

# Математическое моделирование волноводов, содержащих локальные вставки с фрактальной структурой

А. Н. Боголюбов<sup>a</sup>, А. А. Петухов<sup>b</sup>, Н. Е. Шапкина

*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.*

E-mail: <sup>a</sup>bogon7@yandex.ru, <sup>b</sup>petukhov@physics.msu.ru

Статья поступила 01.11.2010, подписана в печать 19.11.2010

Настоящая работа посвящена моделированию диэлектрических волноводов, содержащих локальные вставки с неоднородным распределением диэлектрической проницаемости, в том числе фрактальным. Рассматривается трехмерная скалярная задача для уравнения Гельмгольца, решение которой проводится численно с применением неполного метода Галеркина и метода конечных разностей. Рассчитываются спектры пропускания для одномерных, двумерных и трехмерных вставок с периодическим и фрактальным распределением диэлектрической проницаемости. Проводится сравнение характеристик вставок различного типа. Предлагаются возможные варианты практического применения изученных вставок.

**Ключевые слова:** локально нерегулярный волновод, фрактал, фотонный кристалл.

УДК: 517.538.72, 541.421. PACS: 42.79.Gn.

## Введение

Исследование волноведущих систем является важной задачей современной физики. Волноводы составляют основу волоконной оптики, оптических систем передачи информации, радиоэлектроники и систем связи, а также имеют множество других практических применений. Широчайший спектр применения волноводов в современной технике обуславливает необходимость дальнейшего развития теории волноводов и математических методов решения волноводных задач. Большой интерес представляет исследование нерегулярных волноводов: внесение неоднородностей в регулярный волновод позволяет управлять свойствами излучения, распространяющегося в волноводе.

В настоящей работе мы рассматриваем прямоугольные диэлектрические волноводы, содержащие локальные вставки-неоднородности с кусочно-постоянным распределением характеристик (диэлектрической проницаемости). Такие вставки, с одной стороны, просты в изготовлении, а с другой — позволяют в достаточно широких пределах управлять свойствами проходящего излучения. В этом классе вставок отдельно стоит отметить вставки с фрактальным распределением характеристик. Фрактальные структуры обладают уникальным свойством самоподобия, не присущим обычным физическим объектам, описываемым классической евклидовой геометрией [1–4]. Благодаря этим особенностям фрактальные объекты проявляют свойства, резко отличающиеся от свойств объектов с обычными геометрическими формами и строго периодических структур. Так, например, дифракция электромагнитных волн на фрактальных решетках приводит к образованию самоподобных дифракционных картин [5]. Свойство самоподобия передается от физической системы ее откликам на внешние воздействия. Аналогично излучение, проходящее через фрактальную вставку в волноводе, также проявляет свойства самоподобия (например, име-

ет самоподобный спектр), обусловленные самоподобной структурой вставки.

В настоящей работе мы исследуем одно-, двух- и трехмерные периодические и фрактальные вставки. Полученные результаты для периодических и фрактальных вставок сравниваются друг с другом, выявляются особенности спектров пропускания каждого типа вставок и обсуждается возможное практическое применение этих вставок.

## 1. Постановка задачи и методика численного расчета

Рассмотрим трехмерную скалярную задачу дифракции волн в регулярном прямоугольном волноводе, бесконечном по продольной координате  $z$  и содержащем локальную вставку-неоднородность в ограниченной области пространства  $D$  (рис. 1). Поле  $u$  внутри системы описывается уравнением Гельмгольца. На границах волновода ставятся однородные граничные условия Дирихле. В случае, когда свойства вставок зависят только от продольной координаты  $k^2 = k^2(z)$ , данная постановка соответствует векторной задаче, граничные условия — идеально проводящим стенкам, причем  $u$  является продольной составляющей вектора электрического поля в волноводе  $u = E_z$ . Отметим, что это замечание справедливо, в частности, для всех одномерных вставок. На открытых концах волновода ставятся парциальные условия излучения [6] (временная зависимость выбирается в виде  $e^{-i\omega t}$ ). Таким образом,

