Когерентная цифровая обработка выходного сигнала гравитационной антенны «улитка»

А. В. Гусев[a], И. В. Цыбанков[b]

Государственный астрономический институт имени П. К. Штернберга Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова. Россия, 119991, Москва, Университетский просп., д. 13.
E-mail: [a] avg@sai.msu.ru, [b] vanotsb@gmail.com

Статья поступила 25.06.2010, подписана в печать 24.09.2010

Рассматривается статистическая задача синтеза по аналоговому прототипу цифрового алгоритма обработки выходного сигнала резонансной гравитационной антенны «улитка». Выбор шага дискретизации в системе АЦП–ЦАП определяется теоремой Котельникова (теоремой отсчетов) для квазигармонических сигналов.

Ключевые слова: обработка данных, твердотельный детектор гравитационно-волнового излучения.
УДК: 52-17. PACS: 95.75.Pq, 95.55.Ym.

Введение

Гравитационная антенна «улитка» [1, 2] относится к классу твердотельных неохлаждаемых резонансных гравитационных антенн типа «geograv» [3] с «геофизическим» уровнем чувствительности. Несомненным достоинством подобных систем оказывается высокая надежность, что позволяет их использовать в режиме квазинепрерывного мониторинга. В частности, антенны именно этого класса находились в рабочем состоянии при вспышке Сверхновой SN1987A [3, 4]. В настоящее время планируется возобновление работы гравитационной антенны «улитка» в составе Баксанской нейтринной обсерватории РАН.

Когерентная непрерывно-дискретная обработка информации на гравитационной антенне «улитка» осуществлялась по гауссовой (оптимальной при гауссовых шумах) непрерывно-аналоговой схеме

$$x(t) \to \text{ОФ–КДО} \to E(t), \qquad (1)$$

где $x(t)$ — узкополосный процесс на выходе линейного тракта, ОФ — оптимальный по критерию отношения сигнал-шум фильтр, $E(t)$ — случайный процесс на выходе квадратичного детектора огибающей (КДО). Структура ОФ в схеме (1) определяется следующим выражением

$$\text{ОФ:}\ \ \text{ФВ} \to \boldsymbol{a}(t) \to \Delta\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{a}(t) - \boldsymbol{a}(t-\hat{\tau}), \qquad (2)$$

где $\boldsymbol{a}(t) = [a_1(t)\ a_2(t)]^\top$ — векторный случайный процесс на выходе фильтра Винера (ФВ) с двумя квадратурными каналами, $\hat{\tau}$ — длительность полезного сигнала на входе. При синтезе аналоговой части схемы — ФВ в выражении (2) — на практике используется двухканальный синхронный детектор. Обработка векторного сигнала $\boldsymbol{a}(t)$ осуществляется в дискретном времени.

При возобновлении работы гравитационной антенны «улитка» предполагается использовать дискретную обработку выходного сигнала $x(t)$ по аналоговому прототипу [5]. В предлагаемой работе рассматриваются особенности синтеза цифрового ФВ с двумя квадратурными каналами. Формирование квадратурных компонент $a_1(t)$ и $a_2(t)$ осуществляется непосредственно в процессе дискретизации. В качестве преобразователя частоты используется электронный ключ, который входит в состав АЦП. Шаг дискретизации определяется в соответствии с теоремой Котельникова (теоремой отсчетов) для узкополосных сигналов [6].

1. Структура оптимального приемника в непрерывном времени

Передаточная функция $K(\omega)$ ОФ в выражении (1) при обработке информации в непрерывном времени определяется следующим образом [5]:

$$K(\omega) = C\frac{S_0^*(\omega)}{N(\omega)}\exp\{-j\omega t_0\}, \qquad (3)$$

где $S_0(\omega) \leftrightarrow s(t)$, $s(t)$ — форма ожидаемого квазидетерминированного полезного сигнала, $N(\omega)$ — спектральная плотность аддитивной помехи $n(t)$ на выходе линейного тракта, C — масштабный коэффициент, t_0 — произвольная (в режиме «off line») временная задержка. Аддитивная помеха $n(t)$ может рассматриваться как смесь

$$n(t) = n_m(t) + n_r(t)$$

узкополосных механических (тепловых) $n_m(t)$ и широкополосных электрических $n_e(t)$ гауссовых шумов. При таком подходе имеем

$$N(\omega) = N_m(\omega) + N_e(\omega), \qquad (4)$$

где $N_m(\omega)$ и $N_e(\omega)$ — спектральные плотности случайных процессов $n_m(t)$ и $n_e(t)$ соответственно.

