ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Исследование характера фазового перехода в сверхпроводящую фазу методом ренормализационной группы

О. Г. Карчев[a], А. М. Савченко[b]

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра квантовой статистики и теории поля. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
E-mail: [a] kog@taisu.ru, [b] a.m.savchenko@gmail.com

Статья поступила 09.06.2010, подписана в печать 28.09.2010

Исследуются фазовые переходы в магнитных системах при наличии спиновых флуктуаций и эффекта обменного усиления электрон-фононного взаимодействия. Показано, что флуктуации в данном случае играют существенную роль и определяют характер фазового перехода первого рода, близкого ко второму.

Ключевые слова: фазовый переход, ренормализационная группа, спиновые флуктуации.
УДК: 538.91. PACS: 73.43.Nq.

Задачу о фазовых переходах при наличии спиновых флуктуаций и эффекта обменного усиления электрон-фононного взаимодействия мы будем решать исходя из основополагающих принципов построения флуктуационной теории фазовых переходов в сложных магнитных системах [1–4]. Для этого нам нужно вывести эффективный флуктуационный гамильтониан вблизи линии фазовых переходов в сверхпроводящее (или антиферромагнитное) состояние.

Эффективный гамильтониан системы вблизи линии фазового перехода в сверхпроводящее состояние должен учитывать не только длинноволновые термодинамические флуктуации сверхпроводящего и магнитного параметров порядка, но и коротковолновые (быстрые) спиновые флуктуации, которые резонансным образом взаимодействуют с фононами. В наиболее простом случае, когда у нас имеется одна спиновая компонента и соответственно одна продольная спиновая мода, которая линейным образом взаимодействует с фононами, такой эффективный гамильтониан можно записать в следующем виде:

$$H^{\rm eff}_{\rm s+ph+su}=\sum_{k}\varepsilon_{\|k}\hat c^{z+}_{\boldsymbol k}\hat c^{z}_{\boldsymbol k}+\sum_{\boldsymbol k,\,v=1,2}\omega_{vc\boldsymbol k}\hat b^{+}_{\boldsymbol kv}\hat b_{\boldsymbol kv}+ +\sum_{k}\varepsilon_{c\boldsymbol k}\hat d^{+}_{3\boldsymbol k}\hat d_{3\boldsymbol k}+\int d\boldsymbol x\left\{-\frac12 J_0s\tau(\delta\Omega)^2+\frac{1}{2k_c^2}J_0s(\delta A_v)^2+ +T_c\left[-\frac12\tau|\Delta|^2+\frac{1}{2k_\xi^2}|\nabla_v\Delta|^2+\frac18\Gamma_\delta|\Delta|^4\right]\right\}. \quad (1)$$

В выражении (1) $\tau=(T_c/T)-1$ представляет собой расстояние до точки фазового перехода снизу. Величина T в выражении (1) определена с учетом того, что мы уже проинтегрировали по полям, которым в выражении (1) поставлены в соответствие квазиспиновые $(\hat c^{z+}_{\boldsymbol k},\hat c^{z}_{\boldsymbol k})$, фононные $(\hat b^{+}_{\boldsymbol kv},\hat b_{\boldsymbol kv})$ и квазифононные $(\hat d^{+}_{3\boldsymbol k},\hat d_{3\boldsymbol k})$ операторы [5]. Поля $\delta\Omega$, δA_ν в данном случае соответствуют длинноволновым флуктуациям амплитуды медленных (квазиравновесных) волн спиновой плотности, которые определяют величину спин-фононной связи $\tilde\zeta$.

Поскольку по мере приближения к точке фазового перехода флуктуации амплитуды медленных волн спиновой плотности возрастают, должна возрастать и парамагнитная восприимчивость $\chi=1/J_0s|\tau|$. Но с другой стороны, вблизи точки фазового перехода возрастает и длина когерентности и соответственно обменная корреляционная длина $\langle r_c\rangle=\langle r_{c0}\rangle|\tau|^{-\nu}$ $(\nu\cong 1/2)$, и поэтому эффективный параметр спин-фононной связи $\tilde\zeta$ должен оставаться инвариантным вблизи точки фазового перехода и его изменение может быть обусловлено лишь изменениями (флуктуациями) амплитуды медленных (квазиравновесных) волн спиновой плотности.

