Доказательство обобщенной теоремы Хаага в пространстве произвольной размерности

К. В. Антипин[1,a], Ю. С. Вернов[1,2,b], М. Н. Мнацаканова[3]

[1] *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра квантовой теории и физики высоких энергий. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.*
[2] *Институт ядерных исследований РАН. Россия, 117312, Москва, просп. 60-летия Октября, д. 7а.*
[3] *Научно-исследовательский институт ядерной физики имени Д. В. Скобельцына (НИИЯФ МГУ). Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.*
E-mail: [a] *antipin1987@gmail.com,* [b] *vernov@inr.ac.ru*

Статья поступила 10.02.2011, подписана в печать 06.04.2011

Доказана обобщенная теорема Хаага в $SO(1,k)$-инвариантной квантовой теории поля (с произвольным числом некоммутативных переменных m), т. е. установлена зависимость от k — числа совпадающих функций Уайтмана в двух теориях, связанных унитарным преобразованием при одинаковых временах. Получены новые следствия обобщенной теоремы Хаага. Доказано, что равенство $(k+1)$-точечных функций Уайтмана в двух теориях ведет к равенству амплитуд рассеяния некоторых неупругих процессов в этих теориях. При этом равенство четырехточечных функций Уайтмана приводит к совпадению амплитуд упругого рассеяния в двух теориях и, следовательно, по оптической теореме, к равенству полных сечений рассеяния.

Ключевые слова: аксиоматический подход в некоммутативной квантовой теории поля, функции Уайтмана, обобщенная теорема Хаага.

УДК: 530.145. PACS: 11.10.Cd, 11.10.Kk, 11.10.Nx.

Введение

В настоящей работе рассмотрено обобщение одного из основных результатов аксиоматического подхода в квантовой теории поля — теоремы Хаага [1, 2]. В гамильтоновой схеме квантовой теории поля предполагается, что асимптотические *in*- и *out*-поля связаны с взаимодействующими гайзенберговыми полями унитарным преобразованием. Теорема Хаага показывает, что, согласно требованию релятивистской инвариантности, теория взаимодействующих полей оказывается эквивалентной теории асимптотических полей. Используемое в обычной формулировке теории возмущений «представление взаимодействия», строго говоря, не существует. Это означает отсутствие хорошо определенного оператора в пространстве векторов состояний $\mathcal{H}$, связывающего асимптотическое поле с взаимодействующим полем.

Согласно обобщенной теореме Хаага, в теориях, связанных унитарным преобразованием, совпадает некоторое число первых функций Уайтмана. В $SO(1,3)$-инвариантной теории это число равно четырем. Функции Уайтмана — это обобщенные функции, равные вакуумным средним от произведений операторов квантованных полей:

$$W = W(x_1, \ldots, x_n) = (\Psi_0, \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n)\Psi_0), \qquad (1)$$

где Ψ_0 — вакуумный вектор.

Все содержание квантовой теории поля может быть переведено на язык свойств функций Уайтмана: зная эти функции, можно восстановить гильбертово пространство векторов состояний, унитарное представление спинорной группы Пуанкаре в нем и ковариантные операторные поля таким образом, чтобы выполнялись все основные постулаты квантовой теории поля [1–3]. Чтобы не усложнять вычисления, мы рассмотрим случай нейтрального скалярного поля. Подчеркнем, что приведенное доказательство легко распространяется на общий случай. Изначально обобщенная теорема Хаага была доказана для случая лоренц-инвариантной квантовой теории поля в обычном четырехмерном пространстве-времени ($SO(1,3)$-симметрия). В некоммутативной квантовой теории поля (НКТП) обобщенная теорема Хаага в четырехмерном пространстве рассматривалась в [4, 5]. НКТП, являющаяся одним из обобщений стандартной КТП, интенсивно развивается в последние годы (см. обзоры [6, 7]). Существенный интерес к НКТП связан, в частности, с тем, что в ряде случаев она является низкоэнергетическим пределом теории струн [8]. Аксиоматический подход в НКТП был сформулирован в [9, 10] и развит в [5, 11–13].

