КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Комптоновское рассеяние на мишени, находящейся в вырожденном состоянии

Н. Г. Иноземцева[1], П. Н. Сысоев[2,a], В. И. Иноземцев[3,b]

[1] *Международный университет «Дубна».*
Россия, 141980, Московская обл., г. Дубна, Университетская ул., д. 19.
[2] *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра квантовой статистики и теории поля. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.*
[3] *Объединенный институт ядерных исследований, лаборатория теоретической физики.*
Россия, 141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Жолио-Кюри, д. 19.
E-mail: [a] *sysoev@phys.msu.ru,* [b] *inozv@theor.jinr.ru*

Статья поступила 22.04.2010, подписана в печать 31.01.2011

Для амплитуды комптоновского рассеяния на системе двух частиц с нулевым полным моментом вычислен помимо борновского дополнительный полюсный член и вклады в него от промежуточных состояний с той же массой, но с разными спинами. Показано, что с учетом этого члена в вырожденном случае не имеет места разложение инвариантных амплитуд по обобщенным поляризуемостям системы.

Ключевые слова: низкие энергии, рассеяние, двухчастичные системы.
УДК: 539.12. PACS: 25.30.–c.

Введение

S-матричный элемент для комптоновского рассеяния на бесспиновой частице представим в виде [1]

$$\begin{aligned}
&\lt S-I \gt = i(2\pi)^2(16k_0k_0'p_0p_0')^{-1/2}\delta^4(k+p-k'-p')T,\\
&\quad T = \varepsilon_\mu^+(k')T_{\mu\nu}\varepsilon_\nu(k),\\
&\quad T_{\mu\nu} = (k\cdot k'g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu')A -\\
&\qquad - \left[k\cdot k'P_\mu P_\nu - \chi(P_\mu k_\nu' + P_\nu k_\mu + \chi^2 g_{\mu\nu}\right]B.
\end{aligned}$$

Это выражение учитывает лоренцеву и калибровочную инвариантность теории. Динамика взаимодействия и, следовательно, структура частицы описываются инвариантными амплитудами A и B, k и k', p и p' — начальный и конечный импульсы фотона (мишени), $P=(p+p')/2$, $\chi=(s-u)/4$, s, u, t — переменные Мандельштама, ε_μ — вектор поляризации фотона.

Далее везде будем использовать кулоновскую калибровку и лабораторную систему координат.

Рассеяние рассматривается в низшем порядке теории возмущений. Мы опускаем эффекты высших порядков, в частности инфракрасные расходимости, вклад которых в структурные параметры частиц изучался в работе [2].

Низкоэнергетические теоремы [3–6], полученные при явном или неявном предположении о невырожденности состояния мишени, утверждают, что с точностью до ω^2 $(\omega = k_0)$ амплитуда T представима в виде

$$T = \boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}'(\tilde{\alpha}\omega^2 - 2e^2) + (\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{k})(\boldsymbol{\varepsilon}'\times\boldsymbol{k}')\tilde{\beta}, \qquad (1)$$

где e — заряд мишени, структурные константы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ ассоциированы с электрической и магнитной поляризуемостями, а также что инвариантные амплитуды A и B разлагаются в ряд

$$B(\chi^2,t) = B^{\mathrm{Born}} + \sum_{k,n\geqslant 0} B^(k,n)\chi^{2k}t^n \qquad (2)$$

(и аналогично для A). В выражении (2) выделен борновский член, полученный в предположении о бесструктурности частицы (тогда все структурные константы равны нулю). Коэффициенты $B^{k,n}$, $A^{k,n}$ называются обобщенными поляризуемостями системы. Отметим, что $\chi = O(\omega)$, а $t = O(\omega^2)$.

Особенностью формы (1) является то обстоятельство, что она справедлива как для (квантовой и классической) нерелятивистской системы с потенциальным взаимодействием между составными частями, так и для скалярной частицы в квантово-полевом описании, где структурные константы возникают за счет виртуального облака [4, 6].

Целью настоящей работы является изучение изменений в форме (1), связанных с вырожденностью состояния мишени, а также правомерности разложения (2) в этом случае. Имея в виду упомянутую «устойчивость» формы (1) по отношению к теории, описывающей рассеяние, мы считаем, что не ограничим общности рассмотрения, изучая нерелятивистскую систему двух частиц с потенциальным взаимодействием. Кроме того, мы будем явно выписывать некоторые структурные константы, которые, как мы ожидаем, обращаются в нуль только в нерелятивистском случае и будут отличны от нуля уже при учете первой релятивистской поправки.

