Учет локальной геометрии поверхности в классической теории спиновых волн

А. К. Нухов[a], Г. М. Мусаев, К. К. Казбеков

Дагестанский государственный университет, физический факультет, кафедра теоретической и математической физики. Россия, 367025, Республика Дагестан, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, д. 43а.
E-mail: [a]nukhov1984@mail.ru

Статья поступила 27.05.2011, подписана в печать 17.06.2011

Рассмотрено влияние поверхностной энергии на формирование спинового спектра. Отражены различные аспекты влияния поверхности на энергетический спектр системы, связанные с особенностями строения структуры самой поверхности. Проведен расчет для спектра элементарных возбуждений ферромагнитной системы, ограниченной некоторой поверхностью, придерживаясь стандартного метода диагонализации гамильтониана. Получены соотношения, которые полностью определяют «поверхностный» спектр системы в нулевом приближении по спин-спиновому взаимодействию.

Ключевые слова: спектр ферромагнетика, поверхностные эффекты, спиновые волны.
УДК: 537.611.2. PACS: 67.80.dk, 75.75.–c.

Введение

Исследование низкоразмерного магнетизма — важная задача современной физики твердого тела [1]. Известно, что от геометрии поверхности низкоразмерных структур существенно зависят их термодинамические параметры [2]. В магнитных материалах последние зависят в основном от особенностей спектра спиновых волн, который, очевидно, изменится при переходе от массивных кристаллов к низкоразмерным структурам.

Как известно [3, 4], в классической теории спиновых волн исходят из модельного гамильтониана

$$\hat{H}_s = E_0 - \Sigma A_{ik}\hat{\boldsymbol{S}}_i\hat{\boldsymbol{S}}_k, \qquad (1)$$

где $\hat{H}_s$ — обменный гамильтониан, $\hat{\boldsymbol{S}}_i$ — оператор вектора спина отдельного электрона со спиновым квантовым числом $S = 1/2$, E_0 — основной уровень рассматриваемой системы, A_{ik} — соответствующие константы обменного взаимодействия соседних узлов. После проведения над данным гамильтонианом (1) процедуры «феноменологизации» он переходит в основной гамильтониан классической теории

$$E_{\text{ex}} = -\frac{2za}{d^3}\int j^2(\boldsymbol{r})\,dr - \frac{2A}{d}\int j(\boldsymbol{r})\Delta j(\boldsymbol{r})\,d\boldsymbol{r}. \qquad (2)$$

Нарушение однородности намагниченности при условии законности приближения непрерывной среды ($\lambda \gg d$, где λ — длина волны соответствующих колебаний, d — среднее расстояние между ближайшими соседними ионами кристалла) приводит к появлению добавки к обменной энергии, которая с точностью до поверхностных эффектов равна

$$E_{\text{ex}} = -\frac{2A}{d^3}\int\left[(\nabla j_x)^2 + (\nabla j_y)^2 + (\nabla j_z)^2\right]d\boldsymbol{r}. \qquad (3)$$

Таким образом, в данной теории не рассматривается влияние поверхностных эффектов на формирование спинового спектра, что, вообще говоря, является законным лишь в случае малости поверхностной энергии по сравнению с (3), т. е. в случае массивных образцов. Безусловно, в случае существенного влияния размерных эффектов проводится включение поверхностных членов в (3), однако и тогда расчет приводит лишь к ограничению области действия «объемной» теории в ограниченных системах путем введения дополнительных параметров [5, 6]. При этом расчет приобретает известную жесткость, будучи не в состоянии отразить более сложные аспекты влияния поверхности на энергетический спектр системы связанные, например, с особенностями строения структуры самой поверхности. Построение таких более общих классических теорий представляется достаточно интересным хотя бы потому, что в физических следствиях таких теорий может быть явно показана зависимость спектра, а с ним и всех свойств от размерной структуры системы.

Расчет спектра

Проведем расчет для спектра элементарных возбуждений ферромагнитной системы, ограниченной некоторой произвольной поверхностью, на которую мы пока не будем налагать никаких определенных условий, придерживаясь стандартного метода диагонализации гамильтониана (3). Для этого необходимо к выражению (3) добавить член, связанный с поверхностными эффектами, а именно

$$\Delta E_s = -\frac{2A}{d^3}\int\left[(\nabla j_x)^2 + (\nabla j_y)^2 + (\nabla j_z)^2\right]d\boldsymbol{r} + \frac{A}{d}\oint\nabla_n j^2\,d\sigma, \qquad (4)$$

где $\nabla_n j^2 = \frac{\partial}{\partial n}(j_x^2 + j_y^2 + j_z^2)$, а интегрирование ведется по поверхности всего ферромагнитного образца, $\partial/\partial n$ — производная по нормали к этой поверхности.

