Об аксиоматическом подходе к квазиклассической теории поля (аксиоматическая квазиклассическая теория поля)

О. Ю. Шведов

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра квантовой статистики и теории поля. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
E-mail: shvedov@phys.msu.ru

Статья поступила 18.11.2010, подписана в печать 23.01.2011

Исследуется связь квазиклассической теории поля с аксиоматическими формулировками квантовой теории поля, теорией источников Швингера, формализмом Лемана–Симанзика–Циммермана (LSZ). Классческий источник Швингера связан с классическим полем, а R-функция LSZ — с квантовым оператором поля. Аксиомы квантовой теории поля записаны в рамках квазиклассического разложения. В рассматриваемом подходе принцип стационарного действия и канонические коммутационные соотношения для операторов поля получаются в качестве следствий, а не постулируются в качестве исходных положений теории.

Ключевые слова: комплексный росток Маслова, аксиоматическая квантовая теория поля, S-матрица Боголюбова, теория источников Швингера, подход Лемана–Симанзика–Циммермана.
УДК: 531.19. PACS: 03.65.Sq, 11.10.Cd.

Введение

1. Важнейшим асимптотическим методом квантовой теории, демонстрирующим соответствие между квантовой и классической физикой, является квазиклассическое приближение. Известны различные подходы к квазиклассическому разложению. В некоторых из них (метод Эренфеста (1927), метод континуального интеграла) исследуются средние значения физических величин. Другая группа квазиклассических методов основана на непосредственной подстановке предполагаемой волновой функции в уравнение Шредингера. Такой подход позволяет устанавливать соответствие между состояниями системы в классической и квантовой теориях; также оказывается значительно удобнее математически оценивать погрешность асимптотических формул [1, 2].

Квазиклассические концепции используются и в квантовой теории поля. В качестве примеров использования квазиклассических методов можно привести метод фонового поля [3], квантование солитонов [4–6], исследование квантовых эффектов во внешних полях [7], гауссовское приближение [8].

Стандартный способ построения квазиклассической теории поля (квантовой теории поля при наличии сильного внешнего поля) заключается в следующем. Поле φ раскладывается на две части — *классическую*, c-числовую, и *квантовую*, которая считается малой по сравнению с классической. При этом действие раскладывается в ряд по малой флуктуации, которая и квантуется. В главном порядке квазиклассической теории возмущений ограничиваются действием, квадратичным по квантовым флуктуациям.

Чтобы квазиклассические методы были применимы, лагранжиан $\mathcal{L}$ теории должен зависеть от малого параметра h (постоянная Планка) следующим образом (для простоты рассмотрим скалярный случай) [5]:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{1}{h}V(\sqrt{h}\,\varphi), \tag{1}$$

где $V(\Phi)$ — потенциал самодействия поля. При этом классическая c-числовая компонента поля оказывается порядка $1/\sqrt{h}$.

С точки зрения квазиклассических методов Маслова (теории комплексного ростка Маслова в точке [2]), данный квазиклассический метод можно сформулировать следующим образом. Рассматривается зависящий от времени t вектор состояния вида [9]

$$\Psi(t) \simeq \exp\left\{\frac{i}{h}S(t)\right\} \times \\ \times \exp\left\{\frac{i}{\sqrt{h}}\int d\boldsymbol{x}\left[\Pi(\boldsymbol{x},t)\hat\varphi(\boldsymbol{x}) - \Phi(\boldsymbol{x},t)\hat\pi(\boldsymbol{x})\right]\right\}f(t). \tag{2}$$

Здесь $S(t)$ — вещественная (числовая) функция времени, $\Phi(\boldsymbol{x},t)$ и $\Pi(\boldsymbol{x},t)$ — классическое поле и канонически сопряженный импульс, $\hat\varphi(\boldsymbol{x})$ и $\hat\pi(\boldsymbol{x})$ — квантовые операторы поля и импульса, удовлетворяющие каноническим коммутационным соотношениям, $f(t)$ — вектор состояния, имеющий предел при $h\to 0$. Подстановка вектора (2) в уравнение Шредингера для теории (1) дает классические уравнения движения для $\Pi(\boldsymbol{x},t)$, $\Phi(\boldsymbol{x},t)$, формулу для классического действия для $S(t)$, и в главном порядке по h — уравнение с квадратичным гамильтонианом для зависящего от времени вектора $f(t)$, что согласуется с методом выделения c-числовой составляющей поля.

Помимо состояний (2), можно рассматривать и их суперпозиции [9], «не улавливающиеся» стандартным методом выделения c-числовой составляющей:

$$\Psi \simeq \mathrm{const}\int d\alpha\exp\left\{\frac{i}{h}S(\alpha)\right\} \times \\ \times \exp\left\{\frac{i}{\sqrt{h}}\int d\boldsymbol{x}\left[\Pi(\boldsymbol{x},\alpha)\hat\varphi(\boldsymbol{x}) - \Phi(\boldsymbol{x},\alpha)\hat\pi(\boldsymbol{x})\right]\right\}f(\alpha). \tag{3}$$

Здесь $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$ — k-мерный параметр ($k=1,2,\ldots$). Состояния типа (3) являются квазиклассическими стационарными состояниями в задачах с интегралами движения. В частности, их использование позволяет преодолеть трудности, связанные с наличием у солитонов «нулевых мод» [6].