1. Изменение вида амплитуды T

В качестве простейшей модели мишени, имеющей внутреннюю структуру, рассмотрим систему двух скалярных частиц с массами $m/2$ и зарядами q_1, q_2

($e = q_1 + q_2$), взаимодействующих посредством центрального потенциала. Для наших целей достаточно массу системы считать равной m. Электромагнитный потенциал (вторично квантованное поле) введем в уравнение Шрёдингера минимальным образом. Тогда с точностью до e^2 амплитуда T комптоновского рассеяния равна

$$T(k,k') = -4(\varepsilon\varepsilon')\langle i|Y|i\rangle + \\ + \frac{2}{m}\varepsilon'_\alpha\varepsilon_\beta\sum_n\left(\frac{\langle i|M_1^\alpha|n\rangle\langle n|M_2^\beta|i\rangle}{E_n - E_i - \omega + (2m)^{-1}\omega^2} + \right. \\ \left. + \frac{\langle i|N_1^\beta|n\rangle\langle n|N_2^\alpha|i}{E_n - E_i + \omega' + (2m)^{-1}\omega'^2}\right), \quad (3)$$

$\alpha, \beta = 1,2,3$. Функции Y, M, N определены в приложении. В матричных элементах подразумевается интегрирование по относительной координате; $\sum_n$ — сумма (интеграл) по всем состояниям спектра, $|i\rangle$ — волновая функция начального и конечного состояния мишени по относительной координате. Далее считаем, что $|i\rangle$ описывает s-состояние.

Используя технику, аналогичную развитой в [6], удерживаем в (3) члены порядка до ω^2. Получаем

$$T = (\varepsilon\varepsilon')T_1 + (\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{k})(\boldsymbol{\varepsilon}'\times\boldsymbol{k}')T_2, \\ T_1 = \omega^2(a - c\cos\varphi) - 2e^2, \quad T_2 = b + f\cos\varphi, \quad (4)$$

где φ — угол рассеяния, a, b, c, f — структурные константы, определенные в приложении. Отметим, что константы c и f, обусловливающие принципиальное отличие (4) от (1), обязаны суммированию в (3) по состояниям $|n\rangle$ с энергией $E_n = E_i$. Причем константа c отлична от нуля и в нерелятивистском случае для потенциалов типа кулоновского, где энергетический уровень E_i не имеет определенной четности. А для потенциалов типа осцилляторного, где уровень E_i всегда имеет определенную четность, при нерелятивистском рассмотрении (4) не отличается от (1).

2. Дифференцируемость инвариантных амплитуд

Запишем амплитуду T в лабораторной системе в кулоновской калибровке через инвариантные амплитуды:

$$T = (\varepsilon\varepsilon')\left[At/2 + B\chi^2 - (\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}')(A + Bt/8)\right] + \\ + (\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{k})(\boldsymbol{\varepsilon}'\times\boldsymbol{k}')(A + Bt/8). \quad (5)$$

Сравнение с (4) дает

$$B(\chi^2, t) = -T_1\left[(t/4)^2 - \chi^2\right]^{-1} - T_2 m^{-2}$$

и аналогичное выражение для амплитуды A. Подставим значения из (4) и вычтем борновский член, равный $B^{\mathrm{Born}} = 2e^2\left[(t/4)^2 - \chi^2\right]^{-1}$:

$$B - B^{\mathrm{Born}} = \frac{c - f}{2}t\left[(t/4)^2 - \chi^2\right]^{-1} + m^{-2}(c - a - b - f).$$

Полученное выражение, очевидно, не дифференцируемо в нуле по χ^2 и t, что делает неприменимым разложение (2). Такая же ситуация возникает и в случае амплитуды $A(\chi^2, t)$.

