КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Волны плотности кварковой материи в модели Намбу–Йона-Лазинио в магнитном поле

В. Ч. Жуковский[1,a], К. Г. Клименко[2,b], И. Е. Фролов[1]

[1] *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра теоретической физики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.*
[2] *Институт физики высоких энергий. 142281, Московская обл., Протвино, ул. Победы, д. 1.*
E-mail: [a] zhukovsk@phys.msu.ru, [b] kklim@ihep.ru

Статья поступила 03.06.2010, подписана в печать 02.07.2010

В рамках модели Намбу–Йона-Лазинио рассмотрена возможность образования статичных согласованных волн плотности скалярного и псевдоскалярного конденсатов в плотной кварковой среде при наличии внешнего магнитного поля. В приближении среднего поля найдено выражение для эффективного потенциала теории, проведено его исследование на экстремум численными методами; построена диаграмма состояния системы. Показано, что при низких температурах магнитное поле катализирует образование пространственно-неоднородных конфигураций конденсатов.

Ключевые слова: киральный конденсат, пионный конденсат, волны плотности, магнитный катализ.
УДК: 539.12.01. PACS: 11.30.Qc, 11.30.Rd, 12.38.Mh, 12.39.–x, 21.65.–f.

Введение

В настоящее время одной из наиболее распространенных эффективных теорий квантовой хромодинамики является модель Намбу—Йона-Лазинио (НЙЛ) [1]. Основываясь на механизме динамического нарушения киральной симметрии и образования кирального и пионного конденсатов, в ее рамках удается объяснить многие свойства кварков и легких мезонов.

При изучении физических явлений в рамках модели НЙЛ предполагается, как правило, что вакуумные конденсаты являются однородными и изотропными в пространстве. Это допущение, однако, может быть не вполне оправданным в области средних и больших плотностей материи и константы связи [2]. В литературе рассматривалась возможность образования статичных согласованных волн плотности кварк-антикваркового и пионного конденсатов (Dual-chiral density waves) [3] вида

$$\begin{aligned} \left\langle \overline{\psi}\psi \right\rangle &= \Delta \cos \boldsymbol{qr}, \\ \left\langle \overline{\psi} i\gamma^5 \tau_3 \psi \right\rangle &= \Delta \sin \boldsymbol{qr}, \\ \left\langle \overline{\psi} i\gamma^5 \tau_{1,2} \psi \right\rangle &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где Δ — амплитуда конденсата, $\boldsymbol{q}$ — фиксированный волновой вектор, τ_i — матрицы Паули; при этом $\left\langle \overline{\psi}\psi \right\rangle^2 + \left\langle \overline{\psi} i\gamma^5 \boldsymbol{\tau} \psi \right\rangle^2 = \Delta^2$ в любой точке пространства. Показано, что волны плотности в кварковой среде образуются при низких температурах в переходной области между массивной и безмассовой фазами модели НЙЛ. Поведение системы во внешних полях, однако, не исследовалось.

В настоящей работе мы рассмотрим возможность образования конфигурации кондесатов указанного типа при наличии внешнего магнитного поля.

1. Физическая модель

Будем исследовать модель, используемую в [3], учитывая $N_f = 2$ сорта кварков (u и d) с нулевой токовой массой и $N_c = 3$ цвета. При конфигурации вакуумных конденсатов (1) лагранжиан НЙЛ в приближении среднего поля имеет вид

$$\mathcal{L} = \overline{\psi} \left(i\gamma D + \mu\gamma^0 - m \left(\cos \boldsymbol{qr} + i\gamma^5 \tau_3 \sin \boldsymbol{qr} \right) \right) \psi - \frac{m^2}{4G}, \tag{2}$$

где $m = -2G\Delta$, G — константа связи, μ — химпотенциал; $D = \partial + iQeA$, Q — оператор электрического заряда (с собственными значениями $Q_u = 2/3$ и $Q_d = -1/3$), A — потенциал электромагнитного поля; $e > 0$. Мы будем считать, что волновой вектор $\boldsymbol{q}$ и вектор напряженности магнитного поля $\boldsymbol{H}$ направлены вдоль одной оси z.