2. Запись квазиклассического состояния в виде (2) не является явно ковариантной: присутствует разделение на пространственные и временные координаты. Оказывается, что ковариантная запись состояния (2) имеет вид

$$\Psi \simeq \exp\Big\{\frac{i}{h}\overline{S}\Big\}\,\mathrm{Texp}\Big\{\frac{i}{\sqrt{h}}\int dx\,J(x)\hat\varphi(x)\Big\}\overline{f} \equiv \exp\Big\{\frac{i}{h}\overline{S}\Big\}T_J^h\overline{f}. \tag{4}$$

В формуле (4) $\overline{S}$ — вещественное число, $J(x)$ — вещественная функция, имеющая смысл классического источника Швингера [10], $\hat\varphi(x)$ — гейзенберговский оператор поля, Texp — хронологическая экспонента, $\overline{f}$ — вектор состояния, имеющий предел при $h\to 0$. Предполагается, что источник $J(x)$ имеет компактный носитель.

Можно показать, что при $h\to 0$ состояние (4) действительно приближенно совпадает с (2), и установить соответствие между (S,Π,Φ,f) и $(\overline{S},J,\overline{f})$ [11].

Аналог состояния (3) имеет вид

$$\Psi \simeq \mathrm{const}\int d\alpha\,\exp\Big\{\frac{i}{h}\overline{S}(\alpha)\Big\}T^h_{J(\alpha)}\overline{f}(\alpha). \tag{5}$$

Выражение (4) содержит избыточное по сравнению с (2) количество классических параметров (функцию пространственной и временной переменной $J(x)$ вместо двух функций пространственных переменных $\Phi(\boldsymbol{x})$ и $\Pi(\boldsymbol{x})$). Это приводит к тому, что одно и то же квазиклассическое состояние можно представить в виде (4) различными способами. В частности, можно выделить подкласс классических источников J, порождающих такие же квазиклассические состояния, что и источник $J=0$ (будем в этом случае писать $J\sim 0$). Для таких источников справедливо соотношение

$$T_J^h\overline{f} \simeq \exp\Big\{\frac{i}{h}\overline{I}_J\Big\}\underline{W}_J\overline{f}, \quad J\sim 0, \tag{6}$$

для некоторой числовой функции $\overline{I}_J$ и для некоторого оператора $\underline{W}_J$, раскладывающегося в ряд теории возмущений по $\sqrt{h}$.

3. Для каких объектов квазиклассической теории поля следует получить разложение по $\sqrt{h}$?

Прежде всего это известная в аксиоматической квантовой теории поля R-функция Лемана–Симанзика–Циммермана (LSZ) [12, 13]

$$\underline{\Phi}_R(x|J) \equiv -ih(T_J^h)^+\frac{\delta T_J^h}{\delta J(x)}. \tag{7}$$

Именно через нее выражаются операторы вида $(T_J^h)^+T^h_{J+\sqrt{h}\delta J}$, возникающие [9] при расчете скалярных произведений состояний (5) при $h\to 0$. Кроме того, в двух частных случаях функция (7) связана с полем $\hat\varphi(x)$:

при $x>\mathrm{supp}J$ (точка x лежит в будущем от носителя функции $J(x)$)

$$\underline{\Phi}_R(x|J) = (T_J^h)^+\hat\varphi(x)\sqrt{h}\,T_J^h, \quad x>\mathrm{supp}J; \tag{8}$$

при $x<\mathrm{supp}J$

$$\underline{\Phi}_R(x|J) = \hat\varphi(x)\sqrt{h}, \quad x<\mathrm{supp}J. \tag{9}$$

Также важную роль играет разложение оператора $\underline{W}_J$, показывающего, какие квазиклассические состояния совпадают друг с другом.

1. Аксиомы квазиклассической теории поля и их следствия

1. Сформулируем теперь аксиомы квазиклассической теории поля, выражающие принцип соответствия квантовой и классической теорий поля. Их следует рассматривать в дополнение к стандартным аксиомам квантовой теории поля [13], в частности к аксиоме релятивистской ковариантности: всякому преобразованию Пуанкаре $g\equiv(a,\Lambda)$ вида $x'^\mu=\Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu$ сопоставлен унитарный оператор $\underline{U}_g$, удовлетворяющий групповому свойству и соотношению

$$\underline{U}_{g^{-1}}\hat\varphi(x)\underline{U}_g = \hat\varphi(w_g x), \quad w_g x = \Lambda^{-1}(x-a). \tag{10}$$

A1. *Квазиклассические состояния зависят от малого параметра h согласно* (4), *причем $J(x)$ — числовая функция с компактным носителем, $\overline{S}$ — вещественное число, элемент пространства состояний $\overline{f}$ раскладывается в асимптотический ряд по $\sqrt{h}$.*

A2. *Оператор преобразования Пуанкаре $\underline{U}_g$ раскладывается в асимптотический ряд по $\sqrt{h}$.*

A3. *Операторная обобщенная функция* (7) *раскладывается в асимптотический ряд по $\sqrt{h}$:*

$$\underline{\Phi}_R(x|J) = \Phi_R(x|J) + \sqrt{h}\,\Phi_R^{(1)}(x|J) + \ldots\ . \tag{11}$$

Главный порядок этого разложения $\Phi_R(x|J)$ является числовой функцией.