Целью настоящей работы является распространение обобщенной теоремы Хаага на случай $SO(1,k)$-инвариантной квантовой теории поля, т. е. теории, инвариантной относительно собственных преобразований Лоренца в $(k+1)$-мерном пространстве, затрагивающих одну временную переменную и k коммутативных пространственных переменных. При этом число некоммутативных пространственных переменных может быть произвольным. Мы задаемся целью выяснить, сколько функций Уайтмана совпадает в двух теориях, связанных унитарным преобразованием, в этом случае. Кроме того, важно получить физические следствия из обобщенной теоремы Хаага, касающиеся процессов рассеяния частиц. Результаты, полученные в настоящей работе, интересны, поскольку в последнее время строятся различные теории в пространстве произвольного числа измерений.

Доказательство обобщенной теоремы Хаага существенно использует некоторые другие известные результаты аксиоматического подхода. Согласно теореме Баргмана–Холла–Уайтмана [1–3], функции Уайтмана $W(x_1, \ldots, x_n)$ являются граничными значениями функций $W(z_1, \ldots, z_n)$, $z_i = x_i + iy_i$, аналитических в областях T_n, называемых расширенными трубами. Напомним, что вследствие трансляционной инвариантности функции Уайтмана являются на самом деле функциями разностных переменных $\xi_i = x_i - x_{i+1}$. Соответственно $W(z_1, \ldots, z_n) = W(\nu_1, \ldots, \nu_{n-1})$, $\nu_i = z_i - z_{i+1}$.

Особенно интересно, что расширенная труба T_n при всех n содержит вещественные точки, называемые точками Йоста [1–3]. Они играют важную роль в доказательстве теоремы Хаага.

Подчеркнем, что две произвольные точки Йоста разделены пространственноподобным интервалом

$$(r_k - r_l)^2 < 0. \tag{2}$$

Вследствие условия (2) каждая точка Йоста входит в множество точек Йоста вместе со своей окрестностью. Поэтому точки Йоста полностью определяют функции Уайтмана, иными словами, две функции Уайтмана, совпадающие в точках Йоста, совпадают тождественно. Более того, достаточно совпадения функций Уайтмана на открытом подмножестве множества точек Йоста. Поэтому они играют важную роль при рассмотрении совпадающих функций Уайтмана в обобщенной теореме Хаага.

Локальное квантованное поле $\varphi(x)$ определяется как обобщенная функция с операторными значениями. Другими словами, любой основной функции $f(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_4)$ ставится в соответствие неограниченный оператор $\varphi(f)$, действующий в пространстве векторов состояния $\mathcal{H}$. Необходимость определения квантованного поля как операторной обобщенной функции следует из того факта, что даже в простейшем случае асимптотического поля оператор поля не может быть определен в точке ни для одного вектора пространства $\mathcal{H}$ [2]. Соответственно функции Уайтмана

$$W = W(x_1, \ldots, x_n) = (\Psi_0, \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n)\Psi_0) \tag{3}$$

всегда существуют как обобщенные функции по каждому аргументу.

Как уже было сказано, расширенная трубчатая область содержит вещественные точки. Следовательно, функции Уайтмана — не только предельные значения голоморфных функций, но сами аналитичны в некоторой вещественной области изменения пространственно-временны́х аргументов. Именно факт равенства некоторых функций Уайтмана в этой вещественной области и составит основу наших рассуждений при доказательстве теоремы Хаага.

Напомним, что некоммутативное пространство-время вводится заменой пространственно-временных координат x на операторы $\hat{x}$, удовлетворяющие следующим коммутационным соотношениям:

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\theta^{\mu\nu}, \tag{4}$$

где $\theta^{\mu\nu}$ — постоянная антисимметричная матрица.

