АСТРОНОМИЯ, АСТРОФИЗИКА И КОСМОЛОГИЯ

Корреляционный тензор магнитного поля во Вселенной с многосвязным пространственным сечением

А. С. Рубашный[1,a], Д. Д. Соколов[2,b]

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
[1] механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей;
[2] физический факультет, кафедра математики.
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1.
E-mail: [a] alex.rubashny@gmail.com, [b] sokoloff@dds.srcc.msu.su

Статья поступила 21.11.2010, подписана в печать 10.12.2010

Анализируется понятие статистической однородности и изотропии для векторных полей в космологических моделях с многосвязными пространственными сечениями. На примере плоского трехмерного тора показано, что в этом случае корреляционный тензор статистически однородного и изотропного (локально) бездивергентного векторного поля зависит не от одной функции, как это бывает в односвязном пространстве, а от счетного набора функций, отвечающих различным типам геодезических, соединяющих точки, в которых вычисляется этот тензор.

Ключевые слова: космологические модели, однородность и изотропия, магнитное поле.
УДК: 530.12. PACS: 98.80.Jk.

Введение

Представления статистической гидромеханики (например, концепция колмогоровской турбулентности) широко и обычно без всяких оговорок используется в космологии. Однако эти представления изначально были развиты для плоского евклидова пространства, а их использование в неевклидовых космологических моделях требует дополнительного исследования. Уже простейшая конструкция статистической гидромеханики — корреляционный тензор поля скорости или магнитного поля — требует перемножения векторных полей, приложенных к различным точкам пространства, однако непосредственно выполнить эту операцию в неевклидовом пространстве невозможно. Тем более не очевидно, как выписать в таком пространстве условие бездивергентности корреляционного тензора магнитного поля или поля скорости несжимаемой жидкости.

В работе [1] показано, как преодолеваются эти трудности для бездивергентных полей в космологических моделях с односвязными пространственными сечениями в виде пространств постоянной кривизны, т.е. в пространстве Лобачевского или в сферическом пространстве. Однако помимо этих односвязных пространств существуют и многосвязные пространственные формы постоянной кривизны, и нет никакой гарантии, что они не являются сечениями реальных космологических моделей. Впервые на это обстоятельство обратил внимание Ф. Клейн [2] сразу же после появления релятивистской космологии. В работах [3, 4] были предложены первые практически применимые наблюдательные тесты для выделения той части пространственного сечения, в которой топологическое строение просто. После того как появились наблюдения флуктуаций реликтового радиоизлучения, размеры области, в которой можно гарантировать простоту топологического строения пространственного сечения, существенно увеличились и стали сравнимыми с расстоянием до горизонта (см., например, [5]). Тем не менее нельзя исключить того, что Вселенная имеет сложное топологическое строение на бóльших масштабах, так что вопрос о перенесении понятий статистической гидромеханики в многосвязные пространства сохраняет актуальность.

Специфика перехода к многосвязным пространствам состоит в том, что они являются однородными и изотропными лишь локально, а в целом они анизотропны (часто и неоднородны) [4], поскольку они получаются из соответствующих односвязных пространств факторизацией по подгруппе в группе движений, при выборе которой мы и теряем изотропию. Единственным исключением является эллиптическое пространство [6], которое является изотропным в целом, так как группа движений, с помощью которой оно строится из сферического, не содержит поворотов. Случай эллиптического пространства также был рассмотрен в работе [1].

Итак, перед нами стоит задача так модифицировать понятие статистической однородности и изотропии, чтобы корреляционный тензор был локально однороден и изотропен, а глобально анизотропен. Поскольку интересующая нас проблема никак не связана с наличием ненулевой кривизны, она сохраняет смысл и для плоских многосвязных пространств. Поэтому, чтобы избежать громоздких обозначений, мы будем рассматривать ее на примере плоского тора.

Перед тем как обсуждать более сложные пространственные формы постоянной кривизны, напомним основные факты, связанные с распространением понятия статистической однородности и изотропии на односвязные пространства [1]. Для определенности будем рассматривать пространство отрицательной кривизны и говорить о магнитном поле.

1. Корреляционный тензор в односвязном пространстве

Напомним, что в евклидовом пространстве корреляционный тензор магнитного поля $\boldsymbol{H}$ определяется как $R_{ij}(\boldsymbol{r}) = <H_i(\boldsymbol{x})H_j(\boldsymbol{y})>$, где $\boldsymbol{r} = y - x$ — радиус-вектор, соединяющий точки $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$. В неевклидовом пространстве векторы $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{y})$ находятся в разных касательных пространствах, так что их произведение не определено. Поэтому для построения корреляционного тензора нужно перенести второй вектор в точку приложения первого с помощью параллельного переноса. Рассмотрим геодезическую $\gamma(t)$, соединяющую две эти точки, и определим $R^{ij} = <H^i, T_{21}H^j>$, где T_{21} — параллельный перенос из второй точки в первую.