Легко видеть, что преобразование полей $\psi \to e^{i\gamma^5 \tau_3 bx} \psi$, $\overline{\psi} \to \overline{\psi} e^{i\gamma^5 \tau_3 bx}$, где $b = q/2$, $q^\mu \equiv (0, \boldsymbol{q})$, $x^\mu \equiv (t, \boldsymbol{r})$, приводит (2) к виду

$$\mathcal{L} = \overline{\psi} \left(i\gamma D + \mu\gamma^0 - m + \gamma^5 \tau_3 \gamma b \right) \psi - \frac{m^2}{4G}, \tag{3}$$

при этом мера континуального интеграла $\mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi$ остается инвариантной, в чем нетрудно убедиться, применяя метод Фуджикавы [4]. Слагаемое $\overline{\psi}\gamma^5 \tau_3 \gamma b \psi$ в (3) представляет собой фоновое CPT-нечетное аксиально-векторное взаимодействие фермионов.

2. Эффективное действие

Нетрудно видеть, что для теории, описываемой лагранжианом (3), в однопетлевом приближении задача формально сводится к нахождению эффективного действия для одного электрона (с соответствующей заменой величины электрического заряда частицы e на $|Q_u|e$ и $|Q_d|e$; при этом мы считаем частицу отрицательно заряженной):

$$\Gamma^{(1)}=\int d^4x\left(-\frac{m^2}{4G}\right)+N_c\,\Gamma^{(1)}_{\overline{e}}\big|_{e\to|Q_u|e}+N_c\,\Gamma^{(1)}_{\overline{e}}\big|_{e\to|Q_d|e},\tag{4}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^{(1)}_{\overline{e}}&=\frac{1}{i}\ln\mathrm{Det}\left(i\gamma D+\mu\gamma^0-m-\gamma^5\gamma b\right)=\\&=\frac{1}{i}\ln\mathrm{Det}\left(i\partial^0+\mu-H_{\mathrm{D}}\right),\end{aligned}\tag{5}$$

где $H_{\mathrm{D}}=\boldsymbol{\alpha P}+\gamma^0m-\Sigma_3b$ — модифицированный дираковский гамильтониан, $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{p}+e\boldsymbol{A}$; здесь и далее $b^\mu=(0,0,0,b)$, $\boldsymbol{H}=(0,0,H)$, $H>0$. Для вычисления выражения (5) нам необходимы собственные функции и спектр гамильтониана H_{D}.

Пусть $\boldsymbol{A}=(0,Hx,0)$. Поскольку $[\Sigma_3,(\boldsymbol{\alpha P})^2]=0$, то собственные функции H_{D} имеют стандартный вид (подробности см. в [5]):

$$\Psi_{nqp}(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{ipz}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{iqy}\begin{pmatrix}c_1u_{n-1}(\xi)\\ ic_2u_n(\xi)\\ c_3u_{n-1}(\xi)\\ ic_4u_n(\xi)\end{pmatrix}(eH)^{1/4},$$

где $u_n(\xi)$ — функции Эрмита, $\xi=\sqrt{eH}x+\frac{q}{\sqrt{eH}}$, $\{c_i\}$ — спиновые коэффициенты. При каждом фиксированном $n>0$ мы имеем задачу на собственные значения для матрицы K (размером 4×4) и столбца $\{c_i\}$, где

$$K=\alpha_1p_\perp+\alpha_3p+\gamma^0m-\Sigma_3b,\quad p_\perp=\sqrt{2eHn}.$$

Выполним унитарное преобразование $\widetilde{K}=U^{-1}KU$, где $U=e^{i\Sigma_2\frac{\pi}{2}}e^{i\gamma^0\Sigma_2\frac{\pi}{2}}$, тогда

$$\begin{gathered}\widetilde{K}=\alpha_1\widetilde{p}_\perp+\alpha_3\widetilde{p}+\gamma^0m+\gamma^0\Sigma_3\widetilde{\mu}H,\\ \widetilde{p}_\perp=p,\quad \widetilde{p}=-p_\perp,\quad \widetilde{\mu}H=b.\end{gathered}$$

Матрица $\widetilde{K}$ соответствует задаче о движении электрона с аномальным магнитным моментом $\widetilde{\mu}$; решения такой задачи известны[1] [6]. Случай $n=0$ требует, однако, отдельного рассмотрения в явном виде; оно не представляет сложностей.

Окончательное выражение для спектра имеет вид

$$E_{np\zeta\epsilon}=\begin{cases}\epsilon\sqrt{\left(\zeta\sqrt{m^2+p^2}+b\right)^2+2eHn}, & n>0,\\ \epsilon\sqrt{m^2+p^2}+b, & n=0,\end{cases}\tag{6}$$

где $n=0,1,\ldots$, $-\infty<p<\infty$, $\zeta=\pm1$, $\epsilon=\pm1$. При $n=0$ спиновое квантовое число ζ не входит в спектр, кроме этого, всегда имеет место вырождение по q $(-\infty<q<\infty)$. Отметим, что асимметрия спектра частиц и античастиц при $n=0$ связана с CPT-нечетностью рассматриваемого нами взаимодействия и наличием выделенного направления $\boldsymbol{H}$.