Интересным вариантом НКТП является случай, когда некоммутативность затрагивает только пространственные переменные, т. е. когда $\theta^{0i} = 0$. Заметим, что в этом случае НКТП является низкоэнергетическим пределом теории струн. Если $\theta^{0i} = 0$, то всегда существует система координат, в которой только $\theta^{12} = -\theta^{21} \neq 0$ [14]. Тогда без потери общности можно считать, что координаты x^0 и x^3 коммутативны, а координаты x^1 и x^2 некоммутативны (разумеется, пока имеется в виду четырехмерное пространство-время). Именно случай $\theta^{0i} = 0$ мы и будем рассматривать далее в настоящей работе.

Соотношение (4) нарушает лоренц-инвариантность теории, но в ней сохраняется трансляционная инвариантность, а также $SO(1,1) \otimes SO(2)$-симметрия. Отметим, что НКТП может быть сформулирована в коммутативном пространстве, если обычное произведение между операторами, строго говоря, между соответствующими пробными функциями, заменено звездочным (мояловским) произведением [6, 7].

В настоящей работе мы будем рассматривать теорию в пространстве произвольного числа измерений. При этом используется только $SO(1,k)$-симметрия по отношению к коммутативным переменным, число которых равно $k+1$ (т. е. одна временная переменная и k пространственных). Трансформационные свойства полей по отношению к некоммутативным переменным для нас несущественны.

Соответственно изменяется и постулат спектральности, входящий в список предположений, необходимых для доказательства обобщенной теоремы Хаага. А именно, если в коммутативной теории каждый вектор, соответствующий физическому состоянию, предполагается времениподобным, то в случае $SO(1,k)$-инвариантной НКТП необходимо, чтобы спектр энергии-импульса не содержал пространственноподобных векторов только по компонентам импульса, соответствующим коммутативным координатам. Например, обычное спектральное условие в $SO(1,3)$-инвариантной теории имеет вид $P_n^0 \geqslant |\boldsymbol{P}_n|$. В случае же $SO(1,1)$-инвариантной НКТП (x^0 и x^3 коммутативны, x^1 и x^2 некоммутативны) это условие выглядит так: $P_n^0 \geqslant |P_n^3|$. Наконец, в общем случае некоммутативной $SO(1,k)$-инвариантной теории условие приводится к следующему виду: $P_n^0 \geqslant \left[\sum_{i=1}^{k} (P_n^i)^2\right]^{1/2}$, где суммирование проводится по индексам коммутативных координат.

Мы предполагаем, что после усреднения по некоммутативным переменным функции Уайтмана становятся операторнозначными обобщенными функциями умеренного роста по отношению к коммутативным переменным. Единственное условие, которому функции Уайтмана должны удовлетворять по отношению к некоммутативным переменным, сводится к корректному определению $\star$-произведения пробных функций, иными словами, к нахождению соответствующего класса пространств пробных функций. При выборе мояловского произведения пробные функции, соответствующие пространству, в котором действуют операторы квантованного поля, должны принадлежать одному из пространств Гельфанда-Шилова S^β с $\beta < 1/2$ [12]. Аналогичный результат был получен в [15].

Теорема Баргмана–Холла–Уайтмана легко обобщается на случай $SO(1,k)$-инвариантной теории, согласно которой функции Уайтмана аналитичны в соответствующих расширенных трубах T_n, которые так же, как и в случае $SO(1,3)$-симметрии, содержат вещественные точки аналитичности.