A4. *Среди всех функций $J(x)$ с компактным носителем выделен подкласс функций, эквивалентных нулю ($J\sim 0$). При $J\sim 0$ для некоторого числа $\overline{I}_J$ и оператора $\underline{W}_J$, раскладывающегося в асимптотический ряд по $\sqrt{h}$, выполняется свойство* (6).

A5. *Для любой функции $\Phi_c(x)$ с компактным носителем можно подобрать такой эквивалентный нулю источник $J=J_{\Phi_c}$, что $\Phi_c(x)=\Phi_R(x|J_{\Phi_c})$; при этом он удовлетворяет условию локальности $\frac{\delta J(x|\Phi_c)}{\delta\Phi_c(y)}=0$ при $x\neq y$.*

Свойство A5 устанавливает соответствие между классическим полем и источником: всякое поле порождается классическим источником.

2. Важным следствием свойств (7) и (6), позволяющим получить количественные соотношения, является вариационное свойство

$$\delta\overline{I}_J - ih\underline{W}_J^+\delta\underline{W}_J = \int dx\,\underline{\Phi}_R(x|J)\delta J(x), \tag{12}$$

справедливое при $J\sim 0$ и $J+\delta J\sim 0$.

Из него в нулевом порядке вытекает *принцип стационарного действия*. Вводя функционал

$$I[\Phi_c] = \overline{I}_{J_{\Phi_c}} - \int dx J_{\Phi_c}(x)\Phi_c(x), \tag{13}$$

варьируя его и используя соотношение (12) в главном порядке по h, получим соотношение

$$\frac{\delta I[\Phi_c]}{\delta\Phi_c(x)} = -J_{\Phi_c}(x). \tag{14}$$

Поэтому функционал I может быть проинтерпретирован как классическое действие теории. Из указанного в аксиоме А5 свойства локальности вытекает, что

$$\frac{\delta^2 I}{\delta\Phi_c(x)\delta\Phi_c(y)} = 0, \quad x \neq y. \tag{15}$$

Следовательно, функционал I представляется в виде интеграла от локального лагранжиана.

3. Для вывода коммутационных соотношений будет использоваться известное из аксиоматической квантовой теории поля свойство R-функций [12, 13]

$$[\underline{\Phi}_R(x|J); \underline{\Phi}_R(y|J)] = -ih\left(\frac{\delta\underline{\Phi}_R(x|J)}{\delta J(y)} - \frac{\delta\underline{\Phi}_R(y|J)}{\delta J(x)}\right). \tag{16}$$

4. Запишем теперь свойства оператора $\underline{W}_J$ через поле Φ_c, переобозначив $\underline{W}[\Phi_c] \equiv \underline{W}_{J_{\Phi_c}}$. Эти свойства аналогичны свойствам расширенной S-матрицы Боголюбова–Медведева–Поливанова [13, 14].

Релятивистская ковариантность и унитарность:

$$\underline{U}_g\underline{W}[\Phi_c]\underline{U}_{g^{-1}} = \underline{W}[u_g\Phi_c], \quad \underline{W}^+[\Phi_c] = (\underline{W}[\Phi_c])^{-1}. \tag{17}$$

Микропричинность Боголюбова (означает, что при $J + \Delta J_2 \sim 0$, $J + \Delta J_1 + \Delta J_2 \sim 0$ и $\mathrm{supp}\,\Delta J_2 > \mathrm{supp}\,\Delta J_1$ оператор $(\underline{W}_{J+\Delta J_2})^+\underline{W}_{J+\Delta J_1+\Delta J_2}$ не зависят от ΔJ_2):

$$\frac{\delta}{\delta\Phi_c(y)}\left(\underline{W}^+[\Phi_c]\frac{\delta\underline{W}[\Phi_c]}{\delta\Phi_c(x)}\right) = 0, \quad y \gtrsim x. \tag{18}$$

Соотношение Янга–Фельдмана (вытекает из вариационного свойства (12)):

$$\int dy\,\frac{\delta^2 I}{\delta\Phi_c(x)\delta\Phi_c(y)}[\underline{\Phi}_R(y|J) - \Phi_c(y|J)] = = ih\underline{W}^+[\Phi_c]\frac{\delta\underline{W}[\Phi_c]}{\delta\Phi_c(x)}. \tag{19}$$

Граничное условие (вытекает из (8)):

$$\underline{W}^+[\Phi_c]\hat{\varphi}(x)\sqrt{h}\,\underline{W}[\Phi_c] = \underline{\Phi}_R(x|J_{\Phi_c}), \quad x \gtrsim \mathrm{supp}\,\Phi_c, \tag{20}$$

где $\hat{\varphi}(x) = \underline{\Phi}_R(x|0)$ — оператор поля при отсутствии источника.

2. Главный порядок квазиклассического разложения

Будем обозначать через U_g и $W_0[\Phi_c]$ операторы $\underline{U}_g$ и $\underline{W}[\Phi_c]$ в главном порядке теории возмущений.