Зная явный вид волновых функций, мы можем по теории возмущений найти поправку к энергии $\Delta E_\perp$, обусловленную отклонением $\boldsymbol{b}$ от направления $\boldsymbol{H}$. Пусть $\boldsymbol{b}=(b_\perp,0,b)$. Опуская промежуточные выкладки, приведем соответствующее асимптотическое выражение (построенное с учетом возможного пересечения близких невозмущенных уровней):

$$\Delta E_\perp=\sum_\pm\left(f_\pm|_{\epsilon'=\epsilon}+g_\pm|_{\epsilon'=-\epsilon}\right)\big|_{n'=n\pm1,\,\zeta'=-\zeta},$$

где

$$f_\pm=\frac{1}{2}\left(-E+E'+\mathrm{sgn}_\pm(E-E')\sqrt{(E-E')^2+4D_\pm}\right),$$

$$g_\pm=\frac{D_\pm}{E-E'},$$

$$D_\pm=2b_\perp^2\left(1\mp\zeta'\epsilon'\sqrt{1-\frac{2eHn'}{E'^2}}\right)\left(1\pm\zeta\epsilon\sqrt{1-\frac{2eHn}{E^2}}\right),$$

и мы ввели обозначения: $E\equiv E_{np\zeta\epsilon}$, $E'\equiv E_{n'p'\zeta'\epsilon'}$; функция $\mathrm{sgn}_\pm(x)$ возвращает знак своего аргумента при $x\neq0$ и подчиняется условию $\mathrm{sgn}_\pm(0)=\pm1$. Ее использование обусловлено тем, что мы хотим сохранить за $\Delta E_\perp$ смысл малой поправки к исходному энергетическому уровню E с определенным набором введенных нами квантовых чисел $np\zeta\epsilon$ (по крайней мере, вдали от точек пересечения невозмущенных уровней).

Вводя нормировочный 4-объем $L_tL_xL_yL_z$, мы можем теперь вычислить (5):

$$\begin{aligned}\Gamma^{(1)}_{\overline{e}}&=\frac{1}{i}\ln\mathrm{Det}\left(i\partial^0+\mu-H_{\mathrm{D}}\right)=\\&=\frac{1}{2i}\,\mathrm{Tr}\ln\left(-(i\partial^0)^2+(H_{\mathrm{D}}-\mu)^2\right)=\\&=\frac{1}{2i}\int dp^0\sum_{(n)}\int d^4x\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{ip^0t}\,\Psi^+\times\\&\quad\times\ln\left(-(i\partial^0)^2+(H_{\mathrm{D}}-\mu)^2\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-ip^0t}\,\Psi=\\&=\frac{1}{2i}\int dp^0\sum_{(n)}\ln\left(-(p^0)^2+(E-\mu)^2\right)\frac{L_t}{2\pi}\frac{L_z}{2\pi}\frac{L_y}{2\pi}.\end{aligned}$$

В последнем выражении (n) обозначает совокупность всех квантовых чисел, при этом

$$\sum_{(n)}=\sum_{n\zeta\epsilon}\int dp\int dq=\sum_{n\zeta\epsilon}\int dp\,eHL_x,$$

так как $q=-x_0\,eH$, где x_0 — координата «центра» волновой функции Ψ по оси x. Для получения термодинамического потенциала системы при конечной температуре T мы применим технику Мацубары [7]:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dp^0}{2\pi}\to\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\frac{dp^0}{2\pi}=i\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dp^4}{2\pi}\to i\frac{1}{\beta}\sum_{k=-\infty}^{+\infty},$$

при этом $p^4\to\omega_k=\frac{2\pi}{\beta}\left(k+\frac{1}{2}\right)$, где $\beta=1/T$; сумма по k может быть взята аналитически.