Поэтому, чтобы получить окончательное выражение для эффективного гамильтониана вблизи точки фазового перехода, мы должны разложить величину T_c в ряд по квадрату вариации параметра спин-фононной связи $(\delta\tilde\varsigma)^2$, т. е. фактически по квадрату вариации амплитуды квазиравновесной волны спиновой плотности $(\delta\Omega)^2$. Учитывая также, что коэффициент усиления параметра электрон-фононного взаимодействия K_y зависит от величины $\ln(1+\tilde\varsigma^2)$, можно записать разложение для критической температуры в следующем виде:

$$T_c=T_c^0\left[1+\frac{1}{(\lambda_{e-\rm ph}-\mu^*)}\cdot\frac{1}{k_y^2(\tilde\zeta_0^2)}\times \times\frac{\partial k_y}{\partial\ln(1+\tilde\zeta_0^2)}\cdot\frac{\tilde\zeta_0^2}{1+\tilde\zeta_0^2}(\delta\Omega)^2+\ldots\right],$$

где $\tilde\zeta$ — равновесное значение параметра спин-фононной связи [6]. Поскольку мы рассматриваем случай одной спиновой моды, то он соответствует антиферромагнитному случаю, когда $(k_s/k_c)\ll 1$, т. е. когда спектр спиновых волн близок к двукратно вырожденному. Интересно отметить, что ниже точки фазового перехода спектр продольной спиновой моды будет иметь вид $\omega_{\|k}=\sqrt{\frac{J_0s}{\chi}\left[\left(\frac{k}{k_c}\right)^2-\tau\right]}$. Выше точки фазового перехода в парамагнитной фазе в этом выражении знак τ изменяется на противоположный.

Аналогично выше точки фазового перехода необходимо поменять знак и в выражении для T_c, так как все действительные значения магнитного и сверхпроводящего параметров порядка в парамагнитной фазе равны нулю и параметр спин-фононной связи должен убывать по мере возрастания температуры, т. е. при удалении от точки фазового перехода. Учитывая эти соображения, мы можем записать выражение для эффективного гамильтониана системы вблизи точки фазового перехода в сверхпроводящее состояние в следующем виде:

$$H^{\text{eff}}_{\text{s+su}} = J_0 s \int d\boldsymbol{x} \Bigg\{ \frac{1}{2}\tau^0(\delta\Omega)^2 + \frac{1}{2k_c^2}(\nabla_v \delta\Omega)^2 + \frac{1}{8}\Gamma_2(\delta\Omega)^4 + \\ + \frac{1}{2}\frac{T_c^2}{J_0 s}\tau^0|\Delta|^2 + \frac{1}{2k_\xi^2}|\nabla_v\Delta|^2 + \frac{1}{8}\Gamma_\delta|\Delta|^4 + \frac{1}{4}\Gamma_{\delta 2}|\Delta|^2(\delta\Omega)^2 \Bigg\}, \tag{2}$$

где

$$\Gamma_2 = 4Q(\tilde\zeta_0^2), \quad \Gamma_\delta = \frac{T_c^2}{J_0 s}\frac{1}{3\pi}, \quad \Gamma_{\delta 2} = \frac{2T_c^2}{J_0 s}Q(\tilde\zeta_0^2),$$

$$Q(\tilde\zeta_0^2) = \frac{1}{(\lambda_{e-\text{ph}} - \mu^*)}\frac{1}{k_y^2(\tilde\zeta_0^2)}\frac{\partial k_y}{\partial \ln(1+\tilde\zeta_0^2)}\frac{\tilde\zeta_0^2}{1+\tilde\zeta_0^2}.$$