1. Задачу о построении квазиклассической теории в главном порядке теории возмущений можно сформулировать следующим образом: требуется по известному классическому действию построить операторы $\Phi_R^{(1)}(x|J)$, U_g и $W_0[\Phi_c]$, удовлетворяющие свойствам (16)–(20) в главном порядке разложения.

Рассмотрим эту задачу на примере теории скалярного поля с действием

$$I[\Phi_c] = \int dx\left[\frac{1}{2}\partial_\mu\Phi_c\partial_\mu\Phi_c - V(\Phi_c)\right]$$

и классическим уравнением (14) вида

$$\partial_\mu\partial^\mu\Phi_R(x|J) + V'(\Phi_R(x|J)) = J(x), \quad \Phi_R|_{x\lesssim\mathrm{supp}\,J} = 0. \tag{21}$$

Введем обозначения

$$m^2 = V''(0), \quad v(x) \equiv V''(\Phi_c) - m^2, \quad \hat{\varphi}_v(x) \equiv \Phi_R^{(1)}(x|J_{\Phi_c}), \quad W_0\{v\} \equiv W_0[\Phi_c].$$

В частности, случай $V(\Phi_c) = \frac{m^2\Phi_c^2}{2}$ соответствует свободному полю $\hat{\varphi}_0(x)$.

2. Запишем соотношения, которым должно удовлетворять поле $\hat{\varphi}_v(x)$.

Соотношение Янга–Фельдмана (19) в совокупности с граничным условием (9) позволяют однозначно выразить оператор $\hat{\varphi}_v(x)$ через оператор свободного поля $\hat{\varphi}_0(x)$:

$$\big(\partial_\mu\partial^\mu + m^2 + v(x)\big)\hat{\varphi}_v(x) = 0, \quad \hat{\varphi}_v(x)|_{x\lesssim\mathrm{supp}\,v} = \hat{\varphi}_0(x). \tag{22}$$

Коммутационное соотношение (16) представляется в главном порядке следующим образом:

$$\begin{gathered}[\hat{\varphi}_v(x), \hat{\varphi}_v(y)] = \frac{1}{i}D_v(x,y), \\ D_v(x,y) = D_v^{\mathrm{ret}}(x,y) - D_v^{\mathrm{adv}}(x,y),\end{gathered} \tag{23}$$

где $D_v^{\mathrm{ret}}(x,y)$ и $D_v^{\mathrm{adv}}(x,y) \equiv D_v^{\mathrm{ret}}(y,x)$ — запаздывающая и опережающая функции Грина для уравнения (22). Они удовлетворяют соотношению

$$\big(\partial_\mu^x\partial_x^\mu + m^2 + v(x)\big)D_v^{\mathrm{ret,adv}}(x,y) = \delta(x-y),$$

при этом функция $D_v^{\mathrm{ret}}(x,y)$ обращается в нуль при $x \lesssim y$, функция $D_v^{\mathrm{adv}}(x,y)$ — при $x \gtrsim y$.

В частности, коммутационные соотношения для свободного поля

$$\begin{gathered}\big(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\big)\hat{\varphi}_0(x) = 0, \quad \hat{\varphi}_0^+(x) = \hat{\varphi}_0(x), \\ [\hat{\varphi}_0(x), \hat{\varphi}_0(y)] = -i(D_0^{\mathrm{ret}}(x,y) - D_0^{\mathrm{ret}}(y,x))\end{gathered} \tag{24}$$

получены без использования как каких-либо постулатов канонического квантования, так и свойств квантового тензора энергии-импульса [15].

Отметим, что коммутационное соотношение (23) может рассматриваться как следствие уравнения и граничного условия (22) и соотношения (24).

3. Оператор $W_0\{v\}$ должен удовлетворять свойствам релятивистской ковариантности, унитарности и причинности

$$\begin{gathered}U_gW_0\{v\}U_{g^{-1}} = W_0\{u_g\Phi_c\}, \quad W_0^+\{v\} = (W_0\{v\})^{-1}, \\ \frac{\delta}{\delta v(y)}\left(W_0^+\{v\}\frac{\delta W_0\{v\}}{\delta v(x)}\right) = 0, \quad y \gtrsim x,\end{gathered} \tag{25}$$

а также вытекающему из граничного условия (20) коммутационному соотношению

$$\hat{\varphi}_0(x)W_0\{v\} = W_0\{v\}\hat{\varphi}_v(x), \quad x \gtrsim \mathrm{supp}\,v. \tag{26}$$

Отметим, что оператор $W_0\{v\}$ определен из соотношения (26) однозначно, если зафиксировать вакуумное среднее оператора $W_0\{v\}$:

$$\langle 0|W_0\{v\}|0\rangle = e^{iA_1\{v\}}. \tag{27}$$

Величина $A_1\{v\}$ имеет смысл однопетлевой поправки к эффективному действию теории [16, 17]. Предполагается, что для свободной теории $W_0\{0\} = 1$ и $A_1\{0\} = 0$.

