \dots; x_N, y_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \times$$
$$\times \langle 0|\widehat{b}(x_1, y_1; x_2, y_2) \cdots \widehat{b}(x_{N-1}, y_{N-1}; x_N, y_N)\Psi(t)\rangle \tag{8}$$

является симметричной относительно перестановок пар переменных и удовлетворяет уравнению (2).

В работах В.П. Маслова [6, 7] было получено тождество для ультравторично квантованного гамильтониана, отвечающего уравнению Шрёдингера. Аналогичное тождество справедливо в случае уравнения для матрицы плотности.

Теорема. *Справедливо тождество*

$$\overline{\overline{H}} = \overline{\overline{E}}\widehat{A}, \tag{9}$$

где $\widehat{A}$ — оператор в пространстве ультравторичного квантования $\mathcal{F}^{\mathrm{Symm}}$, зависящий от набора параметров $\{a, b, \alpha, \beta\}$, имеет вид

$$\widehat{A} = -\frac{\hbar^2}{2m} \int dx_1\, dy_1\, dx_2\, dy_2\, \widehat{b}^+(x_1, y_1; x_2, y_2) \times$$
$$\times (\Delta_{x_1} - \Delta_{y_1} + \Delta_{x_2} - \Delta_{y_2})\widehat{b}(x_1, y_1; x_2, y_2) +$$
$$+ \int dx_1\, dy_1\, dx_2\, dy_2\, \underset{x_1,x_2}{\mathrm{Symm}}{}_{\{a\}} \underset{y_1,y_2}{\mathrm{Symm}}{}_{\{b\}} \big(\widehat{b}^+(x_1, y_1; x_2, y_2)\big) \times$$
$$\times \left(V\left(\sqrt[3]{N}(x_1 - x_2)\right) - V\left(\sqrt[3]{N}(y_1 - y_2)\right)\right) \widehat{b}(x_1, y_1; x_2, y_2) +$$
$$+ 2\int dx_1\, dy_1 \cdots dx_4\, dy_4 \times$$
$$\times \underset{x_1,x_2,x_3,x_4}{\mathrm{Symm}}{}_{\{\alpha\}} \underset{y_1,y_2,y_3,y_4}{\mathrm{Symm}}{}_{\{\beta\}} \big(\widehat{b}^+(x_1, y_1; x_2, y_2)\widehat{b}^+(x_3, y_3; x_4, y_4)\big) \times$$
$$\times \left(V\left(\sqrt[3]{N}(x_1 - x_2)\right) \widehat{b}(x_1, y_3; x_4, y_4)\widehat{b}(x_2, y_1; x_3, y_2) -\right.$$
$$\left. - V\left(\sqrt[3]{N}(y_1 - y_2)\right) \widehat{b}(x_3, y_1; x_4, y_4)\widehat{b}(x_1, y_2; x_2, y_3)\right).$$

Оператор $\underset{x_1,\dots,x_N}{\mathrm{Symm}}{}_{\{a\}}$ действует на функцию, зависящую от аргументов $x_1, \dots .x_N$, как «симметризатор с коэффициентами»:

$$\underset{x_1,\dots,x_N}{\mathrm{Symm}}{}_{\{a\}} f(x_1, \dots .x_N) = \sum a_{k_1 \dots k_N} f(x_{k_1}, \dots, x_{k_N}),$$

где суммирование производится по всем перестановкам k_i, принимающим значения от 1 до N, а $\sum a_{k_1 \dots k_N} = 1$.

Доказательство. Равенство (9) следует из коммутационных соотношений для операторов рождения и уничтожения и из вида операторов $\overline{\overline{H}}$, $\overline{\overline{E}}$ и $\widehat{A}$. □

Оператор $\widehat{A}$ имеет вид

$$NA\left[\frac{\widehat{b}^{+}(\cdot)}{\sqrt{N}}, \frac{\widehat{b}(\cdot)}{\sqrt{N}}\right],$$

