Полнота системы собственных векторов квадратичного операторного пучка теории волноводов

А. Л. Делицын

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
E-mail: delitsyn@mail.ru

Статья поступила 31.10.2010, подписана в печать 22.11.2010

Доказана полнота системы собственных векторов H_n квадратичного операторного пучка, возникающего в теории электромагнитных волноводов. Для доказательства используется установленная ранее полнота иной системы собственных векторов спектральной задачи теории волноводов, рассматриваемой в другой постановке.

Ключевые слова: уравнения Максвелла, собственные волны волноводов, полнота системы собственных векторов, квадратичный операторный пучок.

УДК: 517.958. PACS: 02.30.Sa.

Возможны различные постановки задачи о собственных волнах волноводов с диэлектрическим заполнением [1–3]. Монография [4] свидетельствует о том, что сохраняется интерес к данному вопросу. Применяемый автором метод [3, 5] позволил свести спектральную задачу теории волноводов к задаче, удовлетворяющей условиям теоремы об операторном пучке Келдыша. В настоящей работе показано, что полнота системы собственных векторов в других возможных постановках задачи, например векторов H_n в пространстве L_2, является следствием полученных ранее результатов.

Рассматривается система уравнений

$$\operatorname{rot}\varepsilon^{-1}\operatorname{rot}H - k^2\mu H = 0 \tag{1}$$

в цилиндре $Q = \{(x,y)\in\Omega,\ z\in(-\infty,\infty)\}$ с краевыми условиями

$$[\varepsilon^{-1}\operatorname{rot}H, n]|_{\partial Q} = 0, \quad (\mu H, n)|_{\partial Q} = 0, \tag{2}$$

где диэлектрическая и магнитная проницаемости не зависят от координаты z. Условия сопряженияя на поверхностях разрыва для краткости выписывать не будем. Считаем, что выполнены условия $0<\varepsilon_1\leqslant\varepsilon(x,y)\leqslant\varepsilon_2$, $0<\mu_1\leqslant\mu(x,y)\leqslant\mu_2$, граница области $\partial\Omega$ кусочно-гладкая.

Будем искать решения вида $H = H(x,y)e^{i\gamma z}$. Подставляя H в уравнение (1) и сокращая на $e^{i\gamma z}$, получаем спектральную задачу для уравнения

$$AH + i\gamma BH + \gamma^2 CH - k^2\mu H = 0, \tag{3}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} \operatorname{rot}_\perp\varepsilon^{-1}\operatorname{rot}_\perp & 0 \\ 0 & -\operatorname{div}_\perp\varepsilon^{-1}\operatorname{grad}_\perp \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \operatorname{grad}_\perp\varepsilon^{-1} \\ -\operatorname{div}_\perp\varepsilon^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

с соответствующими граничными условиями (см. (2)).

Под операторами $\operatorname{rot}_\perp$, $\operatorname{div}_\perp$, $\operatorname{grad}_\perp$ понимаем

$$\operatorname{rot}_\perp A_\perp = \frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x, \quad \operatorname{rot}_\perp\phi = \frac{\partial}{\partial y}\phi e_x - \frac{\partial}{\partial x}\phi e_y,$$

$$\operatorname{grad}_\perp\phi = \frac{\partial}{\partial x}\phi e_x + \frac{\partial}{\partial y}\phi e_y, \quad \operatorname{div}_\perp A_\perp = \frac{\partial}{\partial x}A_x + \frac{\partial}{\partial y}A_y.$$

В работах [3, 5] рассмотрена спектральная задача для системы уравнений

$$-\operatorname{grad}_\perp\mu^{-1}\operatorname{div}_\perp B_\perp - k^2\varepsilon B_\perp - ik\varepsilon\operatorname{rot}_\perp E_z = -\gamma^2\mu^{-1}B_\perp,$$
$$-ik\operatorname{rot}_\perp\varepsilon B_\perp - \operatorname{div}_\perp\varepsilon\operatorname{grad}_\perp E_z = -\gamma^2\varepsilon E_z \tag{4}$$

с краевыми условиями

$$(B,n)|_{\partial\Omega} = 0, \quad E_z|_{\partial\Omega} = 0.$$

Задача для системы уравнений (4) сводится к спектральной задаче для операторного пучка Келдыша В работах [3, 5] доказана полнота системы корневых векторов задачи для уравнения (4) в пространстве

$$V = \{B_\perp\in\mathcal{H}_0(\operatorname{div}),\ E_z\in\dot W_2^1,$$
$$(\mu^{-1}B_\perp, \operatorname{rot}_\perp\phi)_{L_2(\Omega)} + ik(\varepsilon E_z,\phi)_{L_2(\Omega)} = 0 \ \ \forall\,\phi\in\dot W_2^1\}.$$

В настоящей работе будет показано, что из полноты системы собственных векторов $\{B_{\perp n}, E_{zn}\}$ следует полнота системы собственных векторов H_n квадратичного пучка (3) дополненных вектором $(0,0,1)$ в пространстве $L_2(\Omega)$. Для упрощения задачи считаем, что присоединенные векторы отсутствуют (например, нет кратных собственных значений).

