Предельные токи релятивистского электронного пучка в дрейфовой камере с двухсвязным поперечным сечением

М. В. Кузелев[a], Е. А. Хапаева[b]

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра физической электроники. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
E-mail: [a] kuzelev@mail.ru, [b] e_khapaeva@mail.ru

Статья поступила: 23.12.2010, подписана в печать 15.02.2011

Получены формулы для предельного вакуумного тока и предельного пирсовского тока тонкого трубчатого релятивистского электронного пучка, распространяющегося в цилиндрической дрейфовой камере коаксиального (двухсвязного) поперечного сечения.

Ключевые слова: предельный вакуумный ток, предельный пирсовский ток, релятивистский электронный пучок, пространство дрейфа, коаксиальное поперечное сечение, неустойчивость.

УДК: 533.9. PACS: 52.35.-g.

В релятивистской сильноточной электронике одной из важных формул является формула для предельного вакуумного тока тонкого трубчатого релятивистского электронного пучка, распространяющегося в цилиндрической дрейфовой камере [1, 2]:

$$I_{b0} = I_0 \frac{(\gamma^{2/3} - 1)^{3/2}}{2 \ln R/r_b}. \qquad (1)$$

Здесь $I_0 = mc^3/e \approx 17.03$ кА — постоянная, имеющая размерность тока, r_b — средний радиус трубчатого пучка, R — радиус дрейфовой камеры, $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$ — релятивистский фактор электрона, u — скорость инжекции электронов пучка в камеру дрейфа. Формула (1) получена в предположении, что электронный пучок полностью замагничен внешним магнитным полем, направленным вдоль камеры дрейфа, и толщина трубчатого пучка Δ_b мала по сравнению с его средним радиусом, т. е. $\Delta_b \ll r_b < R$. Если ток электронного пучка I_b превышает предельный вакуумный ток I_{b0}, то стационарная инжекция пучка и его транспортировка в камере дрейфа невозможны: вблизи плоскости инжекции в камере формируется виртуальный катод, отражающий часть электронов, т. е. при $I_b > I_{b0}$ происходит срыв тока пучка, что подтверждается компьютерным моделированием и многочисленными экспериментами [3, 4].

Трубчатые сильноточные релятивистские электронные пучки находят широкое применение в различных приложениях, в частности в плазменной релятивистской СВЧ электронике [5], как источники мощного когерентного электромагнитного излучения. В настоящее время плазменные излучатели на трубчатых сильноточных электронных пучках уже успешно реализованы экспериментально и имеют рекордные характеристики по мощности излучения и по возможности перестройки их частоты [6, 7]. Имеются определенные теоретические соображения, по которым в электродинамических системах плазменных излучателей целесообразно использовать волноводные структуры с двухсвязным поперечным сечением — коаксиальные волноводы. Настоящая работа посвящена вычислению предельного вакуумного тока релятивистского трубчатого электронного пучка в коаксиальном пространстве дрейфа, а также некоторым дальнейшим обобщениям.

Рассмотрим стационарную инжекцию и транспортировку полностью замагниченного электронного пучка в цилиндрическом вакуумном пространстве дрейфа коаксиального поперечного сечения (R_2 — внешний радиус коаксиала, R_1 — его внутренний радиус, $R_2 > r_b > R_1$). Значение максимального тока бесконечно тонкого полностью замагниченного электронного пучка в таком пространстве дрейфа определяется как условие разрешимости следующей стационарной системы уравнений [2]:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -4\pi e n_b(z) \Delta_b \delta(r - r_b), \\ &\quad R_1 < r < R_2, \quad z > 0, \\ &n_b(z) v(z) = n_{0b} u = \text{const}, \quad z > 0, \\ &mc^2 \tilde{\gamma}(z) + e\varphi(r_b, z) = mc^2 \gamma = \text{const}, \quad z > 0. \end{aligned} \qquad (2)$$

Здесь r — цилиндрическая координата, z — координата вдоль камеры дрейфа, $\varphi(r, z)$ — скалярный потенциал собственного электростатического поля пучка, n_{0b} — концентрация электронов пучка в плоскости инжекции $z = 0$, $n_b(z)$ — концентрация электронов в произвольном сечении $z > 0$ дрейфовой камеры, u — скорость пучка в плоскости инжекции, $v(z)$ — скорость пучка при $z > 0$, $\tilde{\gamma}(z) = [1 - v(z)^2/c^2]^{-1/2}$. Первое уравнение в (2) является уравнением Пуассона, второе — стационарное уравнение непрерывности, третье — стационарное уравнение Эйлера. При написании первого уравнения системы (2) было учтено, что пучок является тонким трубчатым, а поэтому радиальное распределение его плотности определяется выражением $\Delta_b \delta(r - r_b)$, где $\delta(r)$ — дельта-функция.