В классическом приближении определим малые колебания самопроизвольной намагниченности $\boldsymbol{I}_s$ около основного состояния $\boldsymbol{I}_0$ как $\boldsymbol{I}_s = \boldsymbol{I}_0 + \gamma$, причем, считая, что вектор $\boldsymbol{I}_s$ отличается от $\boldsymbol{I}_0$ на малую величину γ: $|\gamma| \ll |\boldsymbol{I}_0|$. Используя это условие малости, примем, что изменение вектора $\boldsymbol{I}_s$ сводится к изменению его ориентации в различных точках ферромагнетика без изменения абсолютной величины, т. е. $I_s^2 = I_0^2 = \text{const}$. Тогда, выбрав за направление однородной намагничен-

ности ось z, в принятых приближениях имеем

$$I_{sx} = \gamma_x, \quad I_{sz} = \gamma_y, \quad I_{sz} = I_0 - \gamma_z \approx I_0 - \frac{\gamma_x^2 + \gamma_y^2}{2I_0}. \quad (5)$$

Подставляя (5) в (4) и пренебрегая $\nabla I_{sz} \approx I_0 \approx 0$, получим

$$\Delta E_s = -\frac{2A}{I_0^2 d} \int \left[(\nabla j_x)^2 + (\nabla j_y)^2 \right] d\boldsymbol{r} + \\ + \frac{A}{I_0^2 d} \oint \frac{\partial}{\partial n} (\gamma_x^2 + \gamma_y^2)\, d\sigma + \frac{A}{d} \oint \nabla_n j_z^2\, d\sigma. \quad (6)$$

Для снятия ориентационного вырождения включим вдоль оси z слабое однородное и постоянное внешнее магнитное поле $\boldsymbol{h} \parallel \boldsymbol{e}_z$, Тогда полная добавочная энергия неоднородно намагниченного кристалла с учетом зеемановской энергии в принятых приближениях будет равна сумме

$$\Delta E_{\text{tot}} = \int \left\{ \frac{2A}{I_0^2 d} \left[(\nabla \gamma_x)^2 + (\nabla \gamma_y)^2 \right] + \frac{h}{2I_0} (\gamma_x^2 + \gamma_y^2) \right\} d\boldsymbol{r} + \\ + \frac{A}{d} \oint \nabla_n j_z^2\, d\sigma. \quad (7)$$

Совершая над вторым членом суммы (7) преобразование по формуле Остроградского–Гаусса

$$\oint \nabla_n j^2\, d\sigma \to \frac{1}{d} \int \operatorname{div}(\nabla_n j^2 \boldsymbol{n})\, dr, \\ n_i = (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{e}) = \cos \alpha_i, \quad i = x, y, z, \quad (8)$$

представим выражение (7) в виде единого пространственного интеграла:

$$l \Delta E_{\text{tot}} = \int \left\{ \frac{2A}{I_0^2 d} \left[(\nabla \gamma_x)^2 + (\nabla \gamma_y)^2 \right] + \frac{h}{2I_0} (\gamma_x^2 + \gamma_y^2) + \\ + \frac{A}{d^2} \left[\nabla_x \left(\nabla_n j^2 \cos \alpha_x \right) + \nabla_y \left(\nabla_n j^2 \cos \alpha_y \right) + \\ + \nabla_z \left(\nabla_n j^2 \cos \alpha_z \right) \right] \right\} d\boldsymbol{r}. \quad (9)$$

Для решения классической задачи о колебаниях намагниченности изотропной квазинепрерывной магнитной среды, свойства которой описываются «намагниченностями» $\gamma_x(r,t)$ и $\gamma_y(r,t)$ как функциями координат и времени, необходимо в свою очередь представить энергию (6) как функцию γ_x и γ_y. Так как первая часть подынтегральной суммы уже выражена в (6) явно через γ_x и γ_y, то необходимо преобразовать соответствующим образом лишь вторую часть этой суммы.