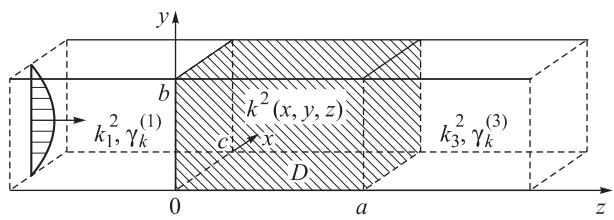


Рис. 1. Схема волновода с локальной неоднородностью

полностью математическая постановка задачи в данном случае выглядит следующим образом:

$$\Delta u + k^2(x, y, z)u = 0, \quad x \in D,$$

$$u|_{\partial S} = 0,$$

$$\iint_S \left\{ \frac{\partial u}{\partial z} + i\gamma_{k,l}^{(1)} u \right\}_{z=0} Y_{k,l}(x, y) dx dy = 2i\gamma_{k_0, l_0}^{(1)} A_{k_0, l_0} \delta_{k, k_0} \delta_{l, l_0},$$

$$\iint_S \left\{ \frac{\partial u}{\partial z} - i\gamma_{k,l}^{(3)} u \right\}_{z=a} Y_{k,l}(x, y) dx dy = 0.$$

Здесь  $S$  — сечение волновода,  $\partial S$  — его граница;  $Y_{k,l}(x, y)$  — нормированные собственные функции сечения,  $\gamma_{k,l}^{(1,3)}$  — постоянные распространения мод левой и правой регулярных частей волновода,  $k, l = 1, 2, \dots$ ;  $A_{k_0, l_0}$  — амплитуда возбуждающей моды номера  $(k_0, l_0)$ . В случае кусочно-постоянных вставок постановка задачи дополняется условиями сопряжения на поверхностях раздела коэффициента  $k^2$ .

В рамках данной работы характеристики волновода слева и справа от вставки мы полагаем одинаковыми. Кроме того, как было отмечено выше, мы ограничимся рассмотрением кусочно-постоянных распределений диэлектрической проницаемости внутри вставки.

Численное решение необходимо строить лишь в центральной части волновода, где расположена неоднородность. Построение решения проводится с помощью неполного метода Галеркина [6]. Применение данного метода сводит исходную задачу к системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка для коэффициентов в разложении поля по собственным функциям сечения. Система дополняется граничными условиями третьего рода, явно следующими из парциальных условий излучения. Для данной задачи строится разностная схема, и полученная система линейных уравнений решается методом матричной прогонки [7].

## 2. Основные результаты расчетов

### 2.1. Одномерные вставки

Рассмотрим одномерные периодические и фрактальные вставки. Распределение диэлектрической проницаемости в волноводе в случае периодической вставки представлено на рис. 2, а. Оптически более плотные слои, показанные более темным цветом на рисунке, имеют значение  $\epsilon = 2$ , менее плотные —  $\epsilon = 1$ . Такая структура представляет собой одномерный фотонный кристалл. Спектр пропускания для такой вставки (рис. 2, б) характеризуется наличием запрещенной зоны [8]. Полученные результаты хорошо согласуются с данными, приведенными в литературе [8–10].

Одномерная вставка, построенная на основе фрактала Кантора (рис. 3, а), также проявляет свойства фотонного кристалла. В его спектре состояний присутствуют запрещенные зоны, однако расчеты показывают, что структура этих зон существенно отличается от структуры запрещенных зон периодических фотонных кристаллов (рис. 3, б). Стоит отметить несколько особенностей. Во-первых, спектральная характеристика фрактальной структуры является более изрезанной, нежели характеристика периодического фотонного кристалла,