4. Свойство релятивистской инвариантности оператора W_0 равносильно релятивистской инвариантности однопетлевого эффективного действия

$$A_1\{u_gv\} = A_1\{v\}. \tag{28}$$

Действительно, если выполняется соотношение (28), то операторы $U_{g^{-1}}W_0\{u_g v\}U_g$ и $W_0\{v\}$ удовлетворяют одному и тому же коммутационному соотношению (26) и имеют одинаковое вакуумное среднее. Поэтому эти операторы совпадают.

Каким условиям должен удовлетворять функционал $A_1\{v\}$, чтобы выполнялись свойства унитарности и причинности? Этот вопрос исследован в Приложении. Вводится *пропагатор* — функция Грина $D^c(x,y)$ уравнения (22), удовлетворяющая следующему граничному условию: функция D^c_v содержит отрицательно-частотные компоненты по x при $x \gtrsim \operatorname{supp} v$ и $x \gtrsim y$ и положительно-частотные компоненты по x при $x \lesssim \operatorname{supp} v$ и $x \lesssim y$. Оказывается, что соотношение

$$\frac{\delta}{\delta v(y)} \operatorname{Im} A_1\{v\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} D^c_v(y,y). \qquad (29)$$

обеспечивает унитарность оператора $W_0\{v\}$, а равенство

$$\frac{\delta^2 A_1\{v\}}{\delta v(x)\delta v(y)} = \frac{i}{2i}(D^c_v(x,y))^2, \quad x \neq y, \qquad (30)$$

— свойство микропричинности Боголюбова.

Равенства (29) и (30) показывают, что функционал A_1 определяется классическим действием с точностью до вещественного локального функционала. Отметим, что формально можно записать [3]

$$A_1\{v\} = \frac{i}{2} \ln \det(1 + D^c_0 v) \qquad (31)$$

($D^c_0 v$ — интегральный оператор с ядром $D^c_0(x,y)v(y)$, 1 — единичный оператор); тогда

$$\frac{\delta A_1\{v\}}{\delta v(y)} = \frac{i}{2} D^c_v(y,y), \qquad (32)$$

и оба свойства выполнены. Однако выражение (31) является формальным из-за расходимостей — условия релятивистской инвариантности, унитарности и причинности раскрывают *определение* детерминанта оператора.

Отметим, что формулу (32) можно рассматривать как доопределение перенормированного пропагатора при совпадающих аргументах:

$$(D^c_v(y,y))_R \equiv \frac{2}{i}\,\frac{\delta A_1\{v\}}{\delta v(y)}. \qquad (33)$$

Соотношение (30) используется для доопределения квадрата обобщенной функции $D^c_v(x,y)$ при $x=y$:

$$(D^c_v(x,y))^2_R = 2i \frac{\delta^2 A_1\{v\}}{\delta v(x)\delta v(y)}.$$

3. Построение квазиклассической теории возмущений

Исследуем аксиомы квазиклассической теории поля в рамках теории возмущений. Чтобы не возникала неопределенность в операторах $\underline{U}_g$, $\hat{\varphi}_h(x)$, $\underline{\Phi}_R(x|J)$, $\underline{W}[\Phi_c]$, удобно зафиксировать представление коммутационных соотношений.

В квантовой теории поля используется асимптотическое in-представление [13, 14]: предполагается, что при $t \to -\infty$ частицы являются свободными, и пространство состояний совпадает с пространством Фока свободных частиц. В этом случае гейзенберговское поле $\hat{\varphi}(x)$ в слабом смысле при $t \to \pm\infty$ переходит в асимптотическое свободное поле массы m:

$$\hat{\varphi}(x) \underset{x^0 \to -\infty}{\sim} \hat{\varphi}_{\text{in}}(x) \equiv \hat{\varphi}_0(x), \quad \hat{\varphi}(x) \underset{x^0 \to +\infty}{\sim} \hat{\varphi}_{\text{out}}(x).$$

Поскольку при $x^0 \to -\infty$ выполняется соотношение $\underline{U}_{g^{-1}}\hat{\varphi}_0(x)\underline{U}_g = \hat{\varphi}_0(w_g x)$, оператор $\underline{U}_g$ совпадает с оператором преобразования Пуанкаре свободной теории U_g.

S-матрица теории (будем обозначать ее как $\Sigma[0]$) является унитарным преобразованием, связывающим асимптотические поля:

$$\hat{\varphi}_{\text{out}}(x) = \Sigma^+[0]\hat{\varphi}_{\text{in}}(x)\Sigma[0] = \Sigma^+[0]\hat{\varphi}_0(x)\Sigma[0]. \qquad (34)$$

Оператор

$$\Sigma[\Phi_c] = \Sigma[0]\underline{W}[\Phi_c]$$

имеет смысл матрицы рассеяния при наличии внешнего поля, удовлетворяющей свойствам релятивистской ковариантности, унитарности и причинности [13, 14]:

$$U_g \Sigma[\Phi_c] U_{g^{-1}} = \Sigma[u_g \Phi_c], \quad (\Sigma[\Phi_c])^+ = (\Sigma[\Phi_c])^{-1},$$
$$\frac{\delta}{\delta \Phi_c(x)} j(y|\Phi_c) = 0, \quad x \gtrsim y, \qquad (35)$$

где $j(y|\Phi_c)$ — оператор тока

$$j(y|\Phi_c) = \frac{1}{i}\Sigma^+[\Phi_c]\frac{\delta\Sigma[\Phi_c]}{\delta\Phi_c(y)}, \qquad (36)$$