Вначале введем некоторые вспомогательные определения, которые позволили бы уяснить смысл проводимых далее операций. При экспликации понятия поверхности (в трехмерном пространстве) исходят, как правило [7, 8], из произвольного непрерывного отображения вида γ: $U \to \mathbb{R}^3(x,y,z)$, где $\mathbb{R}^3(x,y,z)$ — трехмерное евклидово пространство, а U — выпуклое открытое подмножество арифметической плоскости $\mathbb{R}^2$. Когда в $\mathbb{R}^3(x,y,z)$ выбрано начало отсчета O, отображение γ задается непрерывной вектор-функцией $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v)$, $(u,v) \in U$, принимающей значения в ассоциированном линеале V, а когда в V выбран, кроме того, и базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, отображение γ задается тремя непрерывными числовыми функциями

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v) \quad (10)$$

— координатами в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ вектора.

Задав регулярную параметризацию (10), построим в каждой локальной области X поверхности Ω поле N поверхностных нормалей $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}(x,y)$. Вектор нормали к поверхности Ω равен векторному произведению

$$\boldsymbol{n} = \frac{[\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v]}{|[\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v]|}. \quad (11)$$

Зная этот вектор, вторую часть подынтегральной суммы (9) перепишем как

$$\delta^{ij} \nabla_{x_i} \left(\nabla_n j^2 \cos \alpha_{x_j} \right) = \nabla_n j^2 \cdot \delta^{ij} \nabla_{x_i} n_{x_j} + \delta^{ij} \nabla_{x_j} n_{x_i} \left(\nabla_n j^2 \right), \\ x_i \equiv x, y, z, \quad i = 1, 2, 3, \quad (12)$$

где

$$\nabla_n j^2 \cong \left(\nabla_n \gamma_x^2 + \nabla_n \gamma_y^2 \right) / I_0^2. \quad (13)$$

Выражения (12), (13) позволяют представить функционал (9) в искомом виде:

$$\Delta E_{\text{tot}} = \int \left\{ \frac{2A}{I_0^2 d} \left[(\nabla \gamma_x)^2 + (\nabla \gamma_y)^2 \right] + \frac{h}{2I_0} (\gamma_x^2 + \gamma_y^2) + \\ + \frac{A}{I_0^2 d^2} \left[\left(\nabla_n \gamma_x^2 + \nabla_n \gamma_y^2 \right) \delta^{ij} \nabla_{x_i} \nabla_{x_j} + \\ + \delta^{ij} n_{x_j} \nabla_{x_i} \left(\nabla_n \gamma_x^2 + \nabla_n \gamma_y^2 \right) \right] \right\} d\boldsymbol{r}. \quad (14)$$

Проведя в выражении (14) преобразование к линейно независимой комбинации

$$\gamma_+ = \gamma_x + i\gamma_y, \quad \gamma_- = \gamma_x - i\gamma_y, \quad (15)$$

приведем его с учетом соотношения

$$\nabla_n \gamma_x^2 + \nabla_n \gamma_y^2 = \gamma_+ \nabla_n \gamma_- + \gamma_- \nabla_n \gamma_+ \quad (16)$$

к виду

$$\Delta E_{\text{tot}} = \int \left\{ \frac{2A}{I_0^2 d} (\nabla \gamma_+ \cdot \nabla \gamma_-) + \frac{h}{2I_0} (\gamma_+ + \gamma_-) + \\ + \frac{A}{I_0^2 d^2} \left[(\gamma_+ \cdot \nabla_n \gamma_- + \gamma_- \cdot \nabla_n \gamma_+) \cdot \delta^{ij} \cdot \nabla_{x_i} \cdot \nabla_{x_j} + \\ + \delta^{ij} \cdot n_{x_j} \cdot \nabla_{x_i} \cdot \left(\gamma_+ \cdot \nabla_n \gamma_x^2 + \gamma_- \cdot \nabla_n \gamma_y^2 \right) \right] \right\} d\boldsymbol{r}. \quad (17)$$

Для удобства разобьем (17) на два выражения:

$$\Delta E_s = \Delta E_{s_1} + \Delta E_{s_2}, \quad (18)$$

в каждом из которых учтена соответствующая часть дополнительного взаимодействия, как будто ΔE_{s_1} является «чисто» объемной частью энергии:

$$\Delta E_{\text{tot}} = \int \left\{ \frac{2A}{I_0^2 d} (\nabla \gamma_+ \cdot \nabla \gamma_-) + \frac{h}{2I_0} (\gamma_+ \gamma_-) \right\} d\boldsymbol{r}, \quad (19)$$

