Новое определение регулярности представления алгебры канонических коммутационных соотношений

Ю. С. Вернов[1,3,a], М. Н. Мнацаканова[2,b], С. Г. Салынский[3]

[1] *Институт ядерных исследований Российской академии наук. 117312, Москва, В-312, просп. 60-летия Октября, д. 7а.*

[2] *Научно-исследовательский институт ядерной физики имени Д. В. Скобельцына (НИИЯФ МГУ). Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.*

[3] *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра квантовой теории и физики высоких энергий. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.*

E-mail: [a] *vernov@inr.ac.ru,* [b] *mnatsak@theory.sinp.msu.ru*

Статья поступила 04.06.2010, подписана в печать 02.09.2010

Дан новый критерий регулярности представления алгебры канонических коммутационных соотношений на основе понятия об аналитическом векторе.

Ключевые слова: квантовая теория, канонические коммутационные соотношения.

УДК: 530.1. PACS: 03.65.Ta.

Введение

В основе квантовой механики лежит алгебра канонических коммутационных соотношений (ККС), причем основную роль играют ее представления, названные регулярными (различные определения регулярности представлений алгебры ККС будут приведены ниже). Обзор ККС сделан в работе [1]. В настоящей работе будет дан новый критерий регулярности представления алгебры ККС на основе понятия об аналитическом векторе, введенном в [2].

В простейшем случае одного измерения ККС имеют вид

$$[\hat{p},\hat{q}] = -i\hat{I}, \tag{1}$$

где $\hat{p}$ и $\hat{q}$ — самосопряженные операторы (в квантовой механике операторы импульса и координаты соответственно).

Отметим хорошо известный факт, что в случае произвольного, но конечного, числа операторов, т. е. в случае, когда

$$[\hat{p}_i,\hat{q}_k] = -i\delta_{ik}; \quad 1 \leqslant i,k \leqslant n,$$

мы имеем ту же картину, что и в случае двух операторов $\hat{p}$ и $\hat{q}$. Учитывая это, ограничимся случаем, когда выполнено равенство (1). Подчеркнем, что в случае бесконечного числа операторов, т. е. в случае квантовой теории поля, мы имеем более сложную картину, рассмотрение которой находится за рамками настоящей работы.

Наиболее известное представление ККС — представление Шрёдингера, которое реализуется в пространстве $L_2(-\infty,+\infty)$, т. е. в пространстве функций $f(x)$, таких, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\,dx < \infty$. Данное представление является регулярным. В нем операторы $\hat{p}$ и $\hat{q}$ определяются следующим образом:

$$\hat{q}f(q) = qf(q), \quad \hat{p}f(q) = -i\frac{\partial}{\partial q}f(q). \tag{2}$$

Одно из определений регулярности представлений алгебры ККС, использующее регулярность шрёдингеровского представления, следующее определение.

Определение 1. Всякое представление ККС, унитарно эквивалентное шрёдингеровскому, называется регулярным.

Отметим одно важное обстоятельство: не существует реализации представления алгебры ККС ограниченными операторами [1], по крайней мере, один из операторов $\hat{p}$ и $\hat{q}$ должен быть неограниченным. Напомним, что в замкнутом пространстве неограниченные операторы не могут быть заданы во всем пространстве, а только в плотной области.

Существуют различные определения регулярности представления алгебры ККС. Подчеркнем, что речь идет о представлениях в гильбертовом пространстве. Вместе с тем, ККС рассматривались и в пространстве с индефинитной метрикой [3]. Отметим, что в ковариантной теории калибровочных полей неизбежен переход от гильбертова пространства к пространству с индефинитной метрикой [4, 5].

Важным вкладом в описание регулярных представлений алгебры ККС стала теорема Реллиха–Диксмье, демонстрирующая, что представления алгебры ККС регулярны для весьма широкого класса операторов [1].