Окончательно для термодинамического потенциала $\Omega=-\frac{\Gamma^{(1)}}{L_tL_xL_yL_z}$ получим

$$\Omega=\frac{m^2}{4G}+N_c\,\Omega_{\overline{e}}|_{e\to|Q_u|e}+N_c\,\Omega_{\overline{e}}|_{e\to|Q_d|e},\tag{7}$$

[1] Отметим, что вид спиновых коэффициентов не зависит от выбора калибровки потенциала $\boldsymbol{A}$.

$$\Omega_{\bar{e}} = -\frac{1}{2}\frac{eH}{(2\pi)^2}\int dp \sum_{n\zeta\epsilon}\left(|E-\mu| + \frac{2}{\beta}\ln\left(1+e^{-\beta|E-\mu|}\right)\right). \tag{8}$$

Выражение (8) содержит расходящийся вакуумный вклад (соответствующий $\mu = 0$, $T = 0$). Для его регуляризации мы применим метод собственного времени [8]:

$$\Omega_{\text{v}} = -\frac{1}{2}\frac{eH}{(2\pi)^2}\int dp \sum_{n\zeta\epsilon}|E| \to \\ \to \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\frac{eH}{(2\pi)^2}\int dp \sum_{n\zeta\epsilon}\int\limits_{1/\Lambda^2}^{+\infty}\frac{ds}{s\sqrt{s}}\,e^{-sE^2},$$

где Λ — размерный параметр обрезания. Следует отметить, что, несмотря на конечность выражения $\Omega_{\bar{e}} - \Omega_{\text{v}}$, его явное вычисление (как разности расходящихся объектов) также требует введения промежуточной регуляризации для получения корректного ответа при отсутствии симметрии между спектрами частиц и античастиц. В частности, возможно введение обрезающего множителя $\theta(\Lambda' - |E|)$, где $\Lambda' > \Lambda$.

3. Диаграмма состояния

Для изучения фазовых переходов в системе было проведено численное исследование потенциала (7) на минимум относительно независимых параметров m и b при различных значениях химпотенциала μ и напряженности внешнего магнитного поля H при $T = 0$. Найденный минимум проверялся на стабильность относительно малых отклонений b от направления $\boldsymbol{H}$. При вычислениях использовались величины, обезразмеренные с помощью параметра обрезания Λ; мы обозначим их теми же символами, что и исходные. Максимальная величина относительной ошибки была задана на уровне 10^{-3}, абсолютной — 10^{-8}.

Зависимость параметра b от внешних условий при $G = 6$ представлена на рис. 1. Фазовая диаграмма для этого случая изображена на рис. 2. При $H \to 0$ наш результат непрерывно переходит в результат, полученный в [3]. При $H > 0$ наблюдается модификация характерной для модели НЙЛ в магнитном поле структуры фаз[1] (подробности о последней см., например, в [9]). Пространственно-неоднородные конфигурации конденсатов (для которых $b \neq 0$) образуются всюду в области массивных фаз B и C (кроме случая $\mu = 0$), при этом параметр b плавно увеличивается с ростом напряженности магнитного поля; последнее способствует также дальнейшему развитию новой (обнаруженной в [3]) фазы D с выраженной пространственной неоднородностью конденсатов при $H \to 0$ (в фазах B и C указанная неоднородность отсутствует при $H = 0$); симметричная безмассовая фаза A ограничена фазой D при больших значениях H.

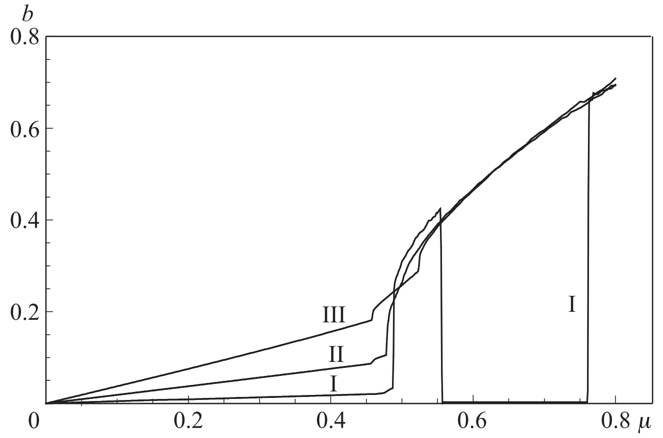

Рис. 1. Зависимость параметра b от химпотенциала μ при $G = 6$ и $T = 0$ для $\sqrt{eH} = 0.15$ (I), 0.3 (II) и 0.45 (III) (все величины безразмерны). На графике I наблюдается участок с $b = 0$, соответствующий симметричной фазе с $m = 0$