Уравнение Пуассона в системе (2) дополняется следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} &\varphi(R_1, z) = \varphi(R_2, z) = 0, \\ &\varphi(r, 0) = 0, \quad \varphi(r, \infty) = f(r), \end{aligned} \qquad (3)$$

где $f(r)$ — некоторая ограниченная функция, зависящая только от поперечной координаты r. Первые два условия в (3) означают, что внутренняя и внешняя границы пространства дрейфа представляют собой проводящие цилиндры. Третье условие в (3) предполагает, что в плоскости инжекции $z=0$ расположена проводящая сетка (фольга) прозрачная для инжектируемых электронов. Последнее граничное условие в (3) означает, что на большом расстоянии от плоскости инжекции (при $z \gg R_2$), потенциал выходит на некоторое значение, независящее от координаты z. Действительно, продольное электрическое поле $E_z = -\partial\varphi/\partial z$ существенно только вблизи плоскости инжекции, где оно тормозит инжектируемые электроны, но при $z \to \infty$ продольное поле исчезает. Для вычисления предельного вакуумного тока, т. е. тока, прошедшего далеко в глубину камеры дрейфа, достаточно рассмотреть задачу (2) при $z \to \infty$, когда она существенно упрощается.

Краевую задачу (2) при $\partial\varphi/\partial z = 0$ можно решать или методом сшивки потенциала, или методом разложения по собственным функциям поперечного сечения камеры дрейфа. Рассмотрим сначала метод сшивки. В областях вне трубчатого пучка (т. е. при $r \neq r_b$) потенциал находится из следующего уравнения:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d\varphi_\infty}{dr} = 0, \tag{4}$$

где $\varphi_\infty(r) = \varphi(r, z{\to}\infty)$. Решая уравнение (4) с учетом первых двух граничных условий (3), имеем

$$\varphi_\infty(r) = \begin{cases} C_1 \ln r/R_1, & R_1 \leqslant r < r_b, \\ C_2 \ln r/R_2, & r_b < r \leqslant R_2, \end{cases} \tag{5}$$

где $C_{1,2}$ — постоянные.

Для определения постоянных $C_{1,2}$ воспользуемся следующими условиями сшивки в точке $r = r_b$ потенциалов в областях $r < r_b$ и $r > r_b$:

$$\begin{gathered} \varphi_\infty(r_b+0) - \varphi_\infty(r_b+0) = 0, \\ \frac{d\varphi_\infty}{dr}(r_b+0) - \frac{d\varphi_\infty}{dr}(r_b-0) = -4\pi e \Delta_b n_\infty, \end{gathered} \tag{6}$$

где $n_\infty = n_b(z \to \infty)$. Первое условие в (6) — непрерывность потенциала — следует из конечности радиальной составляющей напряженности электрического поля $E_r = -\partial\varphi/\partial r$. Второе условие (6) получается из первого уравнения системы (2) интегрированием по окрестности точки $r = r_b$. Подставляя выражения (5) в условия сшивки (6) и определяя постоянные $C_{1,2}$, вычисляем потенциал электрического поля в точке нахождения электронного пучка

$$\varphi_\infty(r_b) = 4\pi G e n_\infty \Delta_b r_b, \quad G = \frac{\ln r_b/R_1 \cdot \ln R_2/r_b}{\ln R_2/R_1}, \tag{7}$$

где G — геометрический фактор тонкого трубчатого электронного пучка в коаксиальном волноводе.

