РАДИОФИЗИКА, ЭЛЕКТРОНИКА, АКУСТИКА

Исследование флуктуаций положения лучей при совместной диффузии в однородной среде со случайными неоднородностями

О. К. Власова[1,a], Л. И. Приходько[2,b]

[1] *Центр гидрофизических исследований МГУ.*
[2] *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра физики атмосферы. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.*
E-mail: [a] *vlasovaok@mail.ru,* [b] *l.prikhodko@mail.ru*

Статья поступила 02.05.2010, подписана в печать 17.12.2010

Рассмотрены флуктуации положения двух лучей, распространяющихся в среде со случайными неоднородностями диэлектрической проницаемости. Решение задачи основано на методе диффузии луча. Получена плотность вероятностей для разности положения лучей в случае, когда начальное расстояние между лучами много меньше радиуса корреляции флуктуаций диэлектрической проницаемости.

Ключевые слова: случайно-неоднородные среды, диффузия луча, уравнение Эйнштейна–Фоккера.
УДК: 550.388.2. PACS: 41.20.Jb.

Введение

Исследование совместной диффузии двух лучей, распространяющихся в случайно-неоднородной среде, можно использовать для описания совместной диффузии N лучей. Такая постановка задачи позволяет подойти к вопросу о флуктуациях интенсивности волны из чисто геометрических соображений [1].

Метод диффузии луча, используемый в настоящей работе, основан на представлении в приближении геометрической оптики уравнений для положения и направления лучевого вектора в виде уравнений Ланжевена [2]

$$\frac{d\xi_i}{ds} = v_i(\boldsymbol{\xi}, s) + f_i(\boldsymbol{\xi}, s), \tag{1}$$

где $v_i(\boldsymbol{\xi}, s)$ — детерминированные функции, $f_i(\boldsymbol{\xi}, s)$ — случайные функции, обладающие следующими свойствами:

а) $f_i(\boldsymbol{\xi}, s)$ — гауссово случайное поле;

б) $\langle f_i(\boldsymbol{\xi}, s)\rangle = 0;$ (2)

в) $\langle f_i(\boldsymbol{\xi}, s) f_k(\boldsymbol{\xi}', s')\rangle = 2\delta(s-s')F_{ik}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}', s) = B_{ik}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}'; s, s').$

В этом случае плотность вероятностей для решения $\boldsymbol{\xi}(s)$ системы (1) $P_s(\boldsymbol{x}) = \langle\delta(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{x})\rangle$ удовлетворяет уравнению Эйнштейна–Фоккера

$$\frac{\partial P_s(\boldsymbol{x})}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial x_k}\{[v_k(\boldsymbol{x}, s) + A_k(\boldsymbol{x}, s)]\} - \\ - \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l}[F_{kl}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}, s)P_s(\boldsymbol{x})] = 0. \tag{3}$$

В уравнении (3) введено обозначение

$$A_k(\boldsymbol{x}, s) = \left[\frac{\partial F_{kl}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', s)}{\partial x'_l}\right]_{\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}}. \tag{4}$$

В реальных задачах корреляционная функция B_{ik} не может быть записана в виде (2в). Для случая, когда условие δ-коррелированности нарушено, уравнение (3) является приближенным, и под $F_{kl}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', s)$ следует понимать величину

$$F_{kl}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', s) = \int_0^s B_{kl}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', s, s')\, ds',$$

предполагая, что $s \gg s_0$. Здесь s_0 — радиус корреляции функции $f(\boldsymbol{x}, s)$ по переменной s.

Запись уравнений луча в виде уравнений Ланжевена подробно исследуется в [3]. Уравнения луча, следующие из принципа Ферма для изотропной среды, имеют вид

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{d\sigma} = \boldsymbol{S}, \quad \frac{d\boldsymbol{S}}{d\sigma} = \nabla_{\boldsymbol{r}}\eta - \boldsymbol{S}(\boldsymbol{S}\nabla_{\boldsymbol{r}}\eta), \tag{5}$$

где $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{S}$-векторы положения и направления луча, $\eta = \ln n$, $n = n(\boldsymbol{r})$ — показатель преломления среды, σ — длина дуги, пройденной лучом.