где $A\left[\Phi^{+}(\cdot), \Phi(\cdot)\right]$ — следующий функционал (ниже аргументы этого функционала будем опускать):

$$\begin{aligned}A = &-\frac{\hbar^2}{2m}\int dx_1\,dy_1\,dx_2\,dy_2\,\Phi^{+}(x_1,y_1;x_2,y_2)\times\\ &\times(\Delta_{x_1}-\Delta_{y_1}+\Delta_{x_2}-\Delta_{y_2})\Phi(x_1,y_1;x_2,y_2)+\\ &+\int dx_1\,dy_1\,dx_2\,dy_2\,\mathop{\mathrm{Symm}_{\{a\}}}_{x_1,x_2}\mathop{\mathrm{Symm}_{\{b\}}}_{y_1,y_2}\left(\Phi^{+}(x_1,y_1;x_2,y_2)\right)\times\\ &\times\left(V\left(\sqrt[3]{N}(x_1-x_2)\right)-V\left(\sqrt[3]{N}(y_1-y_2)\right)\right)\Phi(x_1,y_1;x_2,y_2)+\\ &+2N\int dx_1\,dy_1\cdots dx_4\,dy_4\times\\ &\times\mathop{\mathrm{Symm}}_{x_1,x_2,x_3,x_4}{}_{\{\alpha\}}\mathop{\mathrm{Symm}}_{y_1,y_2,y_3,y_4}{}_{\{\beta\}}\left(\Phi^{+}(x_1,y_1;x_2,y_2)\Phi^{+}(x_3,y_3;x_4,y_4)\right)\times\\ &\times\left(V\left(\sqrt[3]{N}(x_1-x_2)\right)\Phi(x_1,y_3;x_4,y_4)\Phi(x_2,y_1;x_3,y_2)-\right.\\ &\left.-V\left(\sqrt[3]{N}(y_1-y_2)\right)\Phi(x_3,y_1;x_4,y_4)\Phi(x_1,y_2;x_2,y_3)\right).\end{aligned}$$

Функции $\Phi^{+}(x_1,y_1;x_2,y_2)$, $\Phi(x_1,y_1;x_2,y_2)\in L_2(\boldsymbol{T^4})$ являются символами операторов рождения $\widehat{b}^{+}(x_1,y_1;x_2,y_2)$ и уничтожения $\widehat{b}(x_1,y_1;x_2,y_2)$ соответственно и удовлетворяют условию

$$\int dx_1\,dy_1\,dx_2\,dy_2\,\Phi^{+}(x_1,y_1;x_2,y_2)\Phi(x_1,y_1;x_2,y_2)=\frac{1}{2}. \tag{10}$$

Далее будем считать их симметричными относительно перестановок переменных x_1, x_2 и переменных y_1, y_2.

Выбор оператора $\widehat{A}$, как и соответствующего ему символа, неоднозначен. Ниже будем рассматривать случай $\alpha_{1\ldots N}=1$, $\beta_{1\ldots N}=1$, остальные $\alpha_{k_1\ldots k_N}$ и $\beta_{k_1\ldots k_N}$ равны нулю. Потенциал взаимодействия зависит от N таким образом, что радиус потенциала взаимодействия уменьшается с увеличением числа частиц N, так что величина $NV\left(\sqrt[3]{N}(x-y)\right)$ в слабом смысле сходится к дельта-функции Дирака $\delta(x-y)$. В этом случае при $N\to\infty$ символ примет вид

$$\begin{aligned}A_{\mathfrak{I}} = &-\frac{\hbar^2}{2m}\int dx_1\,dy_1\,dx_2\,dy_2\,\Phi^{+}(x_1,y_1;x_2,y_2)\times\\ &\times(\Delta_{x_1}-\Delta_{y_1}+\Delta_{x_2}-\Delta_{y_2})\Phi(x_1,y_1;x_2,y_2)+\\ &+2N\int dx_1\,dy_1\cdots dx_4\,dy_4\,\Phi^{+}(x_1,y_1;x_2,y_2)\Phi^{+}(x_3,y_3;x_4,y_4)\times\\ &\times\left(V\left(\sqrt[3]{N}(x_1-x_2)\right)\Phi(x_1,y_3;x_4,y_4)\Phi(x_2,y_1;x_3,y_2)-\right.\\ &\left.-V\left(\sqrt[3]{N}(y_1-y_2)\right)\Phi(x_3,y_1;x_4,y_4)\Phi(x_1,y_2;x_2,y_3)\right).\end{aligned}$$

Аналог функционала $A_{\mathfrak{I}}$, возникающий при ультравторичном квантовании уравнения Шрёдингера, в работе [7] назван *истинным* символом ультравторично квантованной задачи. Функционал $A_{\mathfrak{I}}$ будем называть *истинным* символом ультравторично квантованного гамильтониана (5) уравнения для матрицы полуплотности, или *символом Маслова*.

Рассмотрим задачу о нахождении асимптотики решений уравнения (7) в пределе при $N\to\infty$. Согласно [1, 6, 7], эта асимптотика определяется периодическими решениями соответствующей *истинному* символу системы уравнений Гамильтона и системы уравнений в вариациях.