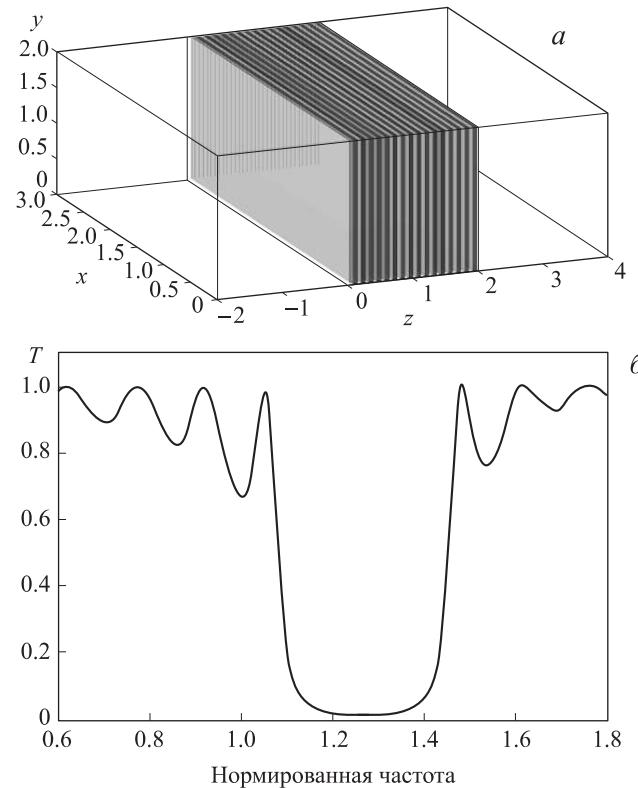
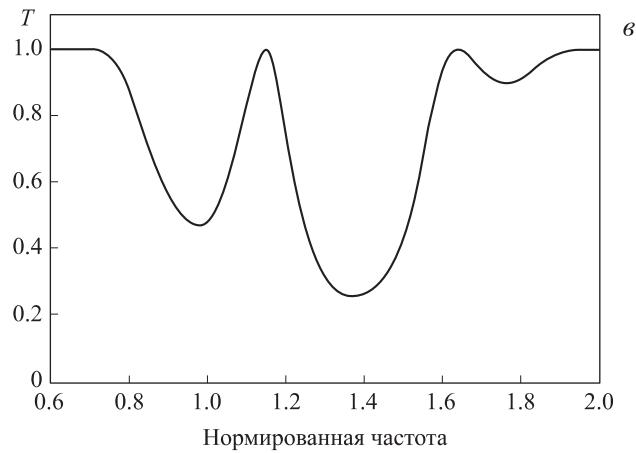
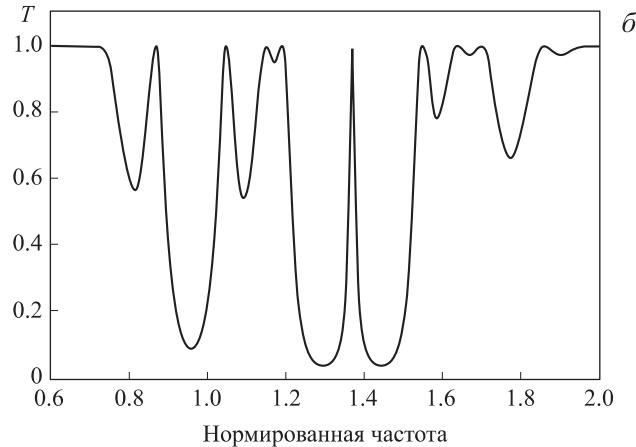
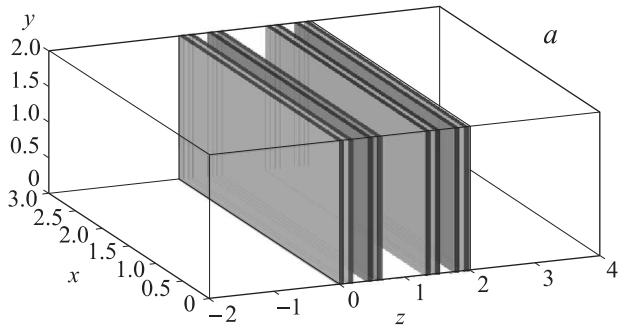


Рис. 2. Периодическая вставка: распределение диэлектрической проницаемости (а) и спектр пропускания (б)

и число запрещенных зон увеличивается. Эти эффекты проявляются тем сильнее, чем выше порядок итерации фрактала (рис. 3). Во-вторых, внутри запрещенной зоны образуется резкий пик пропускания, ширина которого мала по сравнению с шириной запрещенной зоны. В силу симметрии фрактала этот пик располагается практически в центре запрещенной зоны. Наличие этого свойства обусловлено также и тем фактом, что фрактальный фотонный кристалл можно рассматривать как периодический фотонный кристалл с дефектами [8–9].