Отметим, что вклад состояния рассеивателя с энергией $E_n = E_i$ и произвольным спином s в амплитуду T может быть параметризован релятивистски-инвариантным образом; соответствующие инвариантные амплитуды могут быть представлены в форме

$$A^{(s)} = \frac{F^2(m^2 + 2(\chi^2 - t/4))}{2(\chi - t/4)}\left[\chi^2(w_1^{(s)} - sw_2^{(s)}) + \right. \\ \left. + w_2^{(s)}(\chi - t/4)^2\frac{m^2 + \chi - 3t/8}{m^2 + 2(\chi - t/4)}\right] + (\chi \to -\chi),$$

$$B^{(s)} = \frac{F^2(m^2 + 2(\chi^2 - t/4))}{2(\chi - t/4)}\left[-\frac{t}{2}(w_1^{(s)} - sw_2(s)) + \right. \\ \left. + w_2^{(s)}\frac{(\chi - t/4)^2}{m^2 + 2(\chi - t/4)}\right] + (\chi \to -\chi),$$

где

$$w_1(s) = 2\sum_{l=0}^{[(s-1)/2]}\frac{(-1)^{s+l}(2s - 2l - 1)!!}{2^l(s - 2l - 1)!(l - 1)!}(\chi - t/4)^{4l} \times \\ \times\left[(\chi - t/4)(\chi + 3t/4) + m^2t/2\right]^{s-2l-2},$$

$$w_2(s) = \sum_{l=0}^{[(s-1)/2]}\frac{(-1)^{s+l}(2s - 2l - 1)!!}{2^l(s - 2l - 1)!l!}(\chi - t/4)^{4l} \times \\ \times\left[(\chi - t/4)(\chi + 3t/4) + m^2t/2\right]^{s-2l-2},$$

F — вершинный формфактор. В окрестности точки $\chi = 0$, $t = 0$ амплитуды обладают сингулярными особенностями вида

$$A^{(s)} \sim \frac{t^{s-1}}{\chi^2 - (t/4)^2}, \quad B^{(s)} \sim \frac{t^s}{\chi^2 - (t/4)^2}. \quad (6)$$

При $s = 1$ выражения (6) совпадают с сингулярностями в (5).

Таким образом, произведено вычисление полюсного члена и вкладов в него от состояний с той же массой, но с разными спинами в случае рассеяния на квантовом объекте, находящемся в вырожденном состоянии, помимо борновского члена. Для построения низкоэнергетических разложений и сравнения их с соответствующими разложениями в невырожденном случае необходимо вычислить структурные константы c, a, b, f в регулярной части разности $B{-}B^{\mathrm{Born}}$, которая получается, если кроме традиционного вычитания борновского члена из амплитуды вычесть еще найденный полюсный член, возникающий благодаря промежуточным состояниям с той же массой, но с другими спинами. Регулярная часть имеет вид $m^{-2}(c - a - b - f)$. Структурные константы c, a, b, f даны в приложении. Это особенно интересно при рассмотрении моделей, в которых мезоны и мезонные резонансы являются радиально возбужденными (и, возможно, вырожденными) состояниями кварк-антикварковой системы. Для этого необходимо рассмотреть случай конституэнтов со спином 1/2. Мы надеемся сделать это в следующей работе.

Приложение

Приведем явные выражения для функций, фигурирующих в (3). Обозначим

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{k}) = \exp\left(\frac{i\boldsymbol{kr}}{2}\right).$$

Тогда

$$Y(\boldsymbol{r}) = q_1^2\mathcal{E}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') + q_2^2\mathcal{E}(\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k}),$$
$$M_1^\alpha(\boldsymbol{r}) = A_{++}(k')k_\alpha + 2A_{-+}(\boldsymbol{k}')p_\alpha,$$
$$M_2^\beta(\boldsymbol{r}) = 2A_{--}(\boldsymbol{k})p_\beta,$$
$$N_1^\beta(\boldsymbol{r}) = -A_{+}(\boldsymbol{k})k'_\beta + 2A_{--}p_\beta,$$
$$N_2^\alpha(\boldsymbol{r}) = 2A_{-+}(\boldsymbol{k}')p_\alpha,$$

где $p_\alpha = -i\partial/\partial r_\alpha$ и

$$A_{\pm+}(\boldsymbol{k}) = q_1\mathcal{E}(-\boldsymbol{k}) \pm q_2\mathcal{E}(\boldsymbol{k}),$$
$$A_{\pm-}(\boldsymbol{k}) = q_1\mathcal{E}(\boldsymbol{k}) \pm q_2\mathcal{E}(-\boldsymbol{k}).$$