1. Обобщенная теорема Хаага

В аксиоматической формулировке квантовой теории поля предполагается, что операторы поля, сглаженные по всем четырем координатам в пространстве векторов состояний $\mathcal{H}$, являются неограниченными операторами. При доказательстве теоремы Хаага мы должны потребовать, чтобы поля, сглаженные лишь по трем пространственным координатам

$$\varphi(f,t)=\int\limits_{\mathbb{R}_3}\varphi(t,x)f(x)\,d^3x\quad \big(f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}_3)\big),$$

имели смысл операторов в $\mathcal{H}$. Кроме того, предполагается, что система полей $\varphi(f,t)$ в фиксированный момент времени t неприводима, т. е. если ограниченный оператор B слабо коммутирует со всеми $\varphi(f,t)$,

$$\big(\varphi^*(f,t)\Phi,B\Psi\big)=\big(\Phi,B\varphi(f,t)\Psi\big)$$

при всех $\Phi,\Psi\in\mathcal{H}$, $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}_3)$, то B кратен единичному оператору.

Напомним формулировку обобщенной теоремы Хаага в стандартной теории.

Теорема (Хаага). *Пусть $\varphi_1(f,t)$ и $\varphi_2(f,t)$ — два неприводимых набора операторов скалярного нейтрального поля в момент времени t, определенных соответственно в гильбертовых пространствах $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$. Пусть, кроме того, обе теории инвариантны относительно собственной группы Пуанкаре*

$$U_j(a,\Lambda)\varphi_j(x)U_j^{-1}(a,\Lambda)=\varphi_j(\Lambda x+a),\tag{5}$$

$$U_j(a,\Lambda)\Psi_{0j}=\Psi_{0j},\quad j=1,2.\tag{6}$$

Предположим далее, что существует унитарное преобразование V, связывающее поля в произвольный момент времени t:

$$\varphi_2(f,t)=V\varphi_1(f,t)V^{-1},\tag{7}$$

$$c\Psi_{02}=V\Psi_{01},\tag{8}$$

где c — комплексное число, равное по модулю единице. Пусть, наконец, имеет место постулат спектральности. При этих предположениях первые четыре функции Уайтмана совпадают в обеих теориях. Если, кроме того, $\varphi_1(x)$ — асимптотическое поле массы m, то $\varphi_2(x)$ — тоже асимптотическое поле той же массы и обе теории полностью совпадают.

Подчеркнем, что на самом деле условие (8) фактически является следствием условия (7) при весьма общих предположениях (см. утверждение в конце этого раздела).

Приведем здесь идею доказательства совпадения первых четырех функций Уайтмана [1, 2], чтобы затем обобщить рассуждения на случай произвольной размерности.

Доказательство. Из (7) и (8) следует, что все функции Уайтмана в обеих рассматриваемых теориях совпадают при равных временах:

$$(\Psi_{01},\varphi_1(t,x_1)\cdots\varphi_1(t,x_n)\Psi_{01})=\\=(\Psi_{02},\varphi_2(t,x_1)\cdots\varphi_2(t,x_n)\Psi_{02}).\tag{9}$$

Подчеркнем, что точки (t,x_i) принадлежат подмножеству точек Йоста.

Далее доказывается, что при $n\leqslant 4$ точки с равными временными компонентами и точки, полученные из них собственными (вещественными) преобразованиями Лоренца, образуют вещественную окрестность в области аналитичности функций Уайтмана $F_\alpha(\zeta_1,\ldots,\zeta_{n-1})$ ($\alpha=1,2$, $\zeta_j=\xi_j+i\eta_j$, $\xi_j=x_j-x_{j+1}$). При $n=1$ функция Уайтмана равна константе, этот случай тривиален. При $n=2$ любой вектор рассматриваемого типа преобразованием Лоренца может быть переведен в пространственно-подобный вектор. Отметим, что при $n=2$ произвольные пространственно-подобные векторы исчерпывают множество точек Йоста. Доказывается, что при $n=4$ функции Уайтмана совпадают на открытом подмножестве точек Йоста, и, следовательно, их аналитические продолжения в обеих теориях совпадают тождественно, а значит, равны и их предельные значения при вещественных аргументах. □