Поскольку случайной силой в лучевых уравнениях (5) является функция от показателя преломления, зависящего от $\boldsymbol{r}$ и не зависящего от σ, то условия (2в) не могут быть удовлетворены. В работе [1] предлагается способ перехода к уравнениям Ланжевена, заключающийся в замене в лучевых уравнениях длины дуги σ на координату z, вдоль которой первоначально направлен луч и от которой зависит показатель преломления. Такой переход возможен при условии, что отклонения луча от первоначального направления малы $\overline{\boldsymbol{S}_\perp^2} \ll 1$. В предположении, что флуктуации диэлектрической проницаемости малы:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \alpha\varepsilon_\alpha, \quad \alpha \ll 1,$$

применяется метод малых возмущений в уравнениях луча, следующих из принципа Ферма (5). В результате получаем уравнения луча, соответствующие уравнениям (1):

$$\frac{d\boldsymbol{r}_\perp}{dz} = \boldsymbol{S}_\perp, \frac{d\boldsymbol{S}_\perp}{dz} = \frac{\alpha}{2\varepsilon_0}\nabla_{\boldsymbol{r}_\perp}\varepsilon_\alpha(\boldsymbol{r}_\perp, z), \tag{6}$$

z — координата, вдоль которой первоначально направлен луч, $\boldsymbol{r}_\perp\{x,y\}$, $\boldsymbol{S}_\perp\{S_x,S_y\}$ — векторы, обозначающие положение и направление луча в плоскости, перпендикулярной z. Решение задачи рассеяния луча на основании уравнений (6) и в предположении, что радиус корреляции флуктуаций диэлектрической проницаемости $r_0 \ll z$, позволило вычислить средний квадрат флуктуаций направления луча:

$$\overline{\boldsymbol{S}_\perp^2} = 2Dz, \quad D = \frac{\alpha^2\overline{\varepsilon_\alpha^2}\sqrt{\pi}}{4\varepsilon_0^2 r_0}. \tag{7}$$

D — коэффициент диффузии луча, который возникает при вычислении коэффициентов уравнения (3). Таким образом, представленные выше условия

$$\overline{\boldsymbol{S}_\perp^2} \ll 1 \quad \text{или} \quad Dz \sim \alpha^2\overline{\varepsilon_\alpha^2}\frac{z}{r_0} \ll 1$$

предполагают, что флуктуаций диэлектрической проницаемости малы, что позволяет использовать метод малых возмущений.

В работе [2] была рассмотрена задача о совместной диффузии двух лучей, однако решить уравнение для плотности вероятностей $W(\boldsymbol{r}_{\perp1},\boldsymbol{r}_{\perp2},\boldsymbol{S}_{\perp1},\boldsymbol{S}_{\perp2},z)$ не удалось. В связи с этим нами уже была предпринята попытка изучения диффузии двух лучей без учета флуктуаций положения лучей [4]. В настоящей работе предложено описание совместной диффузии двух лучей плотностью вероятностей $W(\boldsymbol{r}_{\perp1},\boldsymbol{r}_{\perp2},z)$ и получено решение уравнения Эйнштейна–Фоккера для закона распределения расстояния между лучами в случае, когда начальное расстояние много меньше радиуса корреляции неоднородностей.

1. Уравнение Эйнштейна–Фоккера

Представим уравнения двух лучей в виде динамических стохастических уравнений типа уравнения Ланжевена (1), позволяющих перейти к уравнению Эйнштейна–Фоккера (3):

$$\frac{d\boldsymbol{r}_{\perp1,2}}{dz} = \boldsymbol{S}_{\perp1,2}, \frac{d\boldsymbol{S}_{\perp1,2}}{dz} = \frac{\alpha}{2\varepsilon_0}\nabla_{\boldsymbol{r}_{\perp1,2}}\varepsilon_\alpha(\boldsymbol{r}_{\perp1,2},z), \tag{8}$$

где 1, 2 — номера лучей,

Как уже говорилось, решить уравнение Эйнштейна–Фоккера, следующее из уравнений (8), не удается [2]. В связи с этим запишем (8) в виде уравнений лишь для положения луча, а именно

$$\frac{d\boldsymbol{r}_{\perp1,2}}{dz} = \frac{\alpha}{2\varepsilon_0}\int_0^z \nabla_{\boldsymbol{r}'_{\perp1,2}}\varepsilon_\alpha(\boldsymbol{r}'_{\perp1,2},z')\,dz'. \tag{9}$$