Для того чтобы теперь рассмотреть вопрос о характере фазовых переходов в системе, описываемой эффективным гамильтонианом (2), необходимо воспользоваться методом ренормализационной группы. Используя метод ренормализационной группы и ε-разложения, мы можем записать в общем случае уравнения для соответствующих амплитуд и температур эффективного гамильтониана (2) в случае когда $\tau^0 \to 0$, т. е. когда оба поля оказываются сильно флуктуирующими. Тогда уравнения ренормализационной группы (РГ) будут иметь вид

$$\begin{aligned}
&-\tilde\Gamma_2' = (n_2+8)\tilde\Gamma_2^2 + n_\delta\tilde\Gamma_{\delta 2}^2,\\
&-\tilde\Gamma_\delta' = (n_\delta+8)\tilde\Gamma_\delta^2 + n_2\tilde\Gamma_{\delta 2}^2,\\
&-\tilde\Gamma_{\delta 2}' = (n_2+2)\tilde\Gamma_{\delta 2}\tilde\Gamma_2 + (n_\delta+2)\tilde\Gamma_{\delta 2}\tilde\Gamma_2 + 4\tilde\Gamma_{\delta 2}^2,\\
&-\tau_2' = (n_2+2)\tau_2\tilde\Gamma_2 + n_\delta\tau_\delta\tilde\Gamma_{\delta 2},\\
&-\tau_\delta' = (n_\delta+2)\tau_\delta\tilde\Gamma_\delta + n_2\tau_2\tilde\Gamma_{\delta 2},\\
&x = \frac{2}{(\varepsilon/2)(\Lambda^2)^{\varepsilon/2}}\left\{\left(\frac{\Lambda^2}{\max[\lambda^2(\tau_2,\tau_\delta),\delta\Omega_0^2,|\Delta_0|^2]}\right)^{\varepsilon/2} - 1\right\},\\
&\quad \varepsilon \to 0.
\end{aligned}$$

Вводя новые переменные $y_\delta = \tilde\Gamma_\delta/\tilde\Gamma_2$, $y_{\delta 2} = \tilde\Gamma_{\delta 2}/\tilde\Gamma_2$, $\mu_\delta = \tau_\delta/\tau_2$, $z = -\ln\tilde\Gamma_2$, $u = -\ln\tau_2$, уравнения можно преобразовать к следующему виду:

$$\begin{aligned}
\frac{dy_\delta}{dz} &= \frac{8y_\delta(1-y_\delta) + (n_2 - n_\delta y_\delta)(y_\delta - y_{\delta 2}^2)}{n_2 + 8 + n_\delta y_{\delta 2}^2},\\
\frac{dy_{\delta 2}}{dz} &= y_{\delta 2}\frac{6 - (n_\delta+2)y_\delta - y_{\delta 2}(4 - n_\delta y_{\delta 2})}{n_2 + 8 + n_\delta y_{\delta 2}^2},\\
\frac{d\mu_\delta}{du} &= \frac{(n_2+2)\mu_\delta - n_2 y_{\delta 2} - \mu_\delta[(n_\delta+2)y_\delta - n_\delta\mu_\delta y_{\delta 2}]}{n_2 + 2 + n_\delta\mu_\delta y_{\delta 2}}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь n_2 и n_δ — размерности флуктуирующих полей. Теперь, для того чтобы решить вопрос о характере фазовых переходов в рассматриваемой системе, нам нужно исследовать уравнения (3) на устойчивость, т. е. определить их стационарные точки и исследовать на устойчивость поведения фазовых траекторий вблизи стационарных точек. С этой точки зрения наиболее удобно исследовать систему уравнений для амплитуд y_δ и $y_{2\delta}$, так как она содержит достаточно полную информацию о характере фазовых переходов в системе. Стационарные уравнения для амплитуд имеют вид

$$\begin{aligned}
0 &= 8y_\delta(1-y_\delta) + (n_2 - n_\delta y_\delta)(y_\delta - y_{\delta 2}^2),\\
0 &= y_{\delta 2}[6 - (n_\delta+2)y_\delta - y_{\delta 2}(4 - n_\delta y_{\delta 2})].
\end{aligned}$$

Вид стационарных точек данных уравнений, их число и особенности будут зависеть от размерности флуктуирующих полей $\delta\Omega$ и Δ, n_2 и n_δ. Размерность флуктуирующего поля Δ, соответствующего сверхпроводящему параметру порядка, может принимать значения 1 (если мы учитываем только флуктуации амплитуды сверхпроводящего параметра порядка) и 2 (если мы учитываем флуктуации амплитуды и фазы). Размерность флуктуирующего поля n_2 также может принимать значения 1 и 2, так как в общем случае квазиравновесная волна спиновой плотности имеет две составляющие. При $n_2 = n_\delta = 1$ рассматриваемые уравнения имеют четыре стационарные точки: $(0;0)$, $(1;0)$, $(1;1)$, $(1;3)$.