Обобщим теперь это утверждение на случай $SO(1,k)$-инвариантности обеих теорий, которые могут также содержать произвольное число m некоммутативных координат. Положим без ограничения общности, что временна́я и первые k пространственных координат вектора коммутативны, а остальные координаты некоммутативны. Еще раз подчеркнем, что мы предполагаем $SO(1,k)$-симметрию только по отношению к первым $k+1$ переменным. В связи с тем, что проводимые ниже преобразования затрагивают только координаты, удовлетворяющие $SO(1,k)$-симметрии, мы не будем выписывать явно другие координаты. С учетом этого каждый вектор будет иметь вид $(\xi^0,\boldsymbol{\xi})$. Функции Уайтмана в обеих теориях по-прежнему совпадают при равных временах (что следует из (7) и (8)). Оказывается, что при $n\geqslant k+1$ векторы $\xi_1,\ldots,\xi_n$ могут быть связаны собственным преобразованием Лоренца с векторами $\tilde{\xi}_j=(0,\tilde{\boldsymbol{\xi}}_j)$, $j=1,2,\ldots,n$, если только они входят в специальный набор. В этом случае точки ξ_j не образуют открытого подмножества точек Йоста, поэтому они не могут определять функции Уайтмана. Действительно, пусть Λ — некоторое собственное преобразование Лоренца $\tilde{\xi}_j=\Lambda\xi_j$. Поскольку преобразование Лоренца сохраняет скалярные произведения, то точки ξ_j также входят в множество точек Йоста, т. е. удовлетворяют условию (2). Число этих векторов n больше размерности пространства k, следовательно, они заведомо являются линейно-зависимыми и не могут образовывать открытое подмножество множества точек Йоста.

Если же $n\leqslant k$, то можно выбрать n линейно независимых векторов $\tilde{\xi}_j=(0,\tilde{\boldsymbol{\xi}}_j)$, $j=1,\ldots,n$. Действительно, пользуясь произвольностью вектора $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_1$, мы можем выбрать $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_2$ так, чтобы $\tilde{\xi}_1\perp\tilde{\xi}_2$. Далее можно построить вектор $\tilde{\xi}_3$ такой, что $\tilde{\xi}_3\perp\tilde{\xi}_1$, $\tilde{\xi}_3\perp\tilde{\xi}_2$. Продолжая эту процедуру, которая аналогична известной процедуре ортогонализации Грама–Шмидта, получим систему ортогональных векторов $\{\hat{\xi}_j\}$: $\hat{\xi}_i\perp\hat{\xi}_j$, $i\neq j$. Каждый из этих векторов $\hat{\xi}_j$ образует линейную оболочку, состоящую из векторов $\alpha\hat{\xi}_j$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Поскольку векторы из различных линейных оболочек ортогональны: $\alpha_i\hat{\xi}_i \perp \alpha_j\hat{\xi}_j$, постольку ортогональными будут и векторы, получающиеся из них собственными преобразованиями Лоренца: $\xi_{j\,\alpha} = \Lambda(\alpha\hat{\xi}_j)$ $(j = 1, \ldots, n,\ \alpha \in \mathbb{R})$. Совокупность ортогональных ненулевых векторов является линейно независимой, поэтому векторы $\xi_{j\alpha}$ образуют открытое подмножество точек Йоста. Таким образом, доказано совпадение всех функций Уайтмана вплоть до k-точечных (в разностных переменных). Переходя от разностных переменных к обычным $(x_1, \ldots, x_n)$, получим, что в случае $SO(1,k)$-симметрии и произвольного числа m некоммутативных переменных в обеих теориях совпадают первые $k+1$ функция Уайтмана.

Утверждение. *Условие* (8) *выполнено, если вакуумные векторы Ψ_0^i являются единственными нормированными, трансляционно инвариантными состояниями по отношению к сдвигам $U_i(a)$ вдоль одной из координат, входящих в условие $SO(1,k)$-симметрии.*

Приводимое ниже доказательство является обобщением классического доказательства [2].