Предполагаем далее, что (9) в результате описанных выше условий удовлетворяет требованиям (2), позволяющим перейти от динамического уравнения к уравнению Эйнштейна–Фоккера для плотности вероятностей $W(\boldsymbol{r}_{\perp1},\boldsymbol{r}_{\perp2},z)$ (3):

$$\frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x_i}(A_{x_i}W) + \frac{\partial W}{\partial y_i}(A_{y_i}W) = \\ = \frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_k}[F_{x_ix_k}W] + \frac{\partial^2}{\partial y_i\partial y_k}[F_{y_iy_k}W] + \frac{\partial^2}{\partial x_i\partial y_k}[F_{x_iy_k}W],$$

где $i=1,2$.

Вычисление коэффициентов (см. введение) рассмотрим на примере вычисления $F_{x_1x'_1}$ в предположении, что функция корреляции флуктуаций диэлектрической проницаемости является гауссоидой:

$$\rho(r) = \frac{\langle\varepsilon_\alpha(\boldsymbol{r}')\varepsilon_\alpha(\boldsymbol{r}'')\rangle}{\overline{\varepsilon_\alpha^2}} = e^{-r^2/r_0^2} = \\ = e^{-[(x'-x'')^2+(y'-y'')^2+(z'-z'')^2]/r_0^2},$$

$$F_{x_1x'_1}(\boldsymbol{r}_{\perp1},\boldsymbol{r}'_{\perp1},z) = \\ = \frac{\alpha^2}{4\varepsilon_0^2}\int_0^z dz'\left\langle\int_0^{z'}\frac{\partial\varepsilon_\alpha(\boldsymbol{r}''_{\perp1},z'')}{\partial x''_1}dz''\int_0^z\frac{\partial\varepsilon_\alpha(\boldsymbol{r}'''_{\perp1},z''')}{\partial x'''_1}dz'''\right\rangle = \\ = \frac{\alpha^2\overline{\varepsilon_\alpha^2}}{4\varepsilon_0^2}\int_0^z dz'\int_0^{z'}\int_0^z\frac{\partial^2\rho}{\partial x''_1\partial x'''_1}dz''\,dz'''.$$

Дифференцирование функции корреляции и переход к переменным разности и полусуммы при интегрировании $z=z''-z'''$, $z_0=\frac{z''+z'''}{2}$ позволяет получить следующее выражение:

$$F_{x_1x'_1} = Dz^2e^{-\Delta\boldsymbol{r}_{\perp1}^2/r_0^2}(1-2\frac{(x_1-x'_1)^2}{r_0^2}), \\ \Delta\boldsymbol{r}_{\perp1}^2 = (x_1-x'_1)^2+(y_1-y'_1)^2, \\ D = \frac{\alpha^2\overline{\varepsilon_\alpha^2}\sqrt{\pi}}{4\varepsilon_0^2 r_0}. \tag{10}$$

Вычисляя по аналогии остальные коэффициенты и полагая в них $z=z'$ в соответствии с уравнением (3), получим

$$F_{x_1x_1} = F_{y_1y_1} = F_{x_2x_2} = F_{y_2y_2} = Dz^2, F_{x_1y_1} = F_{x_2y_2} = 0,$$

$$F_{x_1x_2} = Dz^2e^{-\Delta\boldsymbol{r}_\perp^2/r_0^2}\left(1-2\frac{\Delta x^2}{r_0^2}\right),$$

$$F_{y_1y_2} = Dz^2e^{-\Delta\boldsymbol{r}_\perp^2/r_0^2}\left(1-2\frac{\Delta y^2}{r_0^2}\right),$$

$$F_{x_1y_2} = F_{y_1x_2} = -2Dz^2e^{-\Delta\boldsymbol{r}_\perp^2/r_0^2}\frac{\Delta x\Delta y}{r_0^2},$$

$$\Delta x = x_1-x_2, \quad \Delta y = y_1-y_2, \quad \Delta\boldsymbol{r}_\perp^2 = \Delta x^2+\Delta y^2.$$