Учитывая (4), выражение (3) можно представить в эквивалентной форме

$$K(\omega) = K_w(\omega)\cdot K_m(j\omega),$$

где

$$K_w(\omega) = \frac{N_m(\omega)}{N(\omega)} = \frac{N_m(\omega)}{N_m(\omega)+N_e(\omega)} \qquad (5)$$

— передаточная функция фильтра Винера (ФВ),

$$K_m(\omega) = C\frac{S_0^*(\omega)}{N_m(\omega)}\exp\{-j\omega t_0\}$$

— передаточная функция ОФ в случае $n(t) = n_m(t)$, т. е. при $N_e(\omega) \to 0$.

Пусть ω_0 — резонансная частота линейного тракта гравитационной антенны. Тогда, воспользовавшись комплексной формой записи квазигармонических сигналов [5], имеем

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathrm{Re}\big[\tilde{x}(t)\exp\{j\omega_0 t\}\big], \\ y(t) &= \mathrm{Re}\big[\tilde{y}(t)\exp\{j\omega_0 t\}\big], \end{aligned} \tag{6}$$

где $y(t)$ — случайный процесс на выходе ФВ с передаточной функцией (5), $\tilde{x}(t)$, $\tilde{y}(t)$ — комплексные огибающие.

Из (5), (6) находим

$$\tilde{y}(t) \leftrightarrow \tilde{Y}(\omega) = K_w(\omega_0+\omega)\tilde{X}(\omega), \quad |\omega| \ll \omega_0,$$

где $\tilde{X}(\omega)$ — спектр комплексной огибающей $\tilde{x}(t)$, $\tilde{X}(\omega) \leftrightarrow \tilde{x}(t)$.

При ланжевеновском описании причиной коррелированных механических шумов $n_m(t)$ оказывается флуктуационная сила Найквиста $f_m(t)$ с функцией корреляции

$$\langle f_m(t) f_m(t')\rangle = N_T\delta(t-t'),$$

где $\langle\cdot\rangle$ — символическая форма записи оператора статистического усреднения, $N_T = 4k_B T m\gamma$, k_B — постоянная Больцмана, T — температура термостата, m — эквивалентная масса, γ — декремент затухания, $\gamma \ll \omega_0$. В такой постановке, учитывая, что передаточная функция линейного тракта определяется выражением

$$G(\omega) = \frac{1}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + 2\gamma\omega j)},$$

имеем

$$\tilde{Y}(\omega) = \left(\frac{\omega_c^2}{\omega^2+\omega_c^2}\right)\tilde{X}(\omega), \quad \omega_c^2 \simeq \frac{N_T}{4N_e(\omega_0)m^2\omega_0^2}. \tag{7}$$

2. Цифровая обработка информации

При дальнейшем анализе будем предполагать, что спектр узкополосного случайного процесса $x(t)$ на выходе линейного тракта сосредоточен (при $\omega > 0$) в узкой полосе (ω_1, ω_2), $\omega_0 = (\omega_1+\omega_2)/2$. В таком случае имеем

$$\tilde{X}(\omega) \simeq 0 \ \text{ при } \ \omega \not\subseteq (-\Delta\omega/2, \Delta\omega/2), \ \ \Delta\omega = (\omega_2 - \omega_1), \tag{8}$$

и следовательно,

$$x(t) = \mathrm{Re}\, z_x(t), \quad z_x(t) = \tilde{x}(t)\exp\{j\omega_0 t\}$$

— случайный узкополосный аналитический сигнал [6].

При синтезе цифрового обнаружителя по аналоговому прототипу обработке подвергается реализация низкочастотного случайного процесса [7]

$$x_s(t) = \mathrm{Re}\, z_s(t), \quad z_s(t) = \tilde{x}(t)\exp\{j\bar{\omega}t\},$$

где $\bar{\omega}$ — «промежуточная» частота, $\bar{\omega} \ll \omega_0$. Информация о тонкой структуре комплексной огибающей $\tilde{x}(t)$ при переходе $\omega_0 \to \bar{\omega}$ полностью сохраняется, если комплексный процесс $z_s(t)$ можно рассматривать как аналитическую функцию. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$z_s(t) \leftrightarrow Z_s(\omega) = \tilde{X}(\bar{\omega}+\omega) = 0 \ \text{ при } \ \omega < 0.$$

Отсюда, учитывая (8), находим $\bar{\omega} \geqslant \Delta\omega/2$, и следовательно,

$$x_s(t) \to X_s(\omega) \neq 0 \ \text{ при } \ \omega \subseteq (-\omega_m, \omega_m), \quad \omega_m = \bar{\omega} + \Delta\omega/2. \tag{9}$$

В соответствии с теоремой Котельникова (теоремой отсчетов) [6] случайный низкочастотный процесс $x_s(t)$, спектр которого сосредоточен в полосе $(-\omega_m, \omega_m)$, можно представить в виде ряда

$$x_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{s,k}\varphi_k(t), \quad \varphi_k(t) = \mathrm{sinc}\,\omega_m(t-k\Delta t), \tag{10}$$

где $x_{s,k} = x_s(k\Delta t)$, $\Delta t \leqslant \pi/\omega_m$ — шаг дискретизации.