а ΔE_{s_2} — энергия, связанная с магнитным влиянием поверхности:

$$\Delta E_{s_2} = \int \frac{A}{I_0^2 d^2} \mathcal{N}(\gamma)\, dr. \tag{20}$$

В выражении (20) введено

$$\mathcal{N}(\gamma) = \delta^{ij} \hat{p}_{ij} \cdot (\gamma_+ \cdot \nabla_n \gamma_- + \gamma_- \cdot \nabla_n \gamma_+). \tag{21}$$

Действие оператора $\hat{p}_{ij} = \hat{p}_{ij}(n)$ символически определяется выражением

$$\hat{p}_{ij}(n) = (*) \cdot \nabla_{x_i} n_{x_j} + n_{x_j} \nabla_{x_i} \cdot (*), \tag{22}$$

где через звездочку обозначены места «действия» этого оператора. Преобразуем энергию (20) к каноническому виду, выбирая, как обычно, в качестве обобщенных координат Фурье-компоненты величин

$$\begin{aligned} \gamma_- &= a \sum_k q_k \exp[i(\omega t + k^i x_i)], \\ \gamma_+ &= a \sum_k q_k^+ \exp[-i(\omega t + k^i x_i)]. \end{aligned} \tag{23}$$

В (23) $\omega = \omega(k)$ — частота колебаний, k — их волновой вектор, $q_{k'} q_k^+$ — обобщенные координаты системы, α — нормировочный фактор, который будет определен ниже. Рассмотрим величину

$$\Im(\omega, \omega') = \gamma_+ \cdot n_i \nabla^i \gamma_- + \gamma_- \cdot n_i \nabla^i \gamma_+. \tag{24}$$

Фурье-преобразование этой величины сводит его к выражению

$$\begin{aligned} \Im(\omega, \omega') &= a^2 i \sum_{k,k'} (n_j k^j) \times \\ &\times \Big[q_{k'} + q_k \exp\{ i[(\omega(k) - \omega(k'))t + (k^j - k'^j) x_j] \} - \\ &- q_{k'} q_k^+ \exp\{ -i[(\omega(k) - \omega(k'))t + (k^j - k'^j) x_j] \} \Big]. \end{aligned} \tag{25}$$

Подействуем на (25) оператором (22):

$$\begin{aligned} \hat{p}_{ij}(n) \Im(\omega, \omega') &= a^2 \sum_{k,k'} \Big[q_{k'}^+ q_k \{ -\big(n_l (k^l - k'^l)\big) \cdot (n_j k^j) + \\ &+ i[(\nabla^l n_l) \cdot (n_j k^j) + (\nabla^l n_j) \cdot (n_l k^j)] \} \cdot e_{kk'}^- + \\ &+ q_{k'} q_k \{ -\big(n_l (k^l - k'^l)\big) \cdot (n_j k^j) - \\ &- i[(\nabla^l n_l) \cdot (n_j k^j) + (\nabla^l n_j) \cdot (n_l k^j)] \} \cdot e_{kk'}^+ \Big]. \end{aligned} \tag{26}$$

Учитывая следующие бозонные соотношения коммутации обобщенных координат

$$q_{k'} q_k^+ - q_{k'}^+ q_k = \delta_{kk'}, \tag{27}$$

выражение (26) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \hat{p}_{ij}(n) \Im(\omega, \omega') &= a^2 \sum_k D(k, k') \cdot q_k^+ q_k + \\ &+ a^2 \sum_{k,k'} q_k^+ q_k \left(D(k, k') \cdot e_{kk'}^- + D(k, k') \cdot e_{kk'}^+ \right) \end{aligned} \tag{28}$$

через функции D волновых векторов k, k'

$$\begin{aligned} D(k, k') &= -\big(n_l (k^l - k'^l)\big) \cdot (n_j k^j) + \\ &+ i[(\nabla^l n_l) \cdot (n_j k^j) + (\nabla^l n_j) \cdot (n_l k^j)], \quad i = \sqrt{-1}, \end{aligned}$$

$$D^+(k, k') = (D(k, k'))^+, \tag{29}$$

$$\begin{aligned} D^+(k, k') &= -i \operatorname{Im}\big(D_n^+(k, k)\big) = \\ &= -i[(\nabla^l n_l) \cdot (n_j k^j) + (\nabla^l n_j) \cdot (n_l k^j)] \end{aligned}$$