Согласно (4) коэффициенты A_{x_i}, A_{y_i} равны

$$A_{x_1} = 4Dz^2e^{-\Delta\boldsymbol{r}_\perp^2/r_0^2}\frac{\Delta x}{r_0^2}\left(2-\frac{\Delta\boldsymbol{r}_\perp^2}{r_0^2}\right), \quad A_{x_2} = -A_{x_1},$$

$$A_{y_1} = 4Dz^2e^{-\Delta\boldsymbol{r}_\perp^2/r_0^2}\frac{\Delta y}{r_0^2}\left(2-\frac{\Delta\boldsymbol{r}_\perp^2}{r_0^2}\right), \quad A_{y_2} = -A_{y_1}.$$

Уравнение Эйнштейна–Фоккера приобретает вид

$$\partial z(\boldsymbol{r}_{\perp1},\boldsymbol{r}_{\perp2},z) = Dz^2\left(\frac{\partial^2W}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2W}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2W}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2W}{\partial y_2^2}\right) + \\ + 2Dz^2e^{-\Delta\boldsymbol{r}_\perp^2/r_0^2}\left[2\left(\frac{\partial W}{\partial x_1}-\frac{\partial W}{\partial x_2}\right)\frac{\Delta x}{r_0^2}\left(2-\frac{\Delta\boldsymbol{r}_\perp^2}{r_0^2}\right)+\right.$$

$$+2\left(\frac{\partial W}{\partial y_1}-\frac{\partial W}{\partial y_2}\right)\frac{\Delta y}{r_0^2}\left(2-\frac{\Delta \boldsymbol{r}_\perp^2}{r_0^2}\right)+$$
$$+\left(1-2\frac{\Delta y^2}{r_0^2}\right)\frac{\partial^2 W}{\partial y_1\partial y_2}+\left(1-2\frac{\Delta x^2}{r_0^2}\right)\frac{\partial^2 W}{\partial x_1\partial x_2}-$$
$$-2\frac{\Delta x\Delta y}{r_0^2}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1\partial y_2}+\frac{\partial^2 W}{\partial x_2\partial y_1}\right)\Bigg]. \quad (11)$$

Предположим, что при $z=0$ лучи расположены вдоль координаты x, координаты первого луча $\{0,0\}$, второго $\{x_{02},0\}$, тогда начальные условия решения уравнения (11) таковы:

$$W(z=0)=\delta(\boldsymbol{r}_{\perp 1})\,\delta(x_2-x_{02})\,\delta(y_2).$$

2. Решение уравнения Эйнштейна–Фоккера

Для решения уравнения (11) перейдем к переменным разности и полусуммы

$$\boldsymbol{r}_-=\boldsymbol{r}_{\perp 1}-\boldsymbol{r}_{\perp 2},\quad \boldsymbol{r}_+=\frac{\boldsymbol{r}_{\perp 1}+\boldsymbol{r}_{\perp 2}}{2}$$

и проинтегрируем полученное уравнение по y_+, x_+. В результате получаем уравнение для плотности вероятностей распределения расстояния между лучами $\tilde W(\boldsymbol{r}_-,z)$:

$$\frac{\partial \tilde W(\boldsymbol{r}_-,z)}{\partial z}=2Dz^2\left(\frac{\partial^2\tilde W}{\partial {x_-}^2}+\frac{\partial^2\tilde W}{\partial {y_-}^2}\right)-$$
$$-2Dz^2e^{-{\boldsymbol{r}_-}^2/r_0^2}\left[\frac{\partial^2\tilde W}{\partial {x_-}^2}\left(1-2\frac{{x_-}^2}{r_0^2}\right)+\frac{\partial^2\tilde W}{\partial {y_-}^2}\left(1-2\frac{{y_-}^2}{r_0^2}\right)-\right.$$
$$-4\frac{x_-y_-}{r_0^2}\frac{\partial^2\tilde W}{\partial x_-\partial y_-}-4\frac{y_-}{r_0^2}\left(2-\frac{{\boldsymbol{r}_-}^2}{r_0^2}\right)\frac{\partial\tilde W}{\partial y_-}-$$
$$\left.-4\frac{x_-}{r_0^2}\left(2-\frac{{\boldsymbol{r}_-}^2}{r_0^2}\right)\frac{\partial\tilde W}{\partial x_-}\right] \quad (12)$$