Обозначим нормированные касательные векторы к геодезической $\gamma(t)$ через n^i. Как и в евклидовом случае, инвариантами движений являются величины g^{ij} и $n^i n^j$. По аналогии с евклидовым случаем $(R_{ij}(\boldsymbol{r}) = A(r)n_i n_j + B(r)\delta_{ij})$ условие однородности и изотропии естественно понимать как условие того, что корреляционный тензор имеет вид

$$R^{ij} = A(r)n^i n^j + B(r)g^{ij}, \qquad (1)$$

где r — расстояние по геодезической.

Условие бездивергентности получается путем дифференцирования этого выражения по одной из переменных и приводит к тому, что функции A и B выражаются через одну скалярную функцию. Для евклидова пространства это условие имеет вид [7]

$$A = -\frac{r}{2}F', \quad B = F + \frac{r}{2}F'.$$

Проблема, с которой мы сталкиваемся при перенесении этой конструкции на многосвязные пространства постоянной кривизны, состоит в том, что теперь две точки можно соединить целым набором геодезических. Такая же проблема возникает в сферическом пространстве, когда точки, в которых вычисляется корреляционный тензор, являются противоположными. Однако в этом случае коэффициент при $n^i n^j$ обращается в нуль [1], что снимает проблему неопределенности.

2. Плоский тор

Плоский трехмерный тор можно рассматривать как параллелепипед со склеенными противоположными гранями. Нам удобно представлять его как результат отождествления в евклидовом пространстве точек вида $(x+ka, y+lb, z+mc)$ по всем целым k, l, m. В этом случае a, b и c являются сторонами параллелепипеда, а все еклидово пространство — разверткой тора. Заметим, что тор однороднен, поэтому можно считать одну из точек, в которых вычисляется корреляционный тензор, началом координат.

Метрика тора плоская, так что геодезические на развертке являются прямыми линиями. Различные геодезические, соединяющие две фиксированные точки на торе, могут быть занумерованы числами k, l, m. Геодезическая с индексом (k, l, m), соединяющая начало координат с некоторой точкой (x, y, z), соответствует прямой на развертке, соединяющей начало координат с точкой $(x+ka, y+lb, z+mc)$. Расстояние между этими точками равно $r^2_{k,l,m} = (x+ka)^2 + (y+lb)^2 + (z+mc)^2$.

Для нас важно, что при малом изменении взаимного положения двух точек соединяющая их кратчайшая может скачком переходить из одного типа в другой, поэтому конструкция (1) теряет дифференцируемость. Для обеспечения гладкости корреляционного тензора мы вынуждены написать счетную сумму по всем типам (k, l, m) геодезических, соединяющих данные точки, т. е. заменить определение (1) на

$$R^{ij} = \sum_{k,l,m} \left(A_{k,l,m}(r_{k,l,m})n^i_{k,l,m}n^j_{k,l,m} + B_{k,l,m}(r_{k,l,m})g^{ij}\right). \qquad (2)$$

В отличие от (1) это определение содержит бесконечно много функций, которые зависят от различных аргументов. Наша задача теперь — выписать связи между этими функциями в случае бездивергентности поля на плоском торе.

3. Условие бездивергентности

Прямое вычисление производной каждого слагаемого корреляционного тензора (для фиксированной тройки индексов k, l, m) показывает, что условие сводится к соотношению

$$\nabla_i R^{ij} = \sum_{k,l,m} \left(A'_{k,l,m} + A_{k,l,m}\nabla_i n^i_{k,l,m} + B'_{k,l,m}\right) n^j_{k,l,m} = 0,$$

где штрих означает производную по той переменной, от которой зависит данная функция. Здесь мы использовали два равенства, которые легко проверяются для плоской метрики: $n^i_{k,l,m}\frac{\partial r_{k,l,m}}{\partial x^i} = 1$ и $\delta^{ij}\frac{\partial r_{k,l,m}}{\partial x^i} = n^j_{k,l,m}$. Приравнивая коэффициенты при различных $n^j_{k,l,m}$, получаем, что для любых k, l, m должно выполняться условие

$$A'_{k,l,m} + A_{k,l,m}\nabla_i n^i_{k,l,m} + B'_{k,l,m} = 0.$$

Зная геодезические и вычисляя их длины, легко проверить, что дифференциальная связь функций $A_{k,l,m}$ и $B_{k,l,m}$ для любых k, l, m имеет вид

$$A'_{k,l,m} + \frac{2}{r_{k,l,m}}A_{k,l,m} + B'_{k,l,m} = 0. \qquad (3)$$

Теперь удобно выразить функции $A_{k,l,m}$ и $B_{k,l,m}$ через одну функцию $F_{k,l,m} = A_{k,l,m} + B_{k,l,m}$, так что условия (3) сводятся к следующим:

$$A_{k,l,m} = -\frac{r_{k,l,m}}{2}F'_{k,l,m}, \quad B_{k,l,m} = F_{k,l,m} + \frac{r_{k,l,m}}{2}F'_{k,l,m}.$$

4. Обсуждение

Итак, вместо пары скалярных функций A и B и дифференциальной связи между ними в случае односвязных пространств на многосвязных пространствах постоянной кривизны мы вынуждены ввести счетное число функций и указать дифференциальную связь между функциями с соответствующими индексами.