и величины

$$\begin{aligned} e_{k,k}^- &= \exp\{ -i[\big(\omega(k) - \omega(k')\big) t + \big(k^j - k'^j\big) x_j] \}, \\ e_{kk'}^+ &= \big(e_{kk'}^-\big)^+, \quad e_{kk'}^+ = e_{kk'}^- = 1. \end{aligned} \tag{30}$$

также являющиеся функциями k и k'. Запишем ΔE_{s_2} в канонической форме

$$\begin{aligned} \Delta E_{s2} &= -i \frac{\alpha^2 A}{I_0^2 d^2} \sum_k \left(\int \operatorname{Im}\big(D_n^+(k, k)\big)\, d\boldsymbol{r} \right) \cdot q_k^+ q_k + \\ &+ \frac{\alpha^2 A}{I_0^2 d^2} \sum_{k,k'} \left(\int [D_n^(k, k) \cdot e_{kk'}^- + D_n^+(k, k) \cdot e_{kk'}^-]\, d\boldsymbol{r} \right) q_{k'}^+ q_k. \end{aligned} \tag{31}$$

Полученная каноническая форма (31) для «поверхностной» части обменной энергии позволяет нам вычислить теперь спектр элементарных возбуждений системы. Разумеется, спектр возбуждений рассматривается здесь в нулевом приближении по взаимодействию спиновых волн между собой и имеет смысл, строго говоря, лишь в области достаточно низких температур, когда плотность возбуждений очень мала. Поэтому дальнейшие расчеты по вычислению спектра связаны с несложной процедурой диагонализации (31).

Для того чтобы окончательные выражения были даны в наиболее общей форме выберем класс гладкости C^r с $r = \infty$. Тогда функция поверхностных нормалей раскладывается в тейлоровский степенной ряд вблизи каждой точки:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}) &= \sum_{m=0}^{x} \boldsymbol{\beta}_m(\boldsymbol{r}_0)(\Delta \boldsymbol{r})^m = \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \sum_{m_3=0}^{\infty} \boldsymbol{\beta}_{m_1 m_2 m_3}(x_0, y_0, z_0) \times \\ &\times (\Delta x)^{m_1} (\Delta y)^{m_2} (\Delta z)^{m_3}, \end{aligned} \tag{32}$$

где $\Delta x = x - x_0$, а коэффициенты разложения равны

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\beta}_{m_1 m_2 m_3}(x_0, y_0, z_0) = \\ &= \big((m_1)!(m_2)!(m_3)!\big)^{-1} \cdot \frac{\partial^{m_1+m_2+m_3} \boldsymbol{n}(x_0, y_0, z_0)}{\partial^{m_1} x\, \partial^{m_2} y\, \partial^{m_3} z}. \end{aligned} \tag{33}$$

Функции (29) для гладкого поля нормалей при этом имеют вид суммы

$$\begin{aligned} D_m(k, k') &= k^j \sum_{m_1 m_2} \big[-(k^l - k'^l) + i(1 + m_1)\big(1 + \hat{\pi}(l, j)\big) \big] \times \\ &\times (\beta_{m_1})_l (\beta_{m_2})_j \cdot (\Delta r)_l^{m_1} (\Delta r)_j^{m_2}, \end{aligned} \tag{34}$$

где коэффициенты $(\beta_{m_1})_l = (\beta_{m_1})_l(r_0)$ для удобства обозначений (в данной части) понимаются в векторном смысле, как проекция данного $\boldsymbol{\beta}_m(\boldsymbol{r}_0)$ на l-е направление, $l, j = 1, 2, 3$. В (34) $\hat{\pi}(l, j)$ — оператор замены индексов l на j и соответственно j на l у всего воздействуемого выражения слева от оператора. Полагая, что $\boldsymbol{r}_0 = 0$ $(\boldsymbol{\beta}_{m_1}(r_0 = 0) = (\boldsymbol{\beta}_{m_1})_l)$ и вводя еще один дополнительный оператор

$$\begin{aligned} \hat{g}_m^{jl} &\equiv k^j [-(k^l - k'^l) + i(1 + m)(1 + \hat{\pi}(l, j))] = \hat{g}_m^{jl}(k, k'), \\ \big(\hat{g}_m^{jl}\big)^{\pm}(k, k) &\equiv \pm i \operatorname{Im}\big(\hat{g}_m^{jl}(k, k')\big), \end{aligned} \tag{35}$$