Теорема Реллиха–Диксмье. *Самосопряженные операторы $\hat{p}$ и $\hat{q}$ образуют регулярное представление алгебры ККС, если*:

1) *существует плотная область* $D = D(\hat{p}) \cap D(\hat{q})$, *в которой выполняется соотношение* (1);

2) *оператор* $(\hat{p}^2 + \hat{q}^2)$ *— самосопряженный оператор в* D.

Отметим, что Фугледе построил пример нерегулярного представления в случае, когда выполнено только условие 1 [6].

Простым примером нерегулярного представления алгебры ККС является представление, заданное операторами (2), но в пространстве $L_2(a,b)$.

ККС могут быть также заданы в форме

$$[\hat{a},\hat{a}^*] = \hat{I}, \tag{3}$$

где оператор $\hat{a}$ и сопряженный ему оператор $\hat{a}^*$ равны соответственно

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{q} - i\hat{p}) \quad \text{и} \quad \hat{a}^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{q} + i\hat{p}). \tag{4}$$

Легко проверить, что в регулярном представлении оператор $\hat{N} = \hat{a}^*\hat{a}$ в гильбертовом пространстве имеет следующий спектр $\operatorname{Sp}\hat{N} = \mathbb{N}$.

Характерной чертой регулярных представлений алгебры ККС в пространстве Гильберта является наличие вакуумного вектора. Такие представления получили название фоковских. Действительно, согласно (1) и (4), вектор $\psi_0 = Ce^{-q^2/2}$ удовлетворяет условию $\hat{a}\psi_0 = 0$, и, следовательно, $\hat{N}\psi_0 = 0$. Хотя все определения регулярных представлений эквивалентны, некоторые из них являются более удобными для исследования ККС в более общих пространствах, чем гильбертово, а именно, в пространствах с индефинитной метрикой, в частности в пространстве Крейна [7, 8]. Так, например, требование существования собственного вектора у оператора $\hat{N}$

$$\hat{N}\psi_\alpha = \alpha\psi_\alpha \tag{5}$$

приводит к описанию регулярных представлений в пространстве Крейна [3].

Тот факт, что операторы $\hat{p}$ и $\hat{q}$ и соответственно $\hat{a}$ и $\hat{a}^*$ неограниченные, приводит к техническим трудностям, связанным с определением областей, в которых они могут быть заданы. Эта трудность устраняется при задании ККС в форме Вейля:

$$e^{it\hat{p}}e^{is\hat{q}} = e^{ist}e^{is\hat{q}}e^{it\hat{p}}. \tag{6}$$

Известно, что, согласно теореме Стоуна, операторы $e^{it\hat{p}}$ и $e^{is\hat{q}}$ ограниченные, поскольку $\hat{p}$ и $\hat{q}$ — самосопряженные операторы [9].

Вейлевская форма записи ККС широко используются в квантовой механике (см., например, [10]). До настоящего времени представления ККС в форме Вейля рассматривались в гильбертовом пространстве, но, подобно представлениям ККС в стандартной форме, естественно изучить статус вейлевского представления в пространстве с индефинитной метрикой, что будет сделано в следующей нашей работе.

Для этой цели, а возможно, не только для нее, может оказаться полезным новый критерий регулярности представлений, что и составляет предмет настоящей работы.

Аналитические векторы и их связь с представлением ККС в форме Вейля

Напомним определение аналитического вектора, введенное в работе [2].

Определение 2. Пусть $\hat{A}$ — линейный оператор в гильбертовом пространстве H. Вектор $\xi \in H$ называется аналитическим вектором для оператора $\hat{A}$, если ξ принадлежит области определения операторов $\hat{A}^k$ $\forall k \in \mathbb{N}$ и для некоторого $t > 0$ сходится ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\|\hat{A}^k\xi\|. \tag{7}$$

В этом случае мы можем определить оператор $\exp(t\hat{A})$ его рядом Тейлора

$$e^{t\hat{A}}\xi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\hat{A}^k\xi \tag{8}$$

для тех ξ, для которых ряд (8) сходится. Сформулируем критерий регулярности представления алгебры ККС в виде следующей теоремы. Докажем, что представление алгебры ККС является регулярным, если существует плотная область D такая, что любой вектор $\xi \in D$ удовлетворяет условиям

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\|\hat{q}^k\xi\| < \infty \quad \forall t > 0, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!}\|\hat{p}^k\xi\| < \infty \quad \forall s > 0 \tag{9}$$

и что любое регулярное представление удовлетворяет условиям (9).