Точка $(1;1)$ оказывается устойчивой стационарной точкой, а все остальные стационарные точки неустойчивы. Если мы теперь будем учитывать флуктуации фазы сверхпроводящего параметра порядка $n_\delta = 2$, а n_2 будет по-прежнему равно единице, то в этом случае число стационарных точек уменьшится до трех: $(0;0)$, $(1;1)$, $(11/9;5/3)$. Точка $(1;1)$ по-прежнему остается устойчивой стационарной точкой, а остальные стационарные точки снова неустойчивы.

Перейдем теперь к рассмотрению наиболее интересного физического случая, когда $n_2 = n_\delta = 2$. В этом случае три стационарные точки те же, что и для случая $n_2 = n_\delta = 1$: $(0;0)$, $(1;0)$, $(1;1)$. Точка $(1;1)$ оказывается двукратно вырожденной, и поэтому она является слабо устойчивой точкой. Кроме того, помимо этих трех точек данная система имеет еще две: $[(1/9)(1 \pm 4i\sqrt{5});(1/3)(5 \pm 2i\sqrt{5})]$.

Обеим этим точкам соответствует решение типа «фокус». Таким образом, сильно развитые флуктуации сверхпроводящего и антиферромагнитного параметра порядка, обусловленные эффектом обменного усиления электрон-фононного взаимодействия, при определенных значениях затравочных амплитуд и температур могут привести к возникновению колебательного режима для параметра порядка при фазовом переходе в упорядоченное состояние. Оба «фокуса» оказываются неустойчивыми, поэтому при положительной действительной части амплитуд y_δ и $y_{2\delta}$ фазовые траектории системы будут стремиться в окрестность слабо устойчивой стационарной точки $(1;1)$.

Таким образом, мы видим, что во всех рассмотренных выше случаях система сохраняет одну устойчивую стационарную точку (хотя в последнем случае и слабо устойчивую). Это означает, что в системе сохраняется возможность фазового перехода второго рода в фазу сосуществования сверхпроводимости и антиферромагнитного упорядочения, которое в данном случае представляет собой медленно флуктуирующие (квазиравновесные) волны спиновой плотности.

Что касается возможности фазового перехода первого рода, близкого ко второму, то такая возможность существует, но для этого для начальных значений температур антиферромагнитной и сверхпроводящей подсистем должно, в частности, выполняться условие $\tau^0 \ll (T_c^0/J_0 s)\tau^0$.

В этом случае система уравнений значительно упрощается:

$$\begin{aligned}
-\tilde{\Gamma}'_2 &= (n_2+8)\tilde{\Gamma}_2^2,\\
-\tilde{\Gamma}'_\delta &= n_2\tilde{\Gamma}_{2\delta}^2,\\
-\tilde{\Gamma}'_{\delta 2} &= (n_2+2)\Gamma_2\tilde{\Gamma}_{\delta 2},\\
-\tau'_2 &= (n_2+2)\tau_2\tilde{\Gamma}_2,\\
-\tau'_\delta &= n_2\tau_2\tilde{\Gamma}_{\delta 2}.
\end{aligned}$$