Воспользовавшись известным соотношением [6]

$$\varphi_k(t) \leftrightarrow \Phi_k(\omega) = \Delta t \begin{cases} \exp\{-jk\omega\Delta t\}, \\ \qquad -\Delta\omega/2 < \omega < \Delta\omega/2, \\ 0, \quad |\omega| > \Delta\omega/2, \end{cases}$$

из (10) находим спектр низкочастотного сигнала $x_s(t)$:

$$x_s(t) \leftrightarrow X_s(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{s,k}\Phi_k(\omega), \quad |\omega| \leqslant \omega_m.$$

Отсюда, учитывая свойства аналитического (см. выше) случайного процесса $z_s(t)$, имеем

$$Z_s(\omega) = \tilde{X}(\omega-\bar{\omega}) = \begin{cases} 2X_s(\omega), & \omega > 0, \\ 0, & \omega < 0, \end{cases}$$

где $Z_s(\omega) \leftrightarrow z_s(t)$.

Следовательно, при обработке информации в дискретном времени спектр комплексной огибающей $\tilde{x}(t)$ можно представить в виде

$$\tilde{X}(\omega) = 2X_s(\bar{\omega}+\omega) = 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{s,k}\Phi_k(\bar{\omega}+\omega), \quad |\omega| \leqslant \Delta\omega/2. \tag{11}$$

Из (7) и (11) находим спектр комплексной огибающей $\tilde{y}(t)$ узкополосного случайного процесса $y(t)$ на выходе ФВ:

$$\tilde{Y}(\omega) = 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{s,k}\left(\frac{\omega_c^2}{\omega^2+\omega_c^2}\right)\Psi_k(\bar{\omega}+\omega), \quad |\omega| \leqslant \Delta\omega/2.$$

Обратное преобразование Фурье позволяет найти комплексную огибающую $\tilde{y}(t)$ в явном виде

$$\tilde{y}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\Delta\omega/2}^{\Delta\omega/2} \tilde{Y}(\omega)\exp\{j\omega t\}\,d\omega.$$

Отсюда, предполагая, что $\Delta\omega/2 \gtrsim \omega_c$, получим

$$\tilde{y}(t) \simeq \Delta t\omega_c \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{s,k}\exp\{-jk\bar{\omega}\Delta t\}\exp\{-\omega_c|t-k\Delta t|\}.$$

На практике преобразование частоты вниз $\omega_0 \to \bar{\omega}$ осуществляется непосредственно в процессе дискретизации данных. Действительно, случайный процесс $x_\Delta(t)$ на выходе АЦП при шаге дискретизации Δt можно представить в виде [6]

$$x_\Delta(t) = x(t)\cdot\eta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k\delta(t-k\Delta t),$$

где

$$\eta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t)$$

— тактовая функция, $x_k = x(k\Delta t)$. Учитывая, что $z_x(t) = z_s(t)\exp\{j(\omega_0 - \bar{\omega})t\}$ (см. выше), имеем

$$x_k = x(k\Delta t) = \operatorname{Re} z_x(k\Delta t) = \operatorname{Re} z_s(k\Delta t)\exp\{j(\omega_0 - \omega_s)k\Delta t\}.$$

Отсюда, предполагая, что $(\omega_0 - \bar{\omega}_s)\Delta t = 2\pi M$, где $M \gg 1$ — целое число, находим $\operatorname{Re} z(k\Delta t) = \operatorname{Re} z_s(k\Delta t)$, и следовательно,

$$x_k \equiv x_{s,k}, \quad k \in (-\infty, \infty).$$

Заключение

1. Компоненты векторного случайного процесса $\boldsymbol{a}(t)$ при обработке информации по схеме АЦП–ЦФ–ЦАП, где ЦФ — цифровой фильтр Винера, определяются следующими выражениями:

$$a_1(t) = \operatorname{Re}\tilde{y}(t) \propto \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \exp\{-\omega_c|t - k\Delta t|\}\cos k\bar{\omega}\Delta t,$$

$$a_2(t) = \operatorname{Im}\tilde{y}(t) \propto \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \exp\{-\omega_c|t - k\Delta t|\}\sin k\bar{\omega}\Delta t,$$

$x_k = x_(k\Delta t)$ — отсчеты случайного узкополосного процесса $x(t)$. Шаг дискретизации $\Delta t \leqslant \pi/\omega_m$, где ω_m — наибольшая (максимальная) частота (9) в спектре низкочастотного случайного процесса $x_s(t)$.