Действительно, легко проследить, что оператор $U_1^{-1}(a)V^{-1}U_2(a)V$ коммутирует с операторами $\tilde{\varphi}_1(t,\boldsymbol{x})$ и вследствие неприводимости набора этих операторов пропорционален единичному оператору [1]. Рассмотрев предел $a = 0$, видим, что

$$U_1^{-1}(a)V^{-1}U_2(a)V = \boldsymbol{I}. \qquad (10)$$

Из равенства (10) непосредственно следует, что если

$$U_1(a)\Psi_0^1 = \Psi_0^1, \qquad (11)$$

то

$$U_2(a)V\Psi_0^1 = V\Psi_0^1. \qquad (12)$$

Отсюда в силу единственности трансляционно инвариантных состояний Ψ_0^i в соответствующих пространствах $\mathcal{H}_i$ следует условие (8). Утверждение доказано.

2. Основные следствия обобщенной теоремы Хаага

Получим отдельно следствия обобщенной теоремы Хаага в случае $SO(1,1)$, $SO(1,3)$ и $SO(1,k)$, $k > 3$, инвариантности теории. В первых двух случаях наше рассмотрение есть обобщение доказательства, данного в [5].

2.1. $SO(1,1)$-инвариантная теория

Рассмотрим сначала обобщенную теорему Хаага в случае $SO(1,1)$-инвариантности теории. В соответствии с результатами предыдущего раздела в двух $SO(1,k)$-инвариантных теориях, связанных унитарным преобразованием при одном и том же времени, совпадают первые $k+1$ функция Уайтмана. Таким образом, в $SO(1,1)$-инвариантной теории имеет место равенство двухточечных функций Уайтмана.

Докажем, что если одна из рассматриваемых теорий тривиальна, т.е. соответствующая S-матрица равна единице, то и другая тривиальна.

Подчеркнем, что в $SO(1,1)$-инвариантной теории для доказательства сформулированного результата достаточно выполнения условия спектральности, исключающего наличие тахионов, только по отношению к коммутативным координатам. Дело в том, что этого условия достаточно для доказательства аналитичности функций Уайтмана по коммутативным переменным в области, являющейся двумерным аналогом расширенных труб. Кроме того, достаточно выполнения условия трансляционной инвариантности только для коммутативных переменных.

Равенство двухточечных функций Уайтмана в двух теориях приводит к следующему заключению: если коммутативные координаты удовлетворяют условию локальной коммутативности и ток в одной из рассматриваемых теорий равен нулю, то и в другой теории ток равен нулю.

Действительно, так как $W_1(x^1,x^2) = W_2(x^1,x^2)$, то и

$$\langle \Psi_0^1, j_{\bar{f}}^1 j_f^1 \Psi_0^1 \rangle = \langle \Psi_0^2, j_{\bar{f}}^2 j_f^2 \Psi_0^2 \rangle, \qquad (13)$$

где

$$j_f^i = (\Box + m^2)\varphi_f^i.$$

Если, например, $j_f^1 = 0$, то в пространстве с положительной метрикой

$$j_f^2 \Psi_0^2 = 0. \qquad (14)$$

Из последней формулы и условия локальной коммутативности [2] следует, что

$$j_f^2 \equiv 0. \qquad (15)$$

Наше утверждение доказано. □

2.2. $SO(1,3)$-инвариантная теория

Перейдем теперь к $SO(1,3)$-инвариантной теории, точнее, к теории с четырьмя коммутативными координатами и произвольным числом некоммутативных координат. В этом случае мы покажем, что из равенства четырехточечных функций Уайтмана для полей $\varphi_f^1(t)$ и $\varphi_f^2(t)$, связанных условиями (7) и (8), которое имеет место в рассматриваемой теории, следует важное физическое следствие. А именно для таких полей совпадают амплитуды упругого рассеяния в соответствующих теориях и, следовательно, согласно оптической теореме, совпадают и полные сечения. При выводе этого результата условие локальной коммутативности не использовалось. В частности, если одно из вышеупомянутых полей, например φ_f^1, тривиально, то и поле φ_f^2 тривиально. Это утверждение непосредственно следует из редукционных формул Лемана–Циммермана–Симанзика [16].