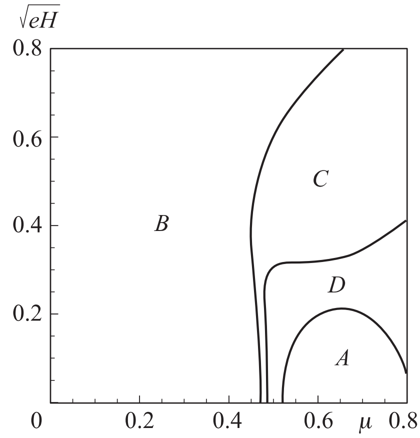

Рис. 2. Фазовая диаграмма кварковой материи при $G = 6$ и $T = 0$. Параметры μ и $\sqrt{eH}$ безразмерны. Наряду с симметричной фазой A и массивными фазами B и C отмечена фаза D с выраженной пространственной неоднородностью конденсатов при $H \to 0$

Заключение

Исходя из полученных в настоящей работе результатов, мы можем говорить о магнитном катализе образования пространственно-неоднородных конфигураций конденсатов в рамках модели НЙЛ. Нетрудно установить, что данное явление обязано своим существованием особенности в спектре (6) при $n = 0$, а именно нарушению симметрии между спектрами фермионов и антифермионов. Исключение слагаемых с $n = 0$ из (8) при численных расчетах приводит к исчезновению эффекта. Как отмечено в [3], линейный рост параметра b с увеличением химпотенциала μ характерен для одномерных систем; это согласуется с тем фактом, что, как известно, движение фермионов в сильном внешнем магнитном поле носит эффективно одномерный характер.

Авторы выражают благодарность А. Е. Лобанову, а также А. В. Тюкову за ценные замечания и участие

[1] В настоящей работе мы не выделяем рассмотренные в [9] осцилляционные последовательности фаз одного типа, считая их за единую фазу.

в плодотворной дискуссии при проведении нашего исследования.

Список литературы

1. *Nambu Y., Jona-Lasinio G.* // Phys. Rev. 1961. **124**. P. 246.
2. *Deryagin D.V., Grigoriev D.Y., Rubakov V.A.* // Int. J. Mod. Phys. A. 1992. **7**. P. 659.
3. *Nakano E., Tatsumi T.* // Phys. Rev. D. 2005. **71**. P. 114006.
4. *Fujikawa K.* // Phys. Rev. D. 1980. **21**. P. 2848.
5. *Соколов А.А., Тернов И.М.* Релятивистский электрон. М., 1983.
6. *Тернов И.М., Багров В.Г., Жуковский В.Ч.* // Вестник Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1966. № 1. С. 30.
7. *Matsubara T.* // Prog. Theor. Phys. 1955. **14**. P. 351.
8. *Schwinger J.* // Phys. Rev. 1951. **82**. P. 664.
9. *Ebert D., Klimenko K.G., Vdovichenko M.A., Vshivtsev A.S.* // Phys. Rev. D. 1999. **61**. P. 025005.

Density waves in quark matter within the Nambu–Jona-Lasinio model in an external magnetic field

V. Ch. Zhukovsky [1,a], **K. G. Klimenko** [2,b], **I. E. Frolov** [1]

[1] *Department of Theoretical Physics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.*
[2] *Institute for High Energy Physics, Pobedy str. 1, Protvino, Moscow Region 142281, Russia.*
E-mail: [a] *zhukovsk@phys.msu.ru,* [b] *kklim@ihep.ru.*

A possibility of formation of static dual scalar and pseudo-scalar density wave condensates in a dense quark matter is considered for the Nambu–Jona-Lasinio model in an external magnetic field. Within a mean-field approximation, the effective potential of the theory is obtained and its extrema are numerically studied; a phase diagram of the system is constructed. It is shown that the presence of a magnetic field favours the formation of spatially inhomogenious condensate configurations at low temperatures.

Keywords: chiral condensate, pion condensate, density waves, magnetic catalysis.
PACS: 11.30.Qc, 11.30.Rd, 12.38.Mh, 12.39.–x, 21.65.–f.
Received 3 June 2010.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 6(2010).

Сведения об авторах

1. Жуковский Владимир Чеславович — докт. физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939-31-77, e-mail: zhukovsk@phys.msu.ru.
2. Клименко Константин Григорьевич — докт. физ.-мат. наук, профессор, гл. науч. сотр; тел.: (496) 77-1-40-33, e-mail: kklim@ihep.ru.
3. Фролов Игорь Евгеньевич — аспирант; тел.: (495) 939-31-77, e-mail: igor.e.frolov@gmail.com.