Выразим далее из второго уравнения системы (2) величину n_∞ и подставим ее вместе с (7) в третье уравнение. В результате получим

$$I_0\gamma_\infty + 2GI_b\frac{\gamma_\infty}{\sqrt{\gamma_\infty^2 - 1}} = I_0\gamma, \tag{8}$$

где $\gamma_\infty = \tilde{\gamma}(z \to \infty)$ — релятивистский фактор электрона на бесконечности, а $I_b = 2\pi r_b \Delta_b n_{0b} u$ — ток тонкого трубчатого пучка. Для получения соотношения (8) скорость $v(z \to \infty)$ была выражена через γ_∞. Как видно из (8), ток пучка зависит от релятивистского фактора электронов на бесконечности (или энергия $mc^2\gamma_\infty$ электронов, прошедших в камеру дрейфа, зависит от тока инжекции). Выражая из (8) ток пучка I_b и максимизируя его по γ_∞, получаем окончательно следующее выражение для предельного вакуумного тока тонкого трубчатого электронного пучка в коаксиальной дрейфовой камере:

$$I_{b0} = I_0\frac{(\gamma^{2/3}-1)^{3/2}}{2G} = I_0\frac{(\gamma^{2/3}-1)^{3/2}\ln R_2/R_1}{2\ln r_b/R_1 \cdot \ln R_2/r_b}. \tag{9}$$

Максимум (9) достигается при $\gamma_\infty = \gamma^{1/3}$. Следовательно, если ток пучка равен току (9), то энергия электронов в камере дрейфа далеко от плоскости инжекции есть $mc^2\gamma^{1/3}$. В плоскости инжекции энергия была $mc^2\gamma$.

Рассмотрим теперь кратко метод разложения по собственным функциям поперечного сечения камеры дрейфа. Этот метод полезен тем, что в принципе может быть обобщен на случай двухсвязного поперечного сечения дрейфовой камеры произвольной формы [2]. Известно, что собственные функции краевой задачи

$$\begin{gathered} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial\varphi}{\partial r} + k_n^2\varphi = 0, \quad R_1 < r < R_2, \\ \varphi(R_1) = \varphi(R_2) = 0 \end{gathered} \tag{10}$$

определяются формулой

$$\varphi_n(r) = J_0(k_n r) - \frac{J_0(k_n R_1)}{N_0(k_n R_1)}N_0(k_n r), \tag{11}$$

где $n = 1, 2, \ldots$, а $J_0(x)$ и $N_0(x)$ — функции Бесселя и Неймана нулевого порядка. Собственные значения задачи (10) k_n^2 определяются корнями следующего уравнения:

$$J_0(k_n R_1)N_0(k_n R_2) - J_0(k_n R_2)N_0(k_n R_1) = 0. \tag{12}$$

Разложим потенциал $\varphi_\infty(r)$ в ряд по собственным функциям (11). Коэффициенты разложения с учетом ортогональности собственных функций определяются из первого уравнения системы (2) (при $\partial\varphi/\partial z = 0$). В результате получается выражение (7), в котором геометрический фактор пучка G представлен в виде следующего ряда:

$$G = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n^2(r_b)}{k_n^2\|\varphi_n\|^2}, \quad \|\varphi_n\|^2 = \int_{R_1}^{R_2}\varphi_n^2(r)r\,dr. \tag{13}$$

Суммирование ряда в (13) представляет собой отдельную задачу. Однако из общих соображений (теорема о существовании и единственности решения краевой задачи для уравнения Пуассона (2)) ясно, что сумма ряда (13) должна совпадать с величиной, приведенной в формуле (7).

Определим ток Пирса тонкого трубчатого цилиндрического пучка в коаксиальном пространстве дрейфа. Напомним, что при токе, превышающем ток Пирса, ток пучка срывается из-за развития электростатической пирсовской неустойчивости даже при полной нейтрализации поля пространственного заряда пучка [2, 3]. Воспользуемся результатом, сформулированным в [8], где показано, что для развития электростатической неустойчивости Пирса необходимо, чтобы в некоторой области волновых чисел одна из волн плотности заряда пучка имела отрицательную групповую скорость (при $u>0$). Чтобы в нашем конкретном случае воспользоваться этим общим результатом, необходимо установить дисперсию волн плотности заряда тонкого трубчатого нейтрализованного электронного пучка в коаксиальном пространстве дрейфа. В принципе для этого можно было бы ограничиться потенциальным приближением. Однако поскольку волны плотности заряда релятивистского пучка представляют большой интерес для многих проблем электродинамики плазмы и плазменной СВЧ-электроники [5], мы получим здесь общее дисперсионное уравнение для собственных частот таких волн.