Докажем сначала регулярность рассматриваемого представления. Представленное доказательство аналогично соответствующему доказательству в [1], но без предположения об ограниченности операторов $\hat{p}$ и $\hat{q}$. Из соотношения (1) непосредственно следует, что

$$\hat{p}\,\hat{q}^n - \hat{q}^n\,\hat{p} = -i(\hat{q}^n)' \tag{10}$$

(штрих означает производную d/dq). Следовательно, вследствие (10) и (9)

$$\hat{p}e^{is\hat{q}} - e^{it\hat{p}}\hat{p} = -i(e^{it\hat{q}})'. \tag{11}$$

Из (11) непосредственно следует, что

$$e^{-it\hat{q}}\hat{p}e^{it\hat{q}} = (\hat{p} + t\hat{I}),$$

и, следовательно,

$$e^{-it\hat{q}}\hat{p}^n e^{it\hat{q}} = (\hat{p} + t\hat{I})^n. \tag{12}$$

Воспользовавшись снова условием (9), получим, что

$$U_tV_s = e^{its}V_sU_t, \quad U_t \equiv e^{it\hat{p}}, \quad V_s \equiv e^{is\hat{q}}. \tag{13}$$

Таким образом, доказано существование соотношения Вейля (13) в области D.

Следующий шаг — распространение представления Вейля на все пространство H. Для этого достаточно заметить, что D — плотная область, а U_t и V_s, согласно теореме Стоуна, — ограниченные операторы. Отметим, что теорема Стоуна накладывает некоторые, но весьма слабые, условия на группы U_t и V_s [11].

Осталось доказать, что из выполнения соотношения (13) в H следует регулярность рассматриваемого представления. Но этот результат составляет содержание теоремы фон Неймана (см., например, [1]). Заметим, что поскольку всякое регулярное представление является прямой суммой неприводимых представлений, то достаточно рассмотреть только неприводимое представление.

Остается доказать, что всякое регулярное представление содержит аналитические векторы в плотной области и, следовательно, удовлетворяет соотношению Вейля (13) в H. Для этого удобно воспользоваться соотношением ККС в форме (3). В этом случае

$$\hat{q} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a} + \hat{a}^*), \quad \hat{p} = \frac{1}{i\sqrt{2}}(\hat{a} - \hat{a}^*). \tag{14}$$

Докажем, что у оператора $\hat{q}$ есть аналитический вектор в плотной области D. В регулярном представлении мы можем построить ортогональный базис из собственных векторов ψ_n оператора $\hat{N} = \hat{a}^*\hat{a}$. Из соотношений (3) и (5) видно, что $\mathrm{Sp}\,\hat{N} = \mathbb{N}$. Легко получить, что

$$(\psi_n, \psi_n) = n!\,, \tag{15}$$

где $\psi_n = (\hat{a}^*)^n\psi_0$, ψ_0 — вакуумный вектор, $(\psi_0, \psi_0) = 1$. Далее легко показать, что

$$(\hat{a}^*\psi_n, \hat{a}^*\psi_n) = (n+1)!\,, \quad (\hat{a}\psi_n, \hat{a}\psi_n) = n!\,. \tag{16}$$