Это непосредственно связано с тем, что мы отказываемся от использования кратчайшей, и нам приходится использовать длины различных геодезических. Отметим, что в односвязных пространствах функции A и B зависят от квадрата расстояния. Теперь же понятие расстояния расщепляется, что влечет за собой и увеличение числа функций.

Если корреляционный радиус мал по сравнению с размерами тора, то функции $A_{0,0,0}$ и $B_{0,0,0}$ вносят в корреляционный тензор наибольший вклад. Однако как только корреляционный радиус становится сравним с размерами тора, мы вынуждены рассматривать всю счетную сумму (2). В принципе можно потребовать совпадения формы функций $F_{k,l,m}$ для всех индексов, однако такое упрощение не вытекает прямо из условия симметрии.

Приведенную конструкцию, естественно, можно повторить и в более сложных многосвязных пространствах, постоянная кривизна которых может и не равняться нулю. При этом снова придется ввести свои функции A и B для каждого типа геодезических, соединяющих данные точки. Далее соотношения между функциями A и B, отвечающими одному типу, будут определяться кривизной, а набор геодезических, соединяющих две точки, и их длина — соотношениями отождествления, с помощью которых из односвязных пространств получены многосвязные.

Заметим, однако, что такие пространства могут быть не только глобально анизотропными, но и глобально неоднородными. В частности, при отождествлении границ части пространства Лобачевского, лежащих между двумя параллельными плоскостями, возникает пространство в виде так называемых рогов [4]. На этом пространстве при перемещении точки в том направлении, в котором расстояние между параллельными плоскостями экспоненциально уменьшается (а это — характерная черта пространства Лобачевского), длина следующей (по длине) за кратчайшей геодезической тоже экспоненциально стремится к нулю. В силу этого для любого корреляционного радиуса ряд, который выражает корреляционный тензор на роге, не сводится к одному члену.

В проведенных выше построениях мы по возможности следовали системе представлений, сложившихся в общей теории относительности. В принципе можно было бы подойти к проблеме по-иному и попробовать приспособить общую теорию относительности к системе понятий статистической гидромеханики. В этом случае было бы естественно рассматривать магнитное поле, поле скорости и другие физические поля не как объекты риманова пространства, а как объекты касательного расслоения и строить корреляционные тензоры в касательных пространствах. Можно было бы также попробовать перейти к систематическому использованию объектов нетензорной природы для описания корреляционных свойств физических полей. В настоящее время трудно сказать, к чему привели бы эти гораздо более радикальные, чем описанный, подходы. Накопление наблюдательных данных о поведении физических полей в областях пространства-времени с нетривиальной топологией (скажем, вблизи черных дыр), вероятно, позволит сделать выбор между ними.

Список литературы

1. *Рубашный А.С., Соколов Д.Д.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2010. № 2. С. 82.
2. *Klein F.* // Gött. Nachr. 1918. **1**. S. 394.
3. *Соколов Д.Д., Шварцман В.Ф.* // ЖЭТФ. 1974. **66**, № 2. С. 412.
4. *Соколов Д.Д., Старобинский А.А.* // Астрон. журн. 1975. **52**, № 5. С. 1041.
5. *Lachieze-Rey M., Luminet J.* // Physics Reports. 1995. **254**. P. 135.
6. *Соколов Д.Д.* // Гравитация и теория относительности. 1977. № 12. С. 142.
7. *Бэтчелор Дж.К.* Теория однородной турбулентности. М., 1955.

Magnetic field correlation tensor in a Universe space with a multiply connected space section

A. S. Rubashny[1,a], **D. D. Sokoloff**[2,b]

[1] *Department of Probability Theory, Faculty of Mechanics and Mathematics;*
[2] *Department of Mathematics, Faculty of Physics,*
M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.
E-mail: [a] *alex.rubashny@gmail.com,* [b] *sokoloff@dds.srcc.msu.su.*

In the case of a Universe with a multiply connected space section, the concept of statistical homogeneity and isotropy for vector fields is discussed. Considering a flat 3D torus as a basic example, we show that the correlation tensor of a statistically homogeneous and isotropic (locally) solenoidal vector field depends on a set of functions corresponding to the homotopic classes of geodesics connecting the points in which the tensor is calculated. In contrast, such tensor in a simply connected Universe depends on just one function.

Keywords: cosmological models, homogeneity and isotropy, magnetic field.
PACS: 98.80.Jk.
Received 21 November 2010.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 2(2011).

Сведения об авторах

1. Рубашный Алексей Сергеевич — аспирант мех.-мат. ф-та МГУ; e-mail: alex.rubashny@gmail.com.
2. Соколов Дмитрий Дмитриевич — докт. физ.-мат. наук, профессор; e-mail: sokoloff@dds.srcc.msu.su.