Эти уравнения легко интегрируются, и их решения имеют вид

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}_2(x) &= \frac{\tilde{\Gamma}_{20}}{1+(n_2+8)\tilde{\Gamma}_{20}x},\\
\tilde{\Gamma}_{2\delta}(x) &= \frac{\tilde{\Gamma}_{\delta 20}}{[1+(n_2+8)\tilde{\Gamma}_{20}x]^{(n+2)/(n+8)}},\\
\tilde{\Gamma}_\delta(x) &= \tilde{\Gamma}_{\delta 0} - \frac{n_2}{4-n_2}\frac{\Gamma_{\delta 20}^2}{\tilde{\Gamma}_{20}}\times\\
&\quad\times\left\{\left[1+(n_2+8)\tilde{\Gamma}_{20}x\right]^{(4-n_2)/(n_2+8)}-1\right\}, \qquad (4)\\
\tau_2(x) &= \frac{\tau_{20}}{\left[1+(n_2+8)\tilde{\Gamma}_{20}x\right]^{(n_2+2)/(n_2+8)}},\\
\tau_\delta(x) &= \tau_{\delta 0} - \frac{n_2}{4-n_2}\frac{\tau_{20}\Gamma_{\delta 20}}{\tilde{\Gamma}_{20}}\times\\
&\quad\times\left\{\left[1+(n_2+8)\tilde{\Gamma}_{20}x\right]^{(4-n_2)/(n_2+8)}-1\right\}.
\end{aligned}$$

Переменная метода РГ в этом случае выглядит следующим образом:

$$x = \frac{1}{(\varepsilon/2)(\Lambda^2)^{\varepsilon/2}}\left\{\left(\frac{\Lambda^2}{\max[\lambda^2(\tau_2),|\Delta_0|^2]}\right)^{\varepsilon/2}-1\right\},\quad \varepsilon\to 0. \qquad (5)$$

Из формул (5) следует, что при некотором значении $x = x_\delta^*$ амплитуда Γ_δ теряет положительную определенность, что указывает на возможность фазового перехода первого рода, близкого ко второму, в сверхпроводящую фазу. Граница устойчивости парамагнитной фазы в этом случае будет равна:

$$x_\delta^* = \frac{1}{(n_2+8)\tilde{\Gamma}_{20}}\left[\left(\frac{4-n_2}{n_2}\frac{\Gamma_{20}\Gamma_{\delta 0}}{\Gamma_{\delta 20}^2}+1\right)^{(n_2+8)/(4-n_2)}-1\right].$$

Следует отметить, что фазовый переход в фазу сосуществования сверхпроводящего состояния и магнитного упорядочения может произойти, если эффективная температура магнитной подсистемы будет стремиться к нулю. Это возможно только в том случае, если параметр $\Delta\tau_2 = \frac{1}{2}\Gamma_{\delta 2}(x_\delta^0)|\Delta_0|^2$ будет возрастать с уменьшением температуры медленнее, чем τ_2. В противном случае в системе вплоть до нуля температур будет сохраняться только сверхпроводящая фаза.

Список литературы

1. *Wilson K.G.* // Phys. Rev. B. 1971. **4**. P. 3174.
2. *Wilson K.G., Fisher M.E.* // Phys. Rev. Lett. 1972. **28**. P. 240.
3. *Wilson K.G., Kogut P.* // Phys. Rev. C. 1974. **12**. P. 75.
4. *Gell-Mann M., Low F.E.* // Phys. Rev. 1954. **95**. P. 1300.
5. *Sadovnikova M.B., Savchenko A.M., Scarpetta G.* // Phys. Lett. A. 2000. **274**. P. 236.
6. *Савченко А.М., Садовникова М.Б.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2009. № 1. С. 85.

Research of character of the phase transitions in a superconducting phase by renormalization group method

O. G. Karchev[a], **A. M. Savchenko**[b]

Department of Quantum Statistics and Field Theory, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.

E-mail: [a] *kog@taisu.ru,* [b] *a.m.savchenko@gmail.com.*

Phase transitions in magnetic systems in the presence of spin fluctuations and the exchange enhancement of electron–phonon interaction is under consideration. It is shown, that spin fluctuations play an essential role and determine characteristics of the phase transition of the first order close to the second one.

Keywords: phase transition, renormalization group, spin fluctuations.
PACS: 73.43.Nq.
Received 9 June 2010.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 1(2011).

Сведения об авторах

1. Карчев Олег Геннадьевич — аспирант; тел.: (495) 932-80-10, e-mail: kog@taisu.ru.
2. Савченко Александр Максимович — докт. физ.-мат. наук, доцент, ст. преподаватель; тел.: (495) 932-80-10, e-mail: a.m.savchenko@gmail.com.