Для того чтобы не усложнять формулы, ниже мы будем рассматривать операторы $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ как если бы они были заданными в точке.

Пусть $\langle p_3, p_4 | p_1, p_2 \rangle_i$, $i = 1, 2$, — амплитуды упругого рассеяния для полей $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ соответственно. Согласно редукционным формулам,

$$\langle p_3, p_4 | p_1, p_2 \rangle_i \sim \int dx_1 \cdots dx_4\, e^{i(-p_1x_1 - p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4)} \times \\ \times \prod_{j=1}^{4} (\Box_j + m^2) \langle 0 | T\varphi_i(x_1) \cdots \varphi_i(x_4) | 0 \rangle, \qquad (16)$$

где $T\varphi_i(x_1) \cdots \varphi_i(x_4)$ — хронологическое произведение операторов.

Из равенства

$$W_2(x_1, \ldots, x_4) = W_1(x_1, \ldots, x_4)$$

следует, что

$$\langle p_3, p_4 | p_1, p_2 \rangle_2 = \langle p_3, p_4 | p_1, p_2 \rangle_1 \qquad (17)$$

для любого p_i. Применяя это равенство к амплитудам упругого рассеяния вперед, получим, что, согласно оптической теореме, полные сечения для полей $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ совпадают. Если теперь S-матрица для поля $\varphi_1(x)$ равна единице, тогда она также равна единице для поля $\varphi_2(x)$. Подчеркнем, что в четырехмерном пространстве равенство четырехточечных функций Уайтмана в двух теориях, связанных унитарным преобразованием, справедливо только в коммутативной теории поля, но не в некоммутативном случае.

2.3. Общий случай

Перейдем теперь к общему случаю, т. е. к $SO(1,k)$-инвариантной теории. Докажем, что кроме равенства упругих и полных сечений в этом случае имеет место равенство амплитуд и некоторых неупругих процессов. В соответствии с редукционной формулой

$$\langle p_3, p_4, \ldots, p_n | p_1, p_2 \rangle_i \sim$$
$$\sim \int dx_1 \cdots dx_n \, e^{i(-p_1x_1 - p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4 + \ldots + p_nx_n)} \times$$
$$\times \prod_{j=1}^{n} (\Box_j + m^2) \langle 0 | T \varphi_i(x_1) \cdots \varphi_i(x_n) | 0 \rangle. \qquad (18)$$

Рассмотрим процессы $2 \Rightarrow n$. Очевидно, что согласно этой формуле и общему результату предыдущего раздела, амплитуды этих процессов совпадают в двух теориях, если $n \leqslant k+1$.

Заключение

Получено доказательство обобщенной теоремы Хаага в случае $SO(1,k)$-инвариантной теории при произвольном k.

Доказано, что если одна из $SO(1,1)$-инвариантных теорий описывает тривиальное поле, то поле, связанное с первым унитарным преобразованием при одном и том же времени, тоже тривиально.

В $SO(1,3)$-инвариантной теории доказано равенство упругих и, следовательно, полных сечений в рассматриваемых теориях.

В $SO(1,k)$-инвариантной теории, кроме вышеупомянутых результатов, доказано равенство амплитуд некоторых неупругих процессов.

Авторы выражают благодарность А. Д. Баранову за обсуждение математических аспектов работы.