Формулы (15) и (16) хорошо известны из теории квантового гармонического осциллятора (см., например, [12]). Рассмотрим область D, состоящую из всех конечных линейных комбинаций векторов ψ_n. Поскольку H состоит из всех конечных или сходящихся линейных комбинаций векторов ψ_n, то D — плотная область. Норму вектора ψ_n можно определить формулой $\|\psi_n\| = \sqrt{(\psi_n, \psi_n)}$. Согласно (15),

$$\|\psi_n\| = \sqrt{n!}. \tag{17}$$

Соответственно для вектора

$$\psi = \sum_m^{m+n} C_k\psi_k \tag{18}$$

мы, согласно (15)–(17), имеем следующую оценку:

$$\|\hat{q}\psi\| \leqslant \sum_m^{m+n} \|C_k\hat{q}\psi_k\| \leqslant \sqrt{2}C\sqrt{(m+n+1)!}, \quad C = \max|C_k|, \quad m \leqslant k \leqslant m+n. \tag{19}$$

При выводе неравенства (19) мы учли, что

$$(\hat{a}^*\psi_n, \hat{a}^*\psi_n) = (\psi_n, (n+1)\psi_n) = (n+1)(\psi_n, \psi_n),$$
$$(\hat{a}\psi_n, \hat{a}\psi_n) = (\psi_n, n\psi_n) = n(\psi_n, \psi_n).$$

Согласно (19),

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\|\hat{q}^k\psi\| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}C^k\big(2(m+n+1)!\big)^{k/2}. \tag{20}$$

Ряд (20) очевидным образом сходится при любых конечных m и n.

Таким образом, доказано, что вектор ψ $\forall\,\psi \in D$ — аналитический вектор для оператора $\hat{q}$. Доказательство того, что произвольный вектор $\psi \in D$ — аналитический вектор для оператора $\hat{p}$, проводится аналогичным образом.

Заключение

В настоящей работе получен новый критерий регулярности представления алгебры ККС, основанный на понятии об аналитическом векторе. Есть основание полагать, что он окажется полезным для изучения представлений ККС в форме Вейля в пространстве с индефинитной метрикой.

Список литературы

1. *Putnam C.R.* Commutation properties of Hilbert space operators and related topics. Berlin; Heidelberg; N. Y., 1967. Ch. IV. P. 63.
2. *Nelson E.* // Ann. Math. 1959. **70**. P. 572.
3. *Mnatsakanova M., Morchio G., Strocchi F., Vernov Yu.* // J. Math. Phys. 1998. **39**. P. 2969.
4. *Morchio G., Strocchi F.* // Ann. Inst. H. Poincaré A. 1980. **33**. P. 251.
5. *Kugo T., Ojima I.* // Suppl. Prog. Theor. Phys. 1979. **66**. P. 1.
6. *Fuglede B.* // Math. Scand. 1967. **20**. P. 70.
7. *Bognar J.* Indefinite inner product spaces. Berlin; Heidelberg; N. Y., 1974.
8. *Азизов Т.Я., Иохвидов И.С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. М., 1986.
9. *Иосида К.* Функциональный анализ. М., 1967.
10. *Bratteli O., Robinson D.W.* Operator algebras and quantum statistical mechanics. V. 2. Berlin; Heidelberg; N. Y., 1979.
11. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М., 1979.
12. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Теория поля. М., 1988.

New definition of regularity for representation of canonical commutation relations algebras

Yu. S. Vernov[1,3,a], **M. N. Mnatsakanova**[2,b], **S. G. Salinsky**[3]

[1] *Institute for Nuclear research of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.*
[2] *D. V. Skobeltsyn Institute of Nuclear Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.*
[3] *Department of Quantum Theory and High Energy Physics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.*
E-mail: [a] *vernov@inr.ac.ru,* [b] *mnatsak@theory.sinp.msu.ru.*

New criterion of regularity for representation of canonical commutation relations algebras is given on the basis of concept of an analytical vector.

Keywords: quantum theory, canonical commutation relations.
PACS: 03.65.Ta.
Received 4 June 2010.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 6(2010).

Сведения об авторах

1. Вернов Юрий Сергеевич — докт. физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939-21-47, e-mail: vernov@inr.ac.ru.
2. Мнацаканова Мелита Николаевна — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр; тел.: (495) 939-50-79, e-mail: mnatsak@theory.sinp.msu.ru.
3. Салынский Сергей Геннадьевич — аспирант.