Утверждение 1. *Система собственных векторов задачи (4) полна в пространстве* $\{A_\perp\in L_2,\ A_z\in L_2,$ $(\mu^{-1}A_\perp, \operatorname{rot}\phi)_{L_2(\Omega)} + ik(\varepsilon A_z,\phi)_{L_2(\Omega)} = 0\ \ \forall\,\phi\in\dot W_2^1\}$.

Пусть $A_\perp\in L_2(\Omega)$. Тогда $A_\perp$ допускает представление

$$A_\perp = \mu\operatorname{grad}_\perp\psi + \operatorname{rot}_\perp\chi, \tag{5}$$

где $\psi\in W_2^1, \chi\in\dot W_2^1$. Доказательство подобного утверждения следует из теоремы Жиро–Равьяра. Рассмотрим спектральную задачу поиска $\psi_n\in W_2^1$, удовлетворяющих уравнению

$$(\mu\operatorname{grad}_\perp\psi, \operatorname{grad}_\perp\phi)_{L_2(\Omega)} = \lambda(\psi,\phi)_{L_2(\Omega)} \ \ \forall\,\phi\in\dot W_2^1. \tag{6}$$

Система собственных векторов ψ_n полна в пространстве W_2^1. Векторы $B_{\perp n} = \mu\operatorname{grad}_\perp\psi_n$ удовлетворяют условию $B_{\perp n}\in\mathcal{H}_0(\operatorname{div})$ и уравнению

$$(\mu^{-1}B_\perp, \operatorname{rot}_\perp\phi)_{L_2(\Omega)} + ik(\varepsilon E_z,\phi)_{L_2(\Omega)} = 0 \ \ \forall\,\phi\in\dot W_2^1.$$

Отсюда следует, что вектор $\mu \operatorname{grad}_\perp \psi$ можно приблизить сколь угодно точно по норме пространства L_2 элементами пространства V.

Элемент $\chi \in \dot{W}_2^1$ удовлетворяет уравнению

$$(\mu^{-1} \operatorname{rot}_\perp \chi, \operatorname{rot}_\perp \phi)_{L_2(\Omega)} = -ik(\varepsilon E_z, \phi)_{L_2(\Omega)} \quad \forall \phi \in \dot{W}_2^1.$$

Элемент E_z приблизим по норме пространства L_2 элементом $E_{zN} \in \dot{W}_2^1$. Из уравнения для определения $\chi_N \in \dot{W}_2^1$

$$(\mu^{-1} \operatorname{rot}_\perp \chi_N, \operatorname{rot}_\perp \phi)_{L_2(\Omega)} = -ik(\varepsilon E_{zN}, \phi)_{L_2(\Omega)} \quad \forall \phi \in \dot{W}_2^1$$

получим, что вектор $\mu^{-1} \operatorname{rot}_\perp \chi_N$ сколь угодно точно приближает по L_2-норме вектор $\mu^{-1} \operatorname{rot}_\perp \chi$. Отсюда следует, что вектор $\{\mu^{-1} \operatorname{rot} \chi_N, E_{zN}\}$ приближает вектор $\{\mu^{-1} \operatorname{rot}_\perp \chi\}$ по L_2-норме.

Таким образом, элементы пространства

$$\{A_\perp \in L_2,\ A_z \in L_2,$$
$$(\mu^{-1} A_\perp, \operatorname{rot} \phi)_{L_2(\Omega)} + ik(\varepsilon A_z, \phi)_{L_2(\Omega)} = 0 \quad \forall \phi \in \dot{W}_2^1\}$$

можно приблизить по норме пространства L_2 векторами пространства V. Поскольку система собственных векторов задачи (4) полна в V, то элементы пространства V могут быть приближены по L_2-норме собственными векторами задачи (4). Следовательно, эта система векторов полна и в указанном пространстве.