из (34) имеем

$$D_m(k,k') = \sum_{m_1,m_2} \hat{g}^{jl}_{m_1}(k,k')\delta^{ll'} \cdot (\beta_{m_1})_l(\beta_{m_2})_j \cdot r_l^{m_1} r_j^{m_2}. \quad (36)$$

Представив функции (29) в форме (36), вычислим необходимые интегралы из (31). Имеем

$$\int e^{\pm}_{k,k'} \cdot r_l^{m_1} r_j^{m_2}\, dr = \mp V \exp\left[\mp i(\omega(k) - \omega(k'))t\right] \times$$
$$\times\, \delta_{kk'} \cdot \begin{cases} P_{m_1+m_2,m_1+m_2}(r_l), & l = j, \\ P_{m_1,m_2}(r_l) \cdot P_{m_1,m_2}(r_j), & l \neq j. \end{cases} \quad (37)$$

Функциональное интегрирование в (37) ведется по всему объему кристалла, и результаты вычислений разнятся формой полиномов вида

$$P_{m,m-\hat{f}}(\boldsymbol{r}) = \sum_{k=0}^{m-\hat{f}} (-1)^k \frac{m!}{(m-k)!} \boldsymbol{r}^{m-k} V^k. \quad (38)$$

Следовательно, пространственный интеграл от произведения функций (36) и (30) будет определяться следующим общим выражением:

$$\int D_n^{\pm} e^{\pm}_{k,k'}\, d\boldsymbol{r} = \mp V \exp\left[\mp i(\omega(k) - \omega(k'))t\right] \delta_{k,k'} \times \quad (39)$$
$$\times \sum_{m_1 m_2} \left(\hat{g}^{jl}_{m_1}\right)^{\pm}(k,k')\delta^{ll'} \cdot (\beta_{m_1})_l(\beta_{m_2})_j \cdot \tilde{P}\begin{Bmatrix} m_1,\, m_2 \\ l,\, j \end{Bmatrix}(\boldsymbol{r}),$$

с объединенным символом двух форм полинома (38)

$$\tilde{P}\begin{Bmatrix} m_1,\, m_2 \\ l,\, j \end{Bmatrix}(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} P_{m_1+m_2,m_1+m_2}(\boldsymbol{r}), & l = j, \\ P_{m_1,m_2,}(\boldsymbol{r}) \cdot P_{m_1,m_2,}(\boldsymbol{r}), & l \neq j. \end{cases} \quad (40)$$

Выражения (39) диагонализует следующую квадратичную форму:

$$\sum_{k,k'} q^+_{k'} q_k \int D_n^{\pm}(k,k') \cdot e^{\pm}_{k,k'}\, d\boldsymbol{r} = \mp V \sum_k q^+_k q_k \cdot L_0^{\pm}(k,\bar{\boldsymbol{r}}). \quad (41)$$

При этом в (41) уже учтены конечные размеры системы введением характеристической вектор-функции $\boldsymbol{r} = \bar{\boldsymbol{r}}$ (иначе говоря, учтены параметрические уравнения (10). Функция $L_0^{\pm}(k,\bar{\boldsymbol{r}})$ соответственно равна

$$L_0^{\pm}(k,\bar{\boldsymbol{r}}) = \sum_{m_1 m_2} \left(\hat{g}^{jl}_{m_1}\right)^{\pm}(k,k')\delta^{ll'} \cdot (\beta_{m_1})_l(\beta_{m_2})_j \cdot \tilde{P}\begin{Bmatrix} m_1,\, m_2 \\ l,\, j \end{Bmatrix}(\boldsymbol{r}) \quad (42)$$

и обладает свойствами

$$L_0^{\pm}(k,\bar{\boldsymbol{r}}) = i\,\mathrm{Im}\left(L_0^{\pm}(k,\bar{\boldsymbol{r}})\right), \quad L_0^{+}(k,\bar{\boldsymbol{r}}) = -L_0^{-}(k,\bar{\boldsymbol{r}}). \quad (43)$$

Таким образом, из (31)–(43) имеем

$$\sum_{k,k'} q^+_{k'} q_k \int \left(D_n^{-}(k,k') \cdot e^{-}_{k,k'} + D_n^{+}(k,k') \cdot e^{+}_{k,k'}\right) d\boldsymbol{r} =$$
$$= 2iV \sum_k \mathrm{Im}\left(L_0^{-}(k,\bar{\boldsymbol{r}})\right) q^+_k q_k. \quad (44)$$