с начальными условиями

$$\tilde W(\boldsymbol{r}_-,z=0)=\delta(\boldsymbol{r}_--\boldsymbol{r}_{-0})=\delta(y_-)\,\delta(x_--x_{02}).$$

Очевидно, что решить уравнение (12) в общем случае не удается. Из (12) следует, что, когда начальное расстояние между лучами много больше радиуса корреляции неоднородностей, относительная диффузия происходит с удвоенным коэффициентом диффузии по отношению к диффузии отдельного луча, что соответствует статистической независимости каждого луча. Поскольку в настоящей работе рассматривается случай малых флуктуаций положения луча, то в предположении, что начальное расстояние между лучами мало по сравнению с радиусом корреляции неоднородностей, будет справедливо и условие

$$\frac{{\boldsymbol{r}_-}^2}{r_0^2}\ll 1.$$

В этом случае уравнение (12) приобретает вид

$$\frac{\partial\tilde W}{\partial z}=2Dz^2\left\{\left(3\frac{{x_-}^2}{r_0^2}+\frac{{y_-}^2}{r_0^2}\right)\frac{\partial^2\tilde W}{\partial {x_-}^2}+\right.$$
$$+\left(3\frac{{y_-}^2}{r_0^2}+\frac{{x_-}^2}{r_0^2}\right)\frac{\partial^2\tilde W}{\partial {y_-}^2}+4\frac{x_-y_-}{r_0^2}\frac{\partial^2\tilde W}{\partial x_-\partial y_-}+$$
$$\left.+8\frac{y_-}{r_0^2}\frac{\partial\tilde W}{\partial y_-}+8\frac{x_-}{r_0^2}\frac{\partial\tilde W}{\partial x_-}\right\}. \quad (13)$$

Для решения (13) перейдем к полярной системе координат:

$$x_-=\rho\cos\varphi,\quad y_-=\rho\sin\varphi,$$
$$\rho=\sqrt{{x_-}^2+{y_-}^2},\quad \varphi=\operatorname{arctg}\frac{y_-}{x_-}.$$

Получим для функции $\tilde W(\rho,\varphi)$ уравнение

$$\frac{\partial\tilde W(\rho,\varphi)}{\partial z}=\frac{6Dz^2}{r_0^2}\left\{\rho^2\frac{\partial^2\tilde W}{\partial\rho^2}+\frac{1}{3}\frac{\partial^2\tilde W}{\partial\varphi^2}+3\rho\frac{\partial\tilde W}{\partial\rho}\right\}, \quad (14)$$
$$\tilde W(\rho,\varphi,z{=}0)=\delta(\rho-\rho_0)\,\delta(\varphi),$$

где $\rho_0=x_{02}$.

Применяя далее метод разделения переменных, перейдем от (14) к следующим уравнениям:

$$\frac{\partial U(\varphi,z)}{\partial z}=\frac{2Dz^2}{r_0^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2},\quad U(\varphi,z{=}0)=\delta(\varphi),$$
$$\frac{\partial V(\rho,z)}{\partial z}=\frac{6Dz^2}{r_0^2}\left\{\rho^2\frac{\partial^2 V}{\partial\rho^2}+3\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right\},$$
$$V(\rho,z{=}0)=\delta(\rho-\rho_0).$$

Решением первого уравнения является нормальное распределение с нулевым средним значением и дисперсией $\sigma_\varphi^2=\frac{4Dz^3}{3r_0^2}$ [5].

Переходя в уравнении для $V(\rho,z)$ к переменной $u=\ln\rho$, получим для $\bar V(u)$ уравнение

$$\frac{\partial\bar V(u,z)}{\partial z}=\frac{6Dz^2}{r_0^2}\left(\frac{\partial^2\bar V}{\partial u^2}+2\frac{\partial\bar V}{\partial u}\right)$$

и начальные условия

$$\bar V(u,z{=}0)=\delta(u-u_0),\quad u_0=\ln\rho_0.$$

Решение последнего уравнения известно [6]:

$$\bar V(u,z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma(z)}\exp\left\{-\frac{(u-u_0+\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right\},\quad \sigma^2=\frac{4Dz^3}{r_0^2}.$$