Список литературы

1. *Стритер Р., Вайтман А.* PCT, спин, статистика и все такое. М., 1966.
2. *Боголюбов Н.Н, Логунов А.А., Тодоров И.Т.* Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. М., 1969.
3. *Йост Р.* Общая теория квантованных полей. М., 1967.
4. *Chaichian M., Prešnajder P., Tureanu A.* // Phys. Rev. Lett. 2005. **94**. P. 151602. hep-th/0409096.
5. *Chaichian M., Mnatsakanova M.N., Tureanu A., Vernov Yu.S.* Classical theorems in noncommutative quantum field theory. hep-th/0612112.
6. *Douglas M.R., Nekrasov N.A.* // Rev. Mod. Phys. 2001. **73**. P. 977. hep-th/0106048.
7. *Szabo R.J.* // Phys. Reports. 2003. **378**, P/ 207. hep-th/0109162.
8. *Seiberg N., Witten E.* // J. High-Energy Phys. 1999. **9909**. P. 32. hep-th/9908142.
9. *Álvarez-Gaumé L., Vázquez-Mozo M.A.* // Nucl. Phys. B. 2003. **668**. P. 293. hep-th/0305093.
10. *Chaichian M., Mnatsakanova M.N., Nishijima K.* et al. hep-th/0402212.
11. *Vernov Yu.S., Mnatsakanova M.N.* // Theor. Math. Phys. 2005. **142**. P. 337.
12. *Chaichian M., Mnatsakanova M.N., Tureanu A., Vernov Yu.S.* // J. High-Energy Phys. 2008. **09**. P. 125. hep-th/0706.1712v1.
13. *Vernov Yu.S., Mnatsakanova M.N.* Rigorous definition of quantum field operators in noncommutative quantum field theory. math-ph/0901.1454.
14. *Álvarez-Gaumé L., Barbon J.L.F., Zwicky R.* // J. High-Energy Phys. 2001. **0105**. P. 057. hep-th/0103069.
15. *Soloviev M.A.* // Theor. Math. Phys. 2007. **153**. P. 1351. math-ph/0708.0811.
16. *Bjorken J.D., Drell S.D.* Relativistic quantum fields. McGraw-Hill, 1965.

Extension of Haag's theorem in a space with arbitrary dimension

K. V. Antipin[1,a], **Yu. S. Vernov**[2,b], **M. N. Mnatsakanova**[3,c]

[1] *Department of Quantum Theory and High-Energy Physics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.*

[2] *Institute for Nuclear Research, Russian Acedemy of Sciences, Moscow 117312, Russia.*

[3] *D. V. Skobeltsyn Institute of Nuclear Physics, Moscow State University, Moscow 119991, Russia.*

E-mail: [a] *antipin1987@gmail.com,* [b] *vernov@inr.ac.ru,* [c] *mnats@theory.sinp.msu.ru.*

Generalized Haag's theorem has been proven in $SO(1,k)$ invariant quantum field theory. Apart from the above mentioned $k+1$ variables there can be arbitrary number of additional coordinates including noncommutative ones in the theory. In $SO(1,k)$ invariant theory new consequences of generalized Haag's theorem are obtained.

It has been proven that the equality of four-point Wightman functions in two theories leads to the equality of elastic scattering amplitudes and thus to the equality of the total cross-sections in these theories. Also it has been shown that at $k > 3$ the equality of $(k+1)$-point Wightman functions in two theories leads to the equality of scattering amplitudes of some inelastic processes. In $SO(1,1)$ invariant theory it has been proved that if in one of the theories under consideration S-matrix is equal to unity, then in another theory S-matrix is unity as well.

Keywords: Haag's theorem, Wightman functions, axiomatic approach, noncommutative quantum field theory (NC QFT).
PACS: 11.10.Cd, 11.10.Kk, 11.10.Nx.
Received 10 February 2011.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 4(2011).

Сведения об авторах

1. Антипин Константин Владиславович — аспирант; e-mail: antipin1987@gmail.com.
2. Вернов Юрий Сергеевич — докт. физ.-мат. наук, профессор, вед. науч. сотр.; тел.: (499) 135-77-60, e-mail: vernov@inr.ac.ru
3. Мнацаканова Мелита Николаевна — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр.; тел.: (495) 939-50-79, e-mail: mnats@theory.sinp.msu.ru.