Утверждение 2. *Система векторов $H_{\perp n}$ полна в пространстве $L_2(\Omega)$.*

Система векторов $\{B_{\perp n}, E_{zn}\}$, полна в пространстве $\{A_\perp \in L_2,\ A_z \in L_2,\ (\mu^{-1} A_\perp, \operatorname{rot} \phi)_{L_2(\Omega)} + ik(\varepsilon A_z, \phi)_{L_2(\Omega)} = 0 \quad \forall \phi \in \dot{W}_2^1\}$. Таким образом, из условия

$$(\mu^{-1} B_{\perp n}, A_\perp)_{L_2(\Omega)} + (\varepsilon E_{zn}, A_z)_{L_2(\Omega)} = 0 \quad \forall n,$$

где $(\mu^{-1} A_\perp, \operatorname{rot}_\perp \phi)_{L_2(\Omega)} + ik(\varepsilon A_z, \phi)_{L_2(\Omega)} = 0 \quad \forall \phi \in \dot{W}_2^1$, следует $A = 0$. Вектор $\mu^{-1} A_\perp \in \mathcal{H}(\operatorname{rot})$. Обозначая $A_1 = \mu^{-1} A_\perp$ и учитывая, что $E_{zn} = \frac{i}{k} \varepsilon^{-1} \operatorname{rot}_\perp H_\perp$, $A_z = \frac{i}{k} \varepsilon^{-1} \operatorname{rot} A_1$, условие полноты системы векторов $\{B_{\perp n}, E_{zn}\}$ представимо в виде

$$(\mu H_{\perp n}, A_1)_{L_2(\Omega)} + \frac{1}{k^2} \left(\varepsilon^{-1} \operatorname{rot}_\perp H_{\perp n}, \operatorname{rot}_\perp A_1\right)_{L_2(\Omega)} = 0 \quad \forall n.$$

Из него следует $A_1 = 0$. Таким образом, система векторов $H_{\perp n}$ полна в пространстве $\mathcal{H}(\operatorname{rot})$. Отсюда следует ее полнота в L_2. Из полноты системы векторов $H_{\perp n}$ в $(L_2)^2$ следует полнота системы векторов $\{H_{\perp n}, \frac{1}{i\gamma_n} \operatorname{div}_\perp H_{\perp n}\}$, $\{H_{\perp n}, -\frac{1}{i\gamma_n} \operatorname{div}_\perp H_{\perp n}\}$ в пространстве $(L_2)^3$. Действительно, сумма векторов, отличающихся знаком H_z-компоненты, равняется векторам $\{H_{\perp n}, 0\}$, разность $\{0, \operatorname{div}_\perp H_{\perp n}\}$. Условие

$$(H_n, A)_{L_2(\Omega)} = 0 \quad \forall n,$$

где $A \in C^\infty$, приводит к условиям

$$(H_{\perp n}, A_\perp)_{L_2(\Omega)} = 0 \quad \forall n,$$
$$(\operatorname{div}_\perp H_{\perp n}, A_z)_{L_2(\Omega)} = 0 \quad \forall n.$$

Из первого условия следует $A_\perp = 0$. Из второго условия следует $A_z = 1$. Следовательно, система векторов H_n, дополненная вектором $(0, 0, 1)$, полна в L_2.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 09-01-00408а)

Список литературы

1. *Краснушкин П.Е., Моисеев Е.И.* // Докл. АН СССР. 1982. **264**, № 5. С. 1123.
2. *Смирнов Ю.Г.* // Дифф. уравнения. 1991. **27**, № 1. С. 140.
3. *Делицын А.Л.* // Дифф. уравнения. 2000. **36**, № 5. С. 629.
4. *Смирнов Ю.Г.* Математические методы исследования задач электродинамики. Пенза, 2009.
5. *Делицын А.Л.* // Изв. РАН. Сер. матем. 2007. **71**, № 3. С. 61.

The comleteness of quadratic pencill eigenvectors of waveguide problem

A. L. Delitsyn

Department of Mathematics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.
E-mail: delitsyn@mail.ru.

The completeness of eigenvectors H_n of quadratic operator pencil of waveguide electromagnetic theory is proved. The proof is based on the completeness of the eigenvector system of another problem.

Keywords: Maxwell equations, waveguide modes, eigenvectors completeness, qvadratic operator pencil.
PACS: 02.30.Sa.
Received 31 October 2010.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 2(2011).

Сведения об авторе

Делицын Андрей Леонидович — докт. физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939-39-47, e-mail: delitsyn@mail.ru.