Истинному символу $A_{\mathfrak{I}}$ соответствует система уравнений Гамильтона

$$\begin{aligned}i\dot{\Phi}(x_1,y_1;x_2,y_2,t)&=\frac{\delta A_{\mathfrak{I}}}{\delta\Phi^{+}(x_1,y_1;x_2,y_2,t)},\\ -i\dot{\Phi}^{+}(x_1,y_1;x_2,y_2,t)&=\frac{\delta A_{\mathfrak{I}}}{\delta\Phi(x_1,y_1;x_2,y_2,t)}.\end{aligned} \tag{11}$$

Будем искать периодические решения системы уравнений Гамильтона в классе симметричных относительно перестановок пар переменных функций вида

$$\begin{aligned}\Phi(x_1,y_1;x_2,y_2,t)&=\sqrt{2}e^{-i\omega t}\Phi(x_1,x_2)\Phi^{*}(y_1,y_2),\\ \Phi^{+}(x_1,y_1;x_2,y_2,t)&=\sqrt{2}e^{i\omega t}\Phi^{+}(x_1,x_2)\Phi^{+*}(y_1,y_2),\end{aligned} \tag{12}$$

где $\Phi(x,y)$, $\Phi^{+}(x,y)$ симметричны:

$$\Phi(x,y)=\Phi(y,x),\quad \Phi^{+}(x,y)=\Phi^{+}(y,x)$$

и удовлетворяют условию

$$\iint dx\,dy\,\Phi^{+}(x,y)\Phi(x,y)=\frac{1}{2}. \tag{13}$$

Теорема. *Пусть функции $\Phi(x,y)$, $\Phi^{+}(x,y)$ удовлетворяют системе уравнений Гамильтона*

$$\begin{aligned}\Omega\Phi(x,y) = &-\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x+\Delta_y)\Phi(x,y)+\\ &+2N\iint dx'\,dy'\,\left(V\left(\sqrt[3]{N}(x-y)\right)+V\left(\sqrt[3]{N}(x'-y')\right)\right)\times\\ &\times\Phi^{+}(x',y')\Phi(x,x')\Phi(y,y'),\\ \Omega\Phi^{+}(x,y) = &-\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x+\Delta_y)\Phi^{+}(x,y)+\\ &+2N\iint dx'\,dy'\,\left(V\left(\sqrt[3]{N}(x-x')\right)+V\left(\sqrt[3]{N}(y-y')\right)\right)\times\\ &\times\Phi(x',y')\Phi^{+}(x,x')\Phi^{+}(y,y').\end{aligned} \tag{14}$$

Тогда функции (12) *являются решениями системы* (11) *при* $\omega=0$.

Доказательство. Утверждение теоремы проверяется непосредственной подстановкой (12) в систему (11). □

Отметим, что уравнения (14) являются системой Гамильтона для истинного символа

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = &-\frac{\hbar^2}{2m}\iint dx\,dy\,\Phi^{+}(x,y)(\Delta_x+\Delta_y)\Phi(x,y)+\\ &+2N\iiiint dx_1\,dy_1\,dx_2\,dy_2\,\Phi^{+}(x_1,y_1)\Phi^{+}(x_2,y_2)\times\\ &\times V\left(\sqrt[3]{N}(x_1-y_1)\right)\Phi(x_1,x_2)\Phi(y_1,y_2),\end{aligned} \tag{15}$$

рассмотренного в работе [7].

Система уравнений в вариациях, соответствующая решениям (12) гамильтоновой системы (11), согласно [1] имеет вид

$$-\lambda F(x_1,y_1;x_2,y_2)=\iint du_1\,dv_1\,du_2\,dv_2\,\times$$
$$\times\left(\frac{\delta^2 A_{\mathfrak{J}}}{\delta\Phi^+(x_1,y_1;x_2,y_2)\,\delta\Phi(u_1,v_1;u_2,v_2)}F(u_1,v_1;u_2,v_2)+\right.$$
$$\left.+\frac{\delta^2 A_{\mathfrak{J}}}{\delta\Phi^+(x_1,y_1;x_2,y_2)\,\delta\Phi^+(u_1,v_1;u_2,v_2)}G(u_1,v_1;u_2,v_2)\right),$$
$$\lambda G(x_1,y_1;x_2,y_2)=\iint du_1\,dv_1\,du_2\,dv_2\,\times \tag{16}$$
$$\times\left(\frac{\delta^2 A_{\mathfrak{J}}}{\delta\Phi(x_1,y_1;x_2,y_2)\,\delta\Phi(u_1,v_1;u_2,v_2)}F(u_1,v_1;u_2,v_2)+\right.$$
$$\left.+\frac{\delta^2 A_{\mathfrak{J}}}{\delta\Phi(x_1,y_1;x_2,y_2)\,\delta\Phi^+(u_1,v_1;u_2,v_2)}G(u_1,v_1;u_2,v_2)\right).$$