В непотенциальном случае при описании волн E-типа в волноводе вместо скалярного потенциала удобно использовать поляризационный потенциал Герца ψ, удовлетворяющий в цилиндрической геометрии следующему волновому уравнению:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d\psi}{dr}-\left(k_z^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{\omega_b^2\gamma^{-3}}{(\omega-k_zu)^2}\Delta_b\delta(r-r_b)\right)\psi=0, \tag{14}$$

где $\omega_b=\sqrt{4\pi e^2n_{0b}/m}$ — ленгмюровская частота электронов пучка, а k_z — продольное волновое число. При получении уравнения (14) предполагалось, что зависимость поляризационного потенциала от времени и продольной координаты описывается функцией $\exp(-i\omega t+ik_zz)$, и было использовано выражение для продольной диэлектрической проницаемости электронного пучка в сильном магнитном поле [5, 8]. Уравнение (14) дополняется обычными граничными условиями

$$\psi(R_1)=\psi(R_2)=0,\quad \psi(r_b+0)-\psi(r_b-0)=0,$$
$$\frac{d\psi}{dr}(r_b+0)-\frac{d\psi}{dr}(r_b-0)=$$
$$=-\left(k_z^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right)\frac{\omega_b^2\gamma^{-3}}{(\omega-k_zu)^2}\Delta_b\psi(r_b), \tag{15}$$

имеющими такой же смысл, что и граничные условия (3) и (6).

Общее решение уравнения (14) имеет вид

$$\psi(r)=\begin{cases}AI_0(\chi r)+BK_0(\chi r), & R_1<r<r_b,\\ CI_0(\chi r)+DK_0(\chi r), & r_b<r<R_2,\end{cases} \tag{16}$$

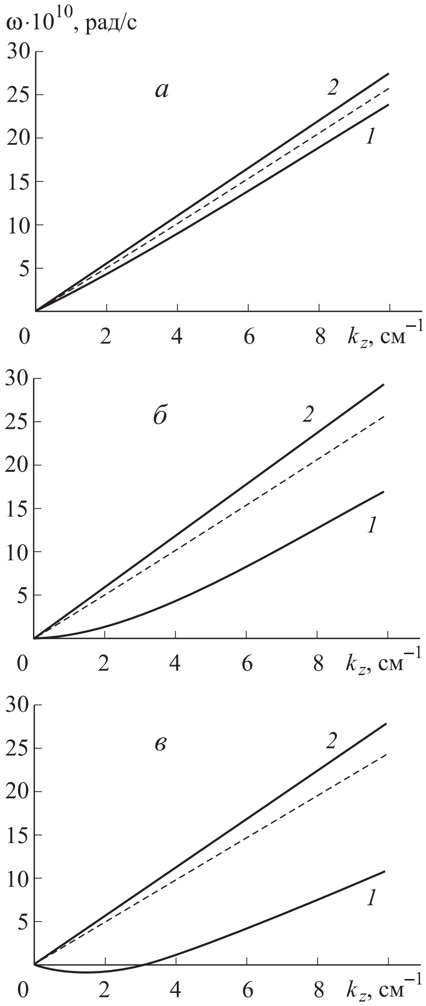
где $I_0(\chi r)$, $K_0(\chi r)$ — функции Бесселя мнимого аргумента нулевого порядка, A, B, C, D — постоянные, $\chi^2=k_z^2-\omega^2/c^2$. Подставляя решение (16) в граничные условия (15), получаем однородную систему алгебраических уравнений относительно постоянных A, B, C, D. Условием разрешимости этой системы является следующее дисперсионное уравнение для частот волн плотности заряда пучка в коаксиальном пространстве дрейфа:

$$(\omega-k_zu)^2=\omega_b^2\gamma^{-3}\frac{\chi^2}{k_{\perp b}^2}, \tag{17}$$

где

$$k_{\perp b}^2=\frac{\frac{K_0(\chi R_2)}{I_0(\chi R_2)}-\frac{K_0(\chi R_1)}{I_0(\chi R_1)}}{\Delta_b r_b I_0^2(\chi r_b)\left[\frac{K_0(\chi r_b)}{I_0(\chi r_b)}-\frac{K_0(\chi R_1)}{I_0(\chi R_1)}\right]\left[\frac{K_0(\chi R_2)}{I_0(\chi R_2)}-\frac{K_0(\chi r_b)}{I_0(\chi r_b)}\right]}. \tag{18}$$