В результате получаем для $V(\rho,z)$, учитывая якобиан преобразования, следующее выражение:

$$V(\rho,z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\rho}\exp\left\{-\frac{[\ln\rho-\ln\rho_0+\sigma^2]^2}{2\sigma^2}\right\},$$

или, вводя безразмерную переменную $x=\frac{\rho}{\rho_0}$, получим

$$\tilde V(x,z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma x}\exp\left\{-\frac{(\ln x+\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad (15)$$

так называемое логарифмически нормальное распределение, т.е. нормальное распределение для $\ln x$ с дисперсией σ^2 и средним значением $-\sigma^2$.

Исследование логнормальных процессов и их отношение к марковским процессам подробно описывается в работах [7, 8].

Графики логнормального распределения (15) представлены на рис. 1, 2. Поскольку распределение (15)

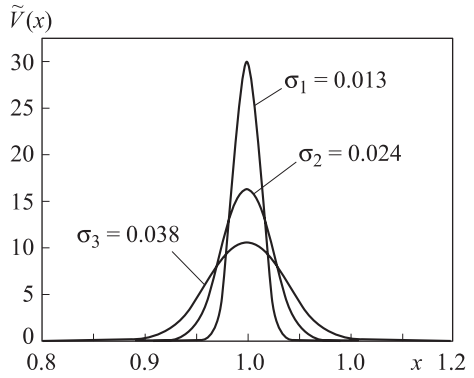

Рис. 1. Логарифмически нормальная плотность вероятностей расстояния между лучами (15) при распространении в тропосфере для различных значений z. Графики соответствуют значениям $\sigma_1 = 0.013$, $z_1 = 10$ км; $\sigma_2 = 0.024$, $z_2 = 15$ км; $\sigma_3 = 0.038$, $z_3 = 20$ км

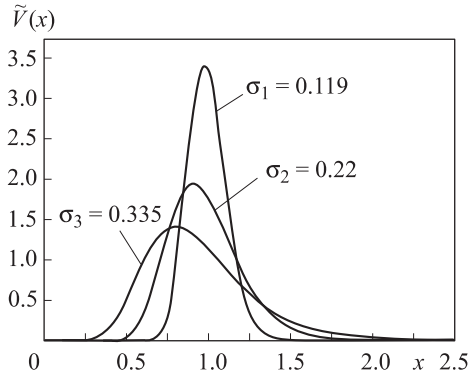

Рис. 2. Логарифмически нормальная плотность вероятностей расстояния между лучами (15) при распространении в E-слое ионосферы для различных значений z. Графики соответствуют значениям $\sigma_1 = 0.119$, $z_1 = 10$ км; $\sigma_2 = 0.219$, $z_2 = 15$ км; $\sigma_3 = 0.335$, $z_3 = 20$ км

характеризуется лишь одним параметром $\sigma^2 = \sqrt{\pi}\,\overline{\varepsilon_\alpha^2}\left(\frac{z}{r_0}\right)^3$, то рассмотрим зависимость распределения от пройденного лучами пути z, полагая остальные параметры фиксированными.

Рис. 1 иллюстрирует распределение (15) при рассеянии лучей в тропосфере [9]: $\overline{\varepsilon_\alpha^2} = 10^{-10}$, $r_0 = 0.1$ км, $z_1 = 10$ км, $z_2 = 15$ км, $z_3 = 20$ км; рис. 2 — при рассеянии в E-слое ионосферы: $\overline{\varepsilon_\alpha^2} = 10^{-6}$, $r_0 = 0.5$ км, $z_{1,2,3} = 10$, 15, 20 км. Как видно из графиков, плотность вероятностей резко возрастает в диапазоне от 0 до 1 по оси абсцисс, где $x = \frac{\rho}{\rho_0}$, а затем убывает, сремясь к нулю. Чем больше пройденный лучом путь z, соответственно и σ, тем ниже уровень плотности вероятностей. Кроме того, с ростом z максимум плотности вероятностей все дальше отодвигается от 1 в сторону 0. Так, например, на рис. 2 для $z_1 = 10$ км, $\frac{\rho_{\max}}{\rho_0} = 0.97$; $z_2 = 15$ км, $\frac{\rho_{\max}}{\rho_0} = 0.90$; $z_3 = 20$ км, $\frac{\rho_{\max}}{\rho_0} = 0.79$.