Подстановка формулы (17) в выражение для энергии (31) с учетом равенств (40), (42), (43) окончательно приводит к следующим соотношениям, полностью определяющим «поверхностный» спектр системы в рассматриваемом нулевом приближении по спин-спиновому взаимодействию:

$$\mathrm{Im}(\Delta E_{s_2}) = \left(\frac{\alpha^2 AV}{I_0^2 d^2}\right) \sum \lambda_n(k,\bar{\boldsymbol{r}}), \quad (45a)$$

$$\Delta E_{s_2} = i\,\mathrm{Im}(\Delta E_{s_2}). \quad (45b)$$

Как видно из (45a), функция $\lambda_n(k,\bar{\boldsymbol{r}})$, равная

$$V\lambda_n(k,\bar{\boldsymbol{r}}) = 2 \cdot Im\left(L_0^{-}(k,\bar{\boldsymbol{r}})\right) - \int \mathrm{Im}\left(D_n^{+}(k,k')\right) d\boldsymbol{r}, \quad (46)$$

задает закон дисперсии, который в развернутом виде представляется следующим уравнением (при выборе нормировочной константы $\alpha = (2\mu I_0/V)^{1/2}$, где $\mu = ge\hbar/2mc = g\mu_B$ есть проекция на ось z спинового магнитного момента атомного носителя намагниченности с магнитомеханическим отношением g и спиновым квантовым числом s):

$$B^{-1}\omega_{s2}(k) = \sum_{m_1,m_2} \left|g^{jl}_{m_1}(k,k)\right| \delta^{ll'} \cdot \tilde{F}\begin{Bmatrix} m_1,\, m_2 \\ l,\, j \end{Bmatrix}(\boldsymbol{r}) \quad (47)$$

с «поверхностными» функциями

$$\tilde{F}\begin{Bmatrix} m_1,\, m_2 \\ l,\, j \end{Bmatrix}(\boldsymbol{r}) = 2\tilde{P}\begin{Bmatrix} m_1,\, m_2 \\ l,\, j \end{Bmatrix}(\boldsymbol{r}) - \tilde{S}\begin{Bmatrix} m_1,\, m_2 \\ l,\, j \end{Bmatrix}(\boldsymbol{r}), \quad (48a)$$

$$\tilde{S}\begin{Bmatrix} m_1,\, m_2 \\ l,\, j \end{Bmatrix}(\bar{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{V}\int_V r_l^{m_1} r_j^{m_2}\, d\boldsymbol{r} \quad (48b)$$

и константой $B = 2dA/\hbar$. Используя выражения (45a), (45b), можно записать и общий спектр элементарных спиновых возбуждений системы в отсутствие взаимодействия, дополненного «поверхностным» спектром спиновых волн:

$$\Delta E_s = \sum \left(\frac{4\mu A}{I_0 d}k^2 + \mu h + i\frac{4\mu A}{I_0 d}\lambda_n(k,\bar{\boldsymbol{r}})\right) q^+_k q_k. \quad (49)$$

В выражении (49) первая часть суммы является блоховским спиновым спектром ферромагнетика (точнее ферромагнитного диэлектрика) во внешнем магнитном поле, с квадратичной по квазиимпульсу k дисперсией.

Заключение

Отметим некоторые основные особенности полученного спектра ферромагнетика. Прежде всего, заметим, что изменение обменной энергии (3), возникающее в результате дополнительного подмагничивающего воздействия поверхности системы, как следует из (45b), является чисто мнимой величиной. Такой результат расчетов может быть обусловлен исключительно действием собственно самой поверхности на спиновые возбуждения системы. Иначе говоря, одно лишь непосредственное наличие поверхности, без указания дополнительных условий относительно характера квазичастичного взаимодействия, уже приводит к ограничению во времени жизни спиновых возбуждений. Это тем более так, ибо другой фактор, ограничивающий времена жизни элементарных возбуждений, связанный с наличием взаимодействия между ними, как было неоднократно указанно выше, в данных расчетах не учтен. Главной

задачей являлось нахождение основных спектральных соотношений, лежащих в основе классической теории при учете в ней только геометрии ограничивающей поверхности, с возможным дальнейшим обобщением на более сложные случаи учета взаимодействия. Вероятно, именно при учете этого взаимодействия следует ожидать, как перенормировки во времени «поверхностной» релаксации спиновых волн, так и возникновения в «поверхностном» спектре вещественной составляющей вследствие неизбежного влияния виртуальных спин-спиновых взаимодействий.