который входит в правую часть соотношения Янга–Фельдмана (19)

$$\big(\partial_\mu\partial^\mu + V''(\Phi_c(x))\big)\big(\underline{\Phi}_R(x|J_{\Phi_c}) - \Phi_c(x)\big) = hj(x|\Phi_c). \quad (37)$$

При $x^0 \to \pm\infty$ квазиклассическое поле $\underline{\Phi}_R(x|J_{\Phi_c})$ будет удовлетворять асимптотическим граничным условиям

$$\underline{\Phi}_R(x|J_{\Phi_c}) \underset{x^0 \to -\infty}{\sim} \sqrt{h}\,\hat{\varphi}_0(x),$$
$$\underline{\Phi}_R(x|J_{\Phi_c}) \underset{x^0 \to +\infty}{\sim} \underline{W}^+[\Phi_c]\sqrt{h}\,\hat{\varphi}_{\text{out}}(x)\underline{W}[\Phi_c] = \qquad (38)$$
$$= \Sigma^+[\Phi_c]\sqrt{h}\,\hat{\varphi}_0(x)\Sigma[\Phi_c].$$

Решение уравнения (37), удовлетворяющее первому из граничных условий (38), можно выразить через поле $\hat{\varphi}_v(x)$ и запаздывающую функцию Грина:

$$\underline{\Phi}_R(x|J_{\Phi_c}) - \Phi_c(x) = \sqrt{h}\,\hat{\varphi}_v(x) + h\int dy D^{\text{ret}}_v(x,y) j(y|\Phi_c). \qquad (39)$$

Если же воспользоваться вторым граничным условием, то квазиклассическое поле выразится через опережающую функцию Грина:

$$\underline{\Phi}_R(x|J_{\Phi_c}) - \Phi_c(x) =$$
$$= \Sigma^+[\Phi_c]W_0[\Phi_c]\sqrt{h}\,\hat{\varphi}_v(x)W_0^+[\Phi_c]\Sigma[\Phi_c] +$$
$$+ h\int dy\, D^{\text{adv}}_v(x,y) j(y|\Phi_c). \qquad (40)$$

Вычитая из соотношения (39) соотношение (40), получаем важное тождество на матрицу рассеяния во внешнем поле:

$$\big[\hat{\varphi}_v(x), W_0^+[\Phi_c]\Sigma[\Phi_c]\big] =$$

$$= \sqrt{h} \int dy\, D_v(x,y) W_0^+[\Phi_c]\Sigma[\Phi_c] j(y|\Phi_c). \quad (41)$$

Формулу (41) можно положить в основу квазиклассической теории возмущений для $\Sigma[\Phi_c]$:

$$\Sigma[\Phi_c] = W_0[\Phi_c]\left(1 + \sqrt{h}\,\tilde{\Sigma}_1[\Phi_c] + \ldots\right).$$

Действительно, пусть $(k-1)$-й порядок теории возмущений построен. Тогда $\tilde{\Sigma}_k[\Phi_c]$ определяется из коммутационного соотношения (41) с точностью до константы. Чтобы зафиксировать его, введем обозначение для вакуумного среднего оператора рассеяния во внешнем поле:

$$\langle 0|\underline{W}[\Phi_c]|0\rangle = \langle 0|\Sigma[\Phi_c]|0\rangle = e^{i(A_1[\Phi_c] + hA_2[\Phi_c]+\ldots)}. \quad (42)$$

Назовем величину

$$\underline{A}[\Phi_c] = I[\Phi_c] + hA_1[\Phi_c] + h^2A_2[\Phi_c] + \ldots$$

квазиклассическим действием теории (оно отличается от эффективного включением не только сильно связных, но и слабо связных диаграмм Фейнмана [17]). Если $\underline{A}[\Phi_c]$ задано, то оператор $\Sigma[\Phi_c]$ из соотношения (41) в рамках теории возмущений определен однозначно. Как и в главном порядке квазиклассического разложения, условия релятивистской ковариантности, унитарности и причинности (35) накладывают существенные ограничения на вид квазиклассического действия: $A_k[\Phi_c]$ определяется с точностью до вещественного локального релятивистски-ковариантного функционала.

Заключение

В работе исследованы наиболее общие аксиомы квантовой теории поля и принцип соответствия между квантовой и классической теориями. Рассмотрены квазиклассические состояния, зависящие от малого параметра h согласно (4). Оно получается из регулярного при $h \to 0$ «околовакуумного» состояния $\overline{f}$ действием сингулярного по h унитарного оператора, выраженного через классический источник $J(x)$. Некоторые источники J переводят «околовакуумные» состояния в «околовакуумные», умножая его на сингулярный фазовый множитель, связанный с классическим действием теории.

Из общих принципов без использования канонического квантования получены коммутационные соотношения теории (16). Построена матрица рассеяния в главном порядке квазиклассического разложения, исследована ее связь с эффективным действием метода фонового поля. Рассмотрена аксиоматическая квазиклассическая теория возмущений для матрицы рассеяния.