Дисперсионные зависимости $\omega(k_z)$ волн плотности заряда пучка, удовлетворяющие дисперсионному уравнению (17) при $u=2.6\cdot10^{10}$ см/с, $R_1=0.5$ см, $R_2=2$ см, $r_b=1$ см для трех значений токов пучка, приведены на рисунке. При $I_b=8.2$ кА (*а*) групповые скорости пучковых волн положительны; в этом случае развитие пирсовской неустойчивости невозможно. При $I_b=295.2$ кА (*в*) групповая скорость одной из волн пучка меньше нуля; в этом случае при достаточно большой длине системы развитие пирсовской неустойчивости неизбежно. Случай $I_b=127.9$ кА (*б*) является граничным, а ток пучка при этом равен току Пирса.



Дисперсионные зависимости $\omega(k_z)$ волн плотности заряда пучка при токе пучка $I_b=8.2$ кА (*а*), 127.9 кА (*б*), и 295.2 кА (*в*). Кривые *1* и *2* изображают медленную и быструю волны

Для определения тока Пирса в уравнении (17) следует положить $\omega=0$, а затем перейти к пределу $k_z\to0$. В результате получится соотношение

$$\frac{\omega_b^2\gamma^{-3}}{u^2k_{\perp b}^2(0)}=1, \tag{19}$$

где $k_{\perp b}^2(0)$ есть величина (18), взятая при $\chi=0$. Из (19) находим выражение для тока Пирса (предельного тока электронного пучка скомпенсированного по электрическому заряду) трубчатого пучка в коаксиальном пространстве дрейфа:

$$I_P=I_0\frac{u^3}{c^3}\gamma^3\frac{\ln R_2/R_1}{2\ln r_b/R_1\cdot\ln R_2/r_b}. \tag{20}$$

Для оценки значений предельных токов (9) и (20) возьмем скорость пучка и радиусы дрейфовой камеры, уже использованные нами ранее при построении дисперсионных кривых на рисунке (эти параметры близки к используемым в экспериментах [6, 7]). Расчет по полученным формулам дает для предельного вакуумного тока $I_{b0} \approx 11.06$ кА, а для тока Пирса $I_P \approx 128.23$ кА. Эти значения примерно вдвое превосходят соответствующие токи такого же пучка в обычном круглом волноводе с радиусом $R = R_2$.

Список литературы

1. *Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А.* // УФН. 1971. **103**. С. 609.
2. *Кузелев М.В. Рухадзе А.А.* Электродинамика плотных электронных пучков в плазме. М., 1990.
3. *Рухадзе А.А., Богданкевич Л.С., Росинский С.Е.* и др. Физика сильноточных релятивистских электронных пучков. М., 1980.
4. *Диденко А.Н., Григорьев В.Н., Усов Ю.П.* Мощные электронные пучки и их применение. М., 1977.
5. *Кузелев М.В., Рухадзе А.А., Стрелков П.С.* Плазменная релятивистская СВЧ электроника. М., 2002.
6. *Стрелков П.С., Ульянов Д.К.* // Физика плазмы. 2000. **26**, № 4. С. 329.
7. *Богданкевич И.Л., Иванов И.Е., Лоза О.Т.* и др. // Физика плазмы. 2002. **28**, № 8. С. 748.
8. *Александров А.Ф., Кузелев М.В.* Радиофизика. Физика электронных пучков и основы высокочастотной электроники: Учебное пособие. М., 2007.

The limit currents of relativistic electron beam in a drift camera with coaxial transverse section

M. V. Kuzelev[a], **E. A. Khapaeva**[b]

Department of physical electronics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.
E-mail: [a] *kuzelev@mail.ru,* [b] *e_khapaeva@mail.ru.*

The formulas for limit vacuum current and limit Pears current of thin relativistic electron beam which propagates in a cylindrical drift camera with coaxial transverse section have been derived.

Keywords: limit vacuum current, limit Pears current, relativistic electron beam, drift space, coaxial transverse section, instability.
PACS: 52.35.–g.
Received 23 December 2010 2010.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 3(2011).

Сведения об авторах

1. Кузелев Михаил Викторович — докт. физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939-25-47, e-mail: kuzelev@mail.ru.
2. Хапаева Екатерина Андреевна — аспирант; e-mail: e_khapaeva@mail.ru.