### 2.2. Двумерные и трехмерные вставки

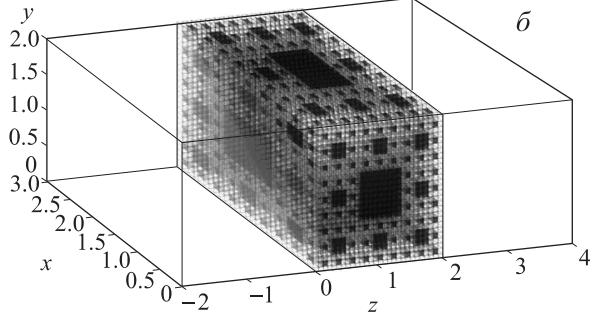
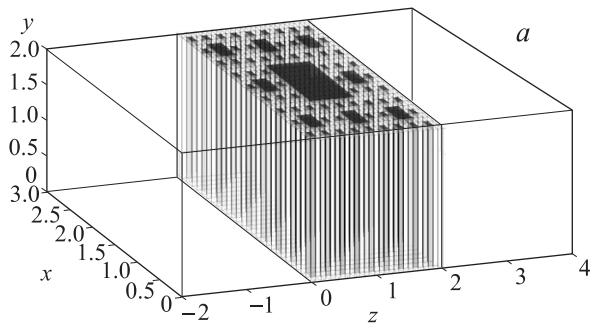
Двумерная периодическая вставка по сути представляет собой двумерный фотонный кристалл. Рассчитанный для такой вставки спектр пропускания также характеризуется наличием запрещенной зоны. Здесь стоит сразу сделать оговорку. С точки зрения исследования свойств двумерных фотонных кристаллов, эта характеристика справедлива только для волн, распространяющихся вдоль направления одного из элементарных векторов решетки. В рамках настоящей работы не анализируются те свойства фотонных кристаллов, которые проявляются при несовпадении направления распространения волны с одним из направлений векторов решетки. Это замечание справедливо для всех рассмотренных в работе двумерных и трехмерных вставок. В силу данного замечания спектральные характеристики, рассчитанные для выбранных двумерных и трехмерных как периодических, так и фрактальных вставок, похожи, однако между ними есть и некоторые отличия. Например, в спектрах, полученных для



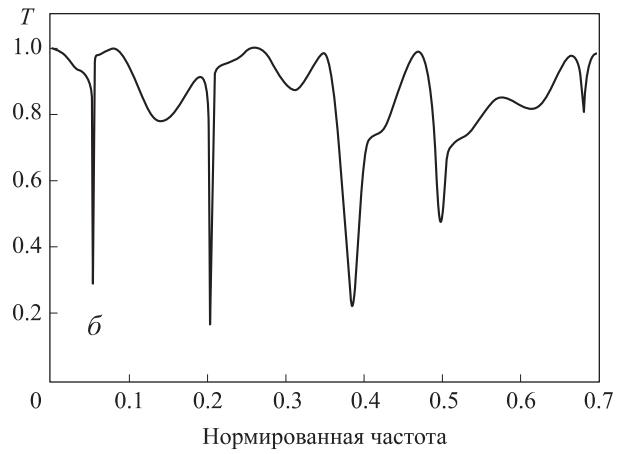
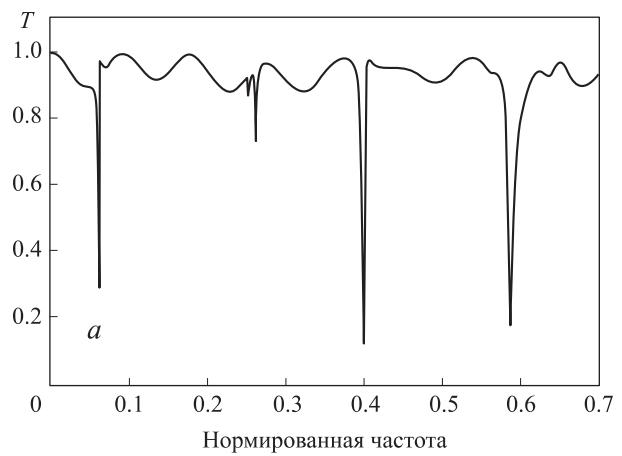
*Рис. 3. Канторовская вставка: распределение диэлектрической проницаемости (вставка 3-го порядка итерации) (а); спектр пропускания (вставка 3-го порядка итерации) (б); спектр пропускания (вставка 2-го порядка итерации) (в)*

двуимерной и трехмерной периодических вставок присутствует запрещенная зона, однако, согласно расчетам, при переходе от двумерной вставки к трехмерной частота центра запрещенной зоны заметно смещается в сторону больших частот.

Рассмотрим далее двумерные и трехмерные фрактальные вставки. В двумерном случае исследовалась вставка, построенная на основе ковра Серпинского (рис. 4, а). Расчеты показывают, что спектр пропускания такой вставки существенно отличается от характеристик как двумерного периодического фотонного кристалла, так и одномерной канторовской вставки. В спектре пропускания ковра Серпинского получены очень узкие запрещенные зоны, представляющие собой



*Рис. 4. Структура фрактальных вставок 3-го порядка итерации: двумерная вставка (ковер Серпинского) (а) и трехмерная вставка (губка Менгера) (б)*



*Рис. 5. Спектры пропускания фрактальных вставок 3-го порядка итерации: двумерная вставка (ковер Серпинского) (а) и трехмерная вставка (губка Менгера) (б)*

скорее «точки непропускания» (рис. 5, а). Аналогичные результаты получены для вставки, построенной на основе трехмерного аналога ковра Серпинского — губки Менгера (рис. 4, б). В спектре пропускания губки Менгера (рис. 5, б) также присутствуют «точки непропускания». Однако, как и в случае с двумерной и трехмерной периодическими структурами, частоты непропускания на спектральной характеристике губки Менгера оказались смещены вправо относительно частот непропускания ковра Серпинского. Кроме того, некоторые диапазоны непропускания стали более узкими и глубокими.