Теорема. *Пусть функции $F_\lambda(x_1,x_2)$, $G_\lambda(x_1,x_2)$ удовлетворяют системе уравнений в вариациях*

$$(\Omega-\lambda)F_\lambda(x,y)=-\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x+\Delta_y)F_\lambda(x,y)+$$
$$+N\iint dx'\,dy'\,\left(V\left(\sqrt[3]{N}(x-y)\right)+V\left(\sqrt[3]{N}(x'-y')\right)\right)\times$$
$$\times\big(G_\lambda(x',y')\Phi(x,x')\Phi(y,y')+$$
$$+\Phi^+(x',y')F_\lambda(x,x')\Phi(y,y')+$$
$$+\Phi(x',y')\Phi(x,x')F_\lambda(y,y')\big),$$
$$(\Omega+\lambda)G_\lambda(x,y)=-\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_x+\Delta_y)G_\lambda(x,y)+$$
$$+N\iint dx'\,dy'\,\left(V\left(\sqrt[3]{N}(x-y)\right)+V\left(\sqrt[3]{N}(x'-y')\right)\right)\times$$
$$\times\big(F_\lambda(x',y')\Phi^+(x,x')\Phi^+(y,y')+$$
$$+\Phi^+(x',y')G_\lambda(x,x')\Phi^+(y,y')+$$
$$+\Phi(x',y')\Phi^+(x,x')G_\lambda(y,y')\big),$$

отвечающей символу $\mathcal{H}$. Тогда функции

$$F_\lambda(x_1,y_1;x_2,y_2)=$$
$$=F_\lambda(x_1,x_2)\Phi^*(y_1,y_2)+\Phi(x_1,x_2)F^*_{-\lambda}(y_1,y_2),$$
$$G_\lambda(x_1,y_1;x_2,y_2)=$$
$$=G_\lambda(x_1,x_2)\Phi^{+*}(y_1,y_2)+\Phi^+(x_1,x_2)G^*_{-\lambda}(y_1,y_2)$$

являются решениями системы уравнений в вариациях (16).

Доказательство. Утверждение теоремы проверяется непосредственной подстановкой функций $F_\lambda(x_1,y_1;x_2,y_2)$, $G_\lambda(x_1,y_1;x_2,y_2)$ в уравнения в вариациях. □

Таким образом, исследована новая модель при ультраторичном квантовании по парам уравнения для матрицы плотности. Установлен важный математический факт: для одного из символов решения системы уравнений Гамильтона и системы уравнений в вариациях выражаются через решения соответствующих уравнений более простой модели, рассмотренной в [7]. Исследованная система содержит спектр, соответствующий *истинному* символу $\mathcal{H}$, полученный в работе [7].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 08-01-00601), НЦНИЛ (050102807) и КО (100192608).

Список литературы

1. *Маслов В.П., Шведов О.Ю.* Метод комплексного ростка в задаче многих частиц и квантовой теории поля. М., 2000.
2. *Маслов В.П.* Квантование термодинамики и ультравторичное квантование. Ижевск, 2000.
3. *Maslov V.P.* // Russ. J. Math. Phys. 2002. **9**, N 4. P. 437.
4. *Березин Ф.А.* Метод вторичного квантования. М., 1986.
5. *Маслов В.П.* Операторные методы. М., 1973.
6. *Маслов В.П.* // ТМФ. 2002. **132**, № 3. С. 388.
7. *Маслов В.П.* // ТМФ. 2005. **143**, № 3. С. 307.

Maslov symbol for density matrix in the case of pair quantization

D. S. Golikov

Department of Quqntum Statistics and Field Theory, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.
E-mail: dmitriy.golikov@gmail.com.

The ultrasecondary quantization methods applied to the equation for density matrix. The identity for ultrasecondary quantized hamiltonian was obtained, that allow to define the true symbol of the equation for density matrix by quantization by pair. The investigation of the corresponding system of variation equations shows that this quantum system possess the Maslov superfluidity model spectrum.

Keywords: ultrasecondary quantization, Maslov symbol, density matrix.
PACS: 05.30.Jp.
Received 23 February 2010.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 6(2010).

Сведения об авторе

Голиков Дмитрий Сергеевич — канд. физ.-мат. наук; тел.: (495) 939-12-90, e-mail: dmitriy.golikov@gmail.com.