2. Электронный ключ в составе АЦП представляет цифровой аналог генератора опорного сигнала и перемножителя, которые входят в состав синхронного детектора при непрерывно-аналоговой обработке информации. Действительно, разлагая в ряд Фурье тактовую функцию $\eta(t)$ (см. выше), имеем

$$\eta(t) = \Delta t \sum_{m=0}^{\infty} \in_n \cos n\omega_d t,$$

где $\in_0 = 1$, $\in_m = 2$ при $m \neq 0$, $\omega_d = 2\pi/\Delta t$ — частота дискретизации.

Резонансная частота ω_0 линейного тракта гравитационной антенны «улитка» при синтезе цифрового приемника по аналоговому прототипу может рассматриваться как неинформативный параметр.

3. RC-фильтр низких частот на выходе синхронного детектора можно рассматривать как физически реализуемый ФВ в статистической задаче фильтрации экспоненциально-коррелированных квадратурных компонент $n_{1,2}(t)$ механических шумов

$$n_m(t) \simeq n_1(t)\cos\omega_0 t - n_2(t)\sin\omega_0 t$$

на фоне широкополосной электрической помехи $n_e(t)$ (при $RC\omega_c \simeq 1$). При дискретной обработке информации в режиме офлайн в состав цифрового приемника входит физически нереализуемый ФВ с передаточной функцией (5). Применение физически нереализуемого ФВ обеспечивает дополнительное частотное сжатие (сглаживание) шума, что приводит к уменьшению частоты выбросов случайного процесса на выходе КДО.

4. Учитывая (7), находим спектральную плотность аддитивной помехи в резонансной области

$$N_0(\omega) = N(\omega_0 + \omega) \propto \left(1 + \frac{\omega_c^2}{\omega^2 + \gamma^2}\right), \quad |\omega| \ll \omega_0. \quad (12)$$

Формула (12) может быть использована для оценки полосы пропускания ω_c ФВ при высокоточных ($\hat{N}_0(\omega) \simeq N_0(\omega)$) измерениях спектральной плотности случайного процесса $n(t)$.

Список литературы

1. *Гусев А.В., Кулагин В.В., Сердобольский А.В.* и др. // Астрон. журн. 1997. **74**, № 2. С. 287.
2. *Гусев А.В., Руденко В.Н., Сердобольский А.В.* // Измерительная техника. 2004. № 10. С. 3.
3. Астрофизика, кванты и теория относительности / Под ред. Ф.И. Федорова. М., 1982.
4. *Aglietta A., Pallatino G., Maletti A.* et. al. // Nuovo Cimento. 1989. **12C**. P. 75.
5. *Сосулин Ю.Г.* Теоретические основы радиолокации и радионавигации. М., 1992.
6. *Гоноровский И.С.* Радиотехнические цепи и сигналы. М., 2006.
7. *Гусев А.В., Руденко В.Н.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2003. № 6. С. 17.

Coherent digital treatment of «Ulitka» gravitational antenna’s output signal

A. V. Gusev[a], I. V. Tsybankov[b]

P. K. Sternberg State Institute of Astronomy, M. V. Lomonosov Moscow State University, Universitetskii pr. 13, Moscow 119991, Russia.
E-mail: [a] avg@sai.msu.ru, [b] vanotsb@gmail.com.

Statistical problem of of digital algorithm synthesis based on the analogical prototype for resonant gravitational antennas «ulitka» output signal is considered. Value of the sampling increment into system ADC–DAC is detected by the theorem of counts for narrow band signals.

Keywords: data processing, resonant gravitational wave detector.
PACS: 95.75.Pq, 95.55.Ym.
Received 25 June 2010.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 1(2011).

Сведения об авторах

1. Гусев Андрей Викторович — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр.; тел.: (495) 939-53-27, e-mail: avg@sai.msu.ru.
2. Цыбанков Иван Викторович — мл. науч. сотр.; тел.: (495) 939-53-27, e-mail: vanotsb@gmail.com.