### Заключение

В заключение подведем некоторый итог полученным результатам и скажем несколько слов о перспективах и направлениях дальнейших исследований. В работе проведено моделирование процесса дифракции волны на неоднородности в волноводе, проведены численные эксперименты для одномерных, двумерных и трехмерных периодических и фрактальных вставок. В отличие от свойств периодических структур, фрактальные вставки обладают самоподобными спектрами пропускания. Запрещенная зона одномерных канторовских вставок имеет более сложное строение, в ней появляются узкие пики пропускания. В то же время двумерные и трехмерные вставки проявляют противоположные свойства: на фоне широкого диапазона частот, для которого вставка оптически прозрачна, наблюдаются запрещенные частоты. Таким образом, фрактальные вставки можно, например, применять в качестве различных оптических фильтров с хорошими характеристиками.

### Список литературы

- Кроновер Р. Фракталы и хаос в динамических системах. М., 2006.
- Яновский В.В. // Universitates. 2003. N 3.
- Морозов А.Д. Введение в теорию фракталов. М.; Ижевск, 2004.
- Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. Ижевск, 2005.
- Боголюбов А.Н., Петухов А.А., Шапкина Н.Е. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2008. № 2. С. 7.
- Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г. Математические модели электродинамики. М., 1991.
- Калиткин Н.Н. Численные методы. М., 1978.
- Monsoria J.A., Zapata-Rodriguez C.J., Silvestre E., Furlan W.D. // Opt. Commun. 2005. **252**. P. 46.
- Lavrinenco A.V., Zhukovsky S.V., Sandomirski K.S., Gaponenko S.V. // Phys. Rev. E. 2002. **65**. P. 036621.
- Marcuse D. // IEEE J. Quant. Electronics. 1992. **28**, N 2. P. 459.
- Левин Л. Теория волноводов. Методы решения волноводных задач. М., 1981.
- Маркузе Д. Оптические волноводы. М., 1974.
- Марков Г.Т., Васильев Е.Н. Математические методы прикладной электродинамики. М., 1970.
- Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. М., 1974.
- Унгер Х.-Г. Планаарные и волоконные оптические волноводы. М., 1980.
- Васильев Е.Н., Сурков В.И. Радиоволноводы. М., 1990.
- Никольский В.В. Вариационные методы для внутренних задач электродинамики. М., 1967.
- Wik M., Dumas D., Yevick D. // J. Opt. Soc. Amer. A. 2005. **22**, N 7. P. 1341.
- Боголюбов А.Н., Лавренова А.В. // Матем. моделирование. 2008. № 2. С. 122.

### Mathematical modeling of waveguides with fractal insets

**A. N. Bogolyubov<sup>a</sup>, A. A. Petukhov<sup>b</sup>, N. E. Shapkina**

*Department of Mathematics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.*

*E-mail:* <sup>a</sup> *bogon7@yandex.ru*, <sup>b</sup> *petukhov@physics.msu.ru*.

The paper is devoted to mathematical modeling of rectangular dielectric waveguides with local periodic and fractal insets. A three-dimensional scalar boundary-value problem for the Helmholtz equation is considered. The solution is obtained numerically by means of incomplete Galerkin method and finite-difference techniques. The transmission spectra for one-, two- and three-dimensional periodic and fractal insets are computed and compared with each other. Practical applications are suggested.

*Keywords:* waveguide with local non-regularities, fractals, photonic crystals.

PACS: 42.79.Gn.

Received 1 November 2010.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 2(2011).

### Сведения об авторах

- Боголюбов Александр Николаевич — докт. физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939-10-33, e-mail: bogon7@yandex.ru.
- Петухов Андрей Андреевич — аспирант; e-mail: petukhov@physics.msu.ru.
- Шапкина Наталья Евгеньевна — канд. физ.-мат. наук, доцент; тел.: (495) 939-10-33, e-mail: neshapkina@mail.ru.