Приложение. Проверка свойств унитарности и причинности

1. Для исследования свойвств унитарности и причинности удобно построить оператор тока

$$\hat{\rho}(x|v) = \frac{1}{i} W_0^+\{v\}\,\frac{\delta W_0\{v\}}{\delta v(x)}, \quad (43)$$

однозначно определяющийся из коммутационного соотношения (получается дифференцированием соотношения (26) по $v(y)$)

$$[\hat{\varphi}_v(x), \hat{\rho}(y|v)] = \frac{1}{i}\,\frac{\delta\hat{\varphi}_v(x)}{\delta v(y)}, \quad x \gtrsim \operatorname{supp} v. \quad (44)$$

и граничного условия (получается дифференцированием (27))

$$\frac{\langle 0|W_0\{v\}\hat{\rho}(y|v)|0\rangle}{\langle 0|W_0\{v\}|0\rangle} = \frac{\delta A_1\{v\}}{\delta v(y)}. \quad (45)$$

Свойство причинности приводится к виду

$$\frac{\delta\hat{\rho}(y|v)}{\delta v(x)} = 0. \quad x \gtrsim y, \quad (46)$$

а свойство унитарности равносильно эрмитовости тока:

$$\hat{\rho}(x|v) = \hat{\rho}^+(x|v). \quad (47)$$

2. Для явного построения оператора $\hat{\rho}(y|v)$ воспользуемся обобщением понятия нормального произведения полей.

Представим поле $\hat{\varphi}_v(x)$, являющееся решением уравнения (22), в виде суммы положительно- и отрицательно-частотных решений этого уравнения

$$\hat{\varphi}_v(x) = \hat{\varphi}_v^+(x) + \hat{\varphi}_v^-(x),$$

при этом операторная функция $\hat{\varphi}_v^+(x)$ содержит только положительно-частотные компоненты при $x \gtrsim \operatorname{supp} v$, а $\varphi_v^-(x)$ — только отрицательно-частотные компоненты при $x \lesssim \operatorname{supp} v$. Эти операторные функции удовлетворяют условиям

$$\hat{\varphi}_v^-(x)|0\rangle = 0, \quad \langle 0|W_0\{v\}\hat{\varphi}_v^+(x) = 0.$$

Нормальное произведение полей $:\hat{\varphi}_v(x_1)\cdots\hat{\varphi}_v(x_n):$ будем понимать следующим образом: представим поля в виде $\hat{\varphi}_v(x_i) = \hat{\varphi}_v^+(x_i) + \hat{\varphi}_v^-(x_i)$, раскроем скобки и упорядочим операторы, расставляя операторы $\hat{\varphi}_v^+(x_i)$ слева и операторы $\hat{\varphi}_v^-(x_i)$ справа.

При таком понимании положительно- и отрицательно-частотных компонент нормальное произведение полей имеет отличное от нуля вакуумное среднее. Однако, если рассматривать матричные элементы операторов между in- и out-вакуумами

$$\langle A\rangle \equiv \frac{\langle 0|W_0\{v\}A|0\rangle}{\langle 0|W_0\{v\}|0\rangle}, \quad (48)$$

окажется, что

$$\langle :\hat{\varphi}_v(x_1)\cdots\hat{\varphi}_v(x_n):\rangle = 0.$$

Для разложения обычных произведений полей по нормальным можно использовать теорему Вика, вводя обозначение для «спаривания» полей

$$\frac{1}{i}D_v^-(x,y) \equiv \langle\hat{\varphi}_v(x)\hat{\varphi}_v(y)\rangle = \left\langle\hat{\varphi}_v^-(x)\hat{\varphi}_v^+(y)\right\rangle. \quad (49)$$

3. Построим оператор тока, удовлетворяющий свойствам (44), (45). Варьируя соотношение (22), получим, что при $x > y$

$$\frac{\delta\varphi_v(x)}{\delta v(y)} = -D_v^{\mathrm{ret}}(x,y)\hat{\varphi}_v(y) = -D_v(x,y)\hat{\varphi}_v(y).$$

Тогда уравнение (44)

$$[\hat{\varphi}_v(x), \hat{\rho}(y|v)] = -\frac{1}{i}D_v(x,y)\hat{\varphi}_v(y)$$

с учетом условия (45) имеет решение

$$\hat{\rho}(y|v) = -\frac{1}{2}:\hat{\varphi}_v^2(y): + \frac{\delta A_1\{v\}}{\delta v(y)}. \quad (50)$$

4. Непосредственным расчетом проверяем, что

$$(:\hat{\varphi}_v(x)\hat{\varphi}_v(y):)^+ = :\hat{\varphi}_v(x)\hat{\varphi}_v(y): + \frac{1}{i}\Delta_v(x,y),$$
$$\Delta_v = D_v^c + D_v^{c*} - D_v^{\mathrm{ret}} - D_v^{\mathrm{adv}}. \tag{51}$$

С учетом свойства (51) получим

$$\hat{\rho}^+(y|v) - \hat{\rho}(y|v) = -\frac{1}{2i}\Delta_v(y,y) - 2i\frac{\delta}{\delta v(y)}\,\mathrm{Im}\,A_1\{v\}.$$

Следовательно, оператор $\hat{\rho}(y|v)$ эрмитов, только если выполнено свойство (29).