Во-вторых, закон дисперсии, задаваемый функцией (46), является в целом линейной функцией квазиимпульса, что непосредственно явствует из формулы (35) для диагонального случая. Интересно отметить, что в недиагональном случае выражение (35) является квадратичной функцией квазиимпульса, как и блоховская дисперсия. Однако в процессе диагонализации это свойство оказывается утерянным. Последнее является результатом зависимости полной энергии системы от пространственной симметрии волновых функций системы [5]. Поэтому следует предположить, что в областях кристалла с существенным влиянием поверхности происходит отклонение симметрии волновых функций системы от исходной пространственной симметрии. Нарушение волновой симметрии кристалла, обусловленное изменением характера обменного взаимодействия атомов в приповерхностной области, приводит, вероятно, к ослаблению влияния дисперсии решетки на дисперсию спиновых волн в нормальных направлениях к поверхности системы и сводит квазиимпульсную зависимость спиновой частоты системы к линейной. Такой результат, вообще говоря, закономерен. Например, еще Портис [7, 9], полагая, что намагниченность уменьшается по параболическому закону от центра пленки, получил, что расстояние между низколежащими спин-волновыми модами для быстро осажденных окисленных пленок должно изменяться линейно, а не квадратично. Однако в отличие от нашего случая, где кроме неоднородности намагниченности по кристаллу никак не учитывается распределение в нем окислов, Портис предположил, что изменение намагниченности этих пленок обусловлено включениями окислов, относительное число которых увеличивается по мере приближения к поверхности. Помимо этого линейная зависимость «поверхностной» дисперсии имеет ту особенность, что она задается покомпонентно, тогда как в обычном случае выражается через модуль квазиимпульса.

Список литературы

1. *Катанин А.А., Ирхин В.Ю.* // УФН. 2007. **177**, № 6. С. 639.
2. *Шик А.Я., Бакуева Л.Г., Мусихин С.Ф., Рыков С.А.* Физика низкоразмерных систем. СПб., 2001.
3. *Ахиезер А.М., Барьяхтар В.Г., Пелетнинский С.В.* Спиновые волны. М., 1967.
4. *Туров Е.А., Шавров В.Г.* // ФТТ. 1965. **7**, № 4. С. 217.
5. *Голубицкий М., Гийетин В.* Устойчивость отображения и их особенности. М., 1977. С. 281.
6. *Вонсовский С.В.* Магнетизм микрочастиц. М., 1973. С. 278.
7. *Portis A.M.* // Appl. Phys. Lett. 1963. **2**. P. 69.
8. *Казбеков К.К., Щеликов О.Д., Мусаев Г.М.* // Вестн. Дагестанского гос. ун-та. Махачкала, 2006. С. 12.
9. *Магомедов Ш.А., Нухов А.К., Мусаев Г.М.* // Мат-лы XV Междунар. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов». М., 2008. С. 22.

Accounting for the local surface geometry in the classical theory of spin waves

A. K. Nukhov[a], G. M. Musaev, K. K. Kazbekov

Department of Theoretical and Mathematical Physics, Faculty of Physics, Dagestan State University, Gadjiev str. 43a, Makhachkala 367025, Russia.
E-mail: [a] nukhov1984@mail.ru.

The influence of surface energy on the formation of the spin spectrum is considered. The various aspects of the influence of the surface on the energy spectrum of the system related to the features of the structure of the surface itself are shown. The calculation for the spectrum of elementary excitations of the ferromagnetic system, bounded by some surface, adhering to the standard method of the Hamiltonian diagonalization has been made. The relations that completely determine the "surface" spectrum of the zero approximation in the spin–spin interaction are obtained.

Keywords: spectrum of the ferromagnet, surface effects, spin waves.
PACS: 67.80.dk, 75.75.–c.
Received 27 May 2011.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 5(2011).

Сведения об авторах

1. Нухов Азим Кадимович — аспирант; тел.: (928) 557-83-57, e-mail: nukhov1984@mail.ru.
2. Мусаев Гапиз Мусаевич — доктор физ.-мат. наук, зав. кафедрой теор. и матем. физики ДГУ; e-mail: mgm20001942@mail.ru.
3. Казбеков Каирбек Казбекович — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр.; тел.: (928) 553-69-98, e-mail: kairbek74@mail.ru.