Первые два момента распределения (15) равны

$$\bar{\rho} = \rho_0 e^{-\sigma^2/2}, \quad \overline{\rho^2} = \rho_0^2.$$

Таким образом, с увеличением пройденного лучами пути уменьшается среднее расстояние между лучами. Для малых значений σ, характерных для условий тропосферного распространения (рис. 1), очевидно, не просходит заметного уменьшения среднего расстояния между лучами. В случае больших значений σ (рис. 2) наблюдается уменьшение среднего расстояния между лучами. Так, для $\sigma_{1,2,3}$ соответствующие

$$\bar{\rho}_1 = \rho_0 \cdot 0.99, \quad \bar{\rho}_2 = \rho_0 \cdot 0.98, \quad \bar{\rho}_3 = \rho_0 \cdot 0.94.$$

Последнее обстоятельство можно объяснить статистическим влиянием лучей друг на друга при прохождении ими достаточно большого пути в E-слое ионосферы, где дисперсия флуктуаций диэлектрической проницаемости значительно превосходит соответствующую дисперсию тропосферы.

Заметим, что более высокие моменты распределения (15) растут с увеличением пройденного расстояния, например:

$$\overline{\rho^3} = \rho_0^3 e^{(3/2)\sigma^2}, \quad \overline{\rho^4} = \rho_0^4 e^{4\sigma^2}.$$

Экспоненциальный рост моментов высших порядков объясняется в работе [7] наличием редких, но сильных выбросов на кривой реализации процесса $\rho(z)$.

Заключение

Представленное в виде уравнения Ланжевена уравнение луча (9) позволило решить задачу о совместной диффузии двух лучей в среде со случайными неоднородностями диэлектрической проницаемости для случая, когда расстояние между лучами значительно меньше радиуса корреляции неоднородностей. Полученное в результате решения уравнения Эйнштейна–Фоккера логарифмически нормальное распределение расстояния между лучами проанализировано для конкретных случаев рассеяния в атмосфере.

Список литературы

1. *Кляцкин В.И.* Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М., 1980.
2. *Кляцкин В.И., Татарский В.И.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1971. **14**, № 5. С. 707.
3. *Власова О.К.* Развитие метода диффузии луча и решение некоторых задач рассеяния: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. М., 2004.
4. *Власова О.К., Приходько Л.И.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2009. № 4. С. 38.
5. *Чандрасекар С.* Стохастические проблемы в физике и астрономии. М., 1947.
6. *Рытов С.М.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. 1. Случайные процессы. М., 1976.
7. *Кляцкин В.И., Саичев А.И.* // Успехи физ. наук. 1992. **162**, № 3. С. 161.
8. *Кляцкин В.И.* Стохастические уравнения. Теория и ее приложения к акустике, гидродинамике и радиофизике. Т. 1, 2. М., 2008.
9. *Фейнберг Е.Л.* Распространение радиоволн вдоль земной поверхности. М., 1961.

The study of fluctuations of the rays positions at the mutual diffusion in a medium with random inhomogeneities

O. K. Vlasova[1,a], **L. I. Prikhod'ko**[2,b]

[1] *Center of Hydrophysical Research, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.*
[2] *Department of Physics of Atmosphere, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.*
E-mail: [a] *vlasovaok@mail.ru,* [b] *l.prikhodko@mail.ru.*

Fluctuations of the positions of two rays, propagating in a medium with random inhomogeneities of dielectric permittivity, are considered. The probabilities density of the relative distance between the positions are obtained for a case when an initial distance between rays is much smaller than the correlation radius of fluctuations of dielectric permittivity.

Keywords: random media, ray diffusion, Einstein-Fokker equation.
PACS: 41.20.Jb.
Received 2 May 2010.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 2(2011).

Сведения об авторах

1. Власова Ольга Кузьминична — канд. физ.-мат. наук, мл. науч. сотр.; e-mail: vlasovaok@mail.ru.
2. Приходько Лидия Ивановна — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр.; e-mail: l.prikhodko@mail.ru.