5. Исследуем свойство причинности Боголюбова (46). Явным вычислением проверяется, что при $x \gtrsim y$

$$\left[\hat{\varphi}_v(z), \frac{\delta\hat{\rho}(y|v)}{\delta v(x)}\right] = 0. \tag{52}$$

Поэтому достаточно проверить свойство

$$\left\langle \frac{\delta\hat{\rho}(y|v)}{\delta v(x)} \right\rangle = 0. \tag{53}$$

Прямым дифференцированием получаем формулу

$$\left\langle \frac{\delta A}{\delta v(x)} \right\rangle = \frac{\delta}{\delta v(x)}\langle A\rangle - i\left(\langle\hat{\rho}(x|v)A\rangle - \langle\hat{\rho}(x|v)\rangle\cdot\langle A\rangle\right).$$

При $A = \hat{\rho}(y|v)$ получим

$$\left\langle \frac{\delta\hat{\rho}(y|v)}{\delta v(x)} \right\rangle =$$
$$= \frac{\delta}{\delta v(x)}\langle\hat{\rho}(y|v)\rangle - i\left(\langle\hat{\rho}(x|v)\hat{\rho}(y|v)\rangle - \langle\hat{\rho}(x|v)\rangle\cdot\langle\hat{\rho}(y|v)\rangle\right).$$

Следовательно, свойство (53) выполнено при

$$\frac{\delta^2 A_1\{v\}}{\delta v(x)\delta v(y)} = \frac{i}{4}\left\langle :\hat{\varphi}_v^2(x)\,:\hat{\varphi}_v^2(y): \right\rangle = \frac{i}{2}\left(\frac{1}{i}D_v^-(x,y)\right)^2.$$

Поскольку $D_v^-(x,y) = D_v^c(x,y)$ при $x \gtrsim y$, а функция $D_v^c(x,y)$ симметрична, получаем, что свойство причинности Боголюбова выполнено при условии (30).

Список литературы

1. *Маслов В.П.* Теория возмущений и асимптотические методы. М., 1965.
2. *Маслов В.П.* Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М., 1977; *Маслов В.П.* Операторные методы. М., 1973.
3. *De Witt B.* // Phys. Rev. 1967. **162**. P. 1195; *Де Витт Б.* Динамическая теория групп и полей. М., 1987.
4. *Dashen R., Hasslasher B., Neveu A.* // Phys. Rev. D. 1974. **10**. P. 4114; *Goldstone J., Jackiw R.* // Phys. Rev. D. 1975. **11**. P. 1486.
5. *Jackiw R.* // Rev. Mod. Phys. 1977. **49**. P. 681.
6. *Раджараман Р.* Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля. М., 1985.
7. *Гриб А.А., Мамаев С.Г., Мостепаненко В.М.* Вакуумные квантовые эффекты в сильных внешних полях. М., 1988.
8. *Jackiw R., Kerman A.* // Phys. Lett. A. 1979. **71**. P. 158.; *Cooper F., Pi S.-Y., Stancioff P.* // Phys. Rev. D. 1986. **34**. P. 3831.
9. *Маслов В.П., Шведов О.Ю.* Метод комплексного ростка в задаче многих частиц и квантовой теории поля. М., 2000.
10. *Швингер Ю.* Частицы. Источники. Поля. М., 1973.
11. *Шведов О.Ю.* // ТМФ. 2005. **144**. С. 492.
12. *Lehmann H., Symanzik K., Zimmermann W.* // Nuovo Cim. 1957. **6**. P. 319; *Nishijima K.* // Phys. Rev. 1960. **119**. P. 485.
13. *Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Оксак А.И., Тодоров И.Т.* Общие принципы квантовой теории поля. М., 1987.
14. *Боголюбов Н.Н., Медведев Б.В., Поливанов М.К.* Вопросы теории дисперсионных соотношений. М., 1958.
15. *Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.* Введение в теорию квантованных полей. М., 1973.
16. *Jona-Lasinio G.* // Nuovo Cim. 1964. **34** P. 1790.
17. *Ициксон К., Зюбер Ж.Б.* Квантовая теория поля. Т. 1, 2. М., 1984.

An Axiomatic Approach to Semiclassical Field Theory

O. Yu. Shvedov

Department of Quantum Statistics and Field Theory, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.
E-mail: shvedov@phys.msu.ru.

Correspondence between semiclassical field theory and axiomatic approach quantum field theory, Schwinger source theory, Lehmann-Symanzik-Zimmermann (LSZ) formalism is investigated. A classical Schwinger source is related to the classical field, while LSZ R-function is an analog of a quantum field operator. Axioms of quantum field theory are written within the semiclassical expansion framework. It happens that stationary action principle and canonical commutation relations are corollaries rather than basic principles of the theory.

Keywords: Maslov complex germ, axiomatic quantum field theory, Bogoliubov S-matrix, Schwinger sourse theory, Lehmann–Symanzik–Zimmermann approach.
PACS: 03.65.Sq, 11.10.Cd.
Received 18 November 2010.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 3(2011).

Сведения об авторе

Шведов Олег Юрьевич — канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент; тел. (495) 939-12-90, e-mail: shvedov@phys.msu.ru.