Приведем выражения для структурных констант a, b, c, f, использованных в (4) (напомним, что $|i\rangle$ описывает s-состояние):

$$f = -2e^2\sum^{**}|\langle i|(2m)^{-1}L_3|n\rangle|^2,$$
$$a = \alpha + \Delta\alpha + \eta^{**},\quad b = \beta + \Delta\beta + \kappa^{**} + 2\alpha^{**},\quad c = 2\kappa^{**} + \alpha^{**},$$

где

$$\alpha = 4m(q_1-q_2)^2\sum^{*}\frac{1}{E_n-E_i}|\langle i|r_3/2|n\rangle|^2,$$
$$\Delta\alpha = \frac{2}{3}e^2r_e^2,\quad r_e^2 = \langle i|(\frac{\boldsymbol{r}}{2})^2|i\rangle,$$
$$\beta = 4me^2\sum^{*}\frac{1}{E_n-E_i}|\langle i|(2m)^{-1}L_3|n\rangle|^2,$$
$$\Delta\beta = -\frac{1}{3}r_e^2[4(q_1-q_2)^2+e^2],$$
$$\eta^{**} = \frac{1}{3}(q_1-q_2)^2\sum^{**}\mathrm{Im}(\langle i|r_3^2\boldsymbol{p}|n\rangle\langle n|\boldsymbol{r}|i\rangle),$$
$$\kappa^{**} = e^2\sum^{**}\mathrm{Im}(\langle i|r_1r_2|n\rangle\langle n|r_1p_2|i\rangle),$$
$$\alpha^{**} = 2(q_1-q_2)^2\sum^{**}|\langle i|\frac{r_3}{2}|n\rangle|^2.$$

Здесь $\sum^*$ означает суммирование (интегрирование) по всем $|n\rangle$ с $E_n \neq E_i$, а $\sum^{**}$ — по всем $|n\rangle$ с $E_n = E_i$ (явный учет вырождения); $\boldsymbol{p} = -i\partial/\partial\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$. Заметим, что в нерелятивистском случае $f = \beta = \kappa^{**} = 0$, а α^{**} и η^{**} отличны от нуля для потенциалов типа кулоновского (см. введение).

Список литературы

1. *Bardeen W.A., Tung Wu-Ki* // Phys. Rev. 1968. **173**. P. 1423.
2. *Gerasimov S.B., Soloviev L.D.* // Nucl. Phys. 1965. **74**. P. 589.
3. *Low F.E.* // Phys. Rev. 1954. **96.** P. 1428.
4. *Gell-Mann M., Goldberger M.L.* // Phys. Rev. 1954. **96**. P. 1433.
5. *Guiasu I., Radescu E.E.* // Ann. Phys. (N. Y.). 1979. **120.** P. 145.
6. *Петрунькин В.А.* // Труды ФИАН СССР. 1968. **41**. С. 165.

About compton scattering on the target with degeneracy states

N. G. Inozemtseva[1], **P. N. Sysoev**[2,a], **V. I. Inozemtsev**[3,b]

[1] *International University «Dubna», Universitetskaya str. 19, Dubna 141980, Moscow Region, Russia.*

[2] *Department of Quantum Statistics and Field Theory, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.*

[3] *Laboratory of Theoretical Physics, Joint Institute for Nuclear Research, Joliot-Curie str. 6, Dubna 141980, Moscow Region, Russia.*

E-mail: [a] *sysoev@phys.msu.ru,* [b] *inozv@theor.jinr.ru.*

For the Compton scattering amplitude on the two particle system with the zero total angular momentum the additional pole term and the contributions to it from the intermediate states with the same mass, but with different spins is calculated. It is shown that the decomposition of invariant amplitudes on the generalized polarizabilities of the system does not take place, if this term is taken into account.

Keywords: low energies, scattering, two-particle systems.
PACS: 25.30.–c.
Received 22 April January 2010.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 3(2011).

Сведения об авторах

1. Иноземцева Наталья Германовна — докт. физ.-мат. наук, доцент; тел.: (4962) 19-52-96, e-mail: nginozv@mail.ru.
2. Сысоев Павел Николаевич — инженер; e-mail:. sysoev@phys.msu.ru
3. Иноземцев Владимир Иванович — докт. физ.-мат. наук, вед. науч. сотр.; тел.: (4962) 16-32-72, e-mail: inozv@theor.jinr.ru.