ХИМИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, ФИЗИЧЕСКАЯ КИНЕТИКА И ФИЗИКА ПЛАЗМЫ

Законы сохранения для вихря в сжимаемой неравновесной среде

Н. А. Винниченко[a], А. В. Уваров[b], А. И. Осипов[c]

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра молекулярной физики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
E-mail: [a] nickvinn@yandex.ru, [b] uvarov@phys.msu.ru, [c] osipov@phys.msu.ru

Статья поступила 24.02.2011, подписана в печать 28.03.2011

Рассмотрен вопрос о существовании сохраняющихся величин для вихря в сжимаемой релаксирующей среде. Выделение тепла в результате релаксации в неравновесной среде приводит к распространению волн сжатия, уносящих часть вещества. Традиционные интегралы движения в таком случае практически неприменимы. Предложена концепция интегральной величины, сохраняющейся с произвольной точностью для достаточно большой области интегрирования, несмотря на пересечение границы области волнами сжатия. В рамках этой концепции для колоннообразных вихрей в случае осесимметричного воздействия получен широкий класс законов сохранения, включающий циркуляцию и полный момент импульса вихря. Для неосесимметричного случая показано сохранение полного момента импульса и специальным образом определенного интеграла энергии. Проведена численная проверка точности выполнения полученных законов сохранения и рассмотрен вопрос об их практическом использовании в численных расчетах.

Ключевые слова: вихрь, интегралы движения, неравновесный газ.
УДК: 532.527:532.517.43. PACS: 47.32.C–, 47.32.Ef, 47.70.Nd.

Введение

Законы вихревого движения жидкости, в том числе законы сохранения, были получены более ста лет назад в классических работах Гельмгольца и Кельвина. Несмотря на это, многие проблемы, связанные с образованием и динамикой вихрей в различных газодинамических течениях, остаются нерешенными до сих пор. Даже в приближении несжимаемой жидкости, которое использовалось при построении классической теории вихрей, существуют трудности с определением интегралов движения, связанные с расходимостью интегралов. Действительно, для вихрей с не слишком быстро убывающей угловой компонентой скорости, например вихрей Рэнкина или Ламба–Озина, имеющих асимптотику угловой компоненты скорости $v_\varphi \sim 1/r$, где r — расстояние до центра вихря, традиционные интегралы движения, такие как кинетическая энергия $\int \frac{\rho v^2}{2}\, dV$ (ρ — плотность, $\boldsymbol{v}$ — скорость) или импульс $\int \rho \boldsymbol{v}\, dV$, очевидным образом расходятся. Эта проблема хорошо известна [1], и для несжимаемой жидкости разработан ряд способов улучшить сходимость интегралов. Например, Ламб [2] предложил вместо импульса $\int \rho v\, dV$ использовать вихревой импульс $\frac{1}{2}\int \rho \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\omega}\, dV$, представляющий часть импульса, связанную с пространственным распределением завихренности $\boldsymbol{\omega}$. В книге Бэтчелора [3] приведен аналогичный метод нормировки кинетической энергии, в том числе и для двумерных течений. Более полно вопрос о вихревых интегралах движения в идеальной несжимаемой жидкости изложен в монографии Сэффмэна [4].

Дополнительные трудности с определением законов сохранения возникают в случае сжимаемой жидкости. Как показано в работах [5, 6], выделение тепла в неравновесной среде приводит к повышению давления в области энерговыделения, нарушению баланса между центробежной силой и радиальным градиентом давления в вихре и образованию волн сжатия, перераспределяющих вещество в вихре. Распространяясь по направлению от района энерговыделения, эти волны быстро покидают рассматриваемую область, унося часть вещества. Таким образом, если брать конечную область интегрирования, то масса газа в вихре, а также связанные с ней традиционные интегралы движения, такие как полная энергия $E = \int (c_p \rho T - p + \rho\varepsilon + \rho v^2/2)\, dV$, где ε — энергия внутренних степеней свободы, T — температура, p — давление, c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении, не сохраняются. Один из возможных вариантов решения этой проблемы — рассматривать область интегрирования, расширяющуюся с течением времени так, чтобы фронт уходящей волны всегда оставался внутри. Такой подход реализуется в задаче о точечном взрыве, но он имеет существенный недостаток: законы сохранения часто используются для проверки точности численного моделирования, и интегралы в этом случае желательно брать по конечной области. В настоящей работе предложен альтернативный подход, позволяющий сохранить достаточно широкий класс интегралов движения, несмотря на вынос вещества за пределы области интегрирования волнами сжатия.

Следует отметить, что для вихрей в сжимаемой жидкости существование интегралов движения практически не исследовалось. Можно упомянуть лишь обобщение выражения для вихревого импульса на случай неоднородной по плотности несжимаемой жидкости в [7] и работу [8], в которой часть полученных ниже интегралов движения были выведены для неоднородной по плотности несжимаемой и для баротропной жидкости. К сожалению, приближение баротропной

жидкости, хотя и значительно упрощает ситуацию с математической точки зрения, имеет довольно узкую область применимости: физические эффекты, как правило, связаны с выделением тепла, и чаще бывает можно пренебречь изменением давления (приближение Буссинеска), нежели изменением температуры. При рассмотрении эволюции вихрей в неравновесном газе, как было показано в [5, 6], необходимо использовать полную систему уравнений для сжимаемой жидкости с учетом энергии внутренних степеней свободы. Для определенности, именно эта система будет рассмотрена в настоящей работе, хотя предлагаемый подход имеет общий характер и может быть применен в других задачах, в которых в области вихревого движения жидкости или газа происходит мгновенное или непрерывное выделение энергии из дополнительных источников. Примером могут служить вихри в химически реагирующих средах, а также проблема усиления тропических циклонов, в которой роль источника энергии играет конденсация водяного пара.

Критерий для асимптотического выполнения закона сохранения

Будем предполагать, что течение неравновесного газа подчиняется системе уравнений газовой динамики с учетом релаксации внутренних степеней свободы, но без учета вязкости и теплопроводности:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v})=0,\\
&\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=-\operatorname{grad}p,\\
&c_p\rho\frac{dT}{dt}-\frac{dp}{dt}=\rho\frac{\varepsilon-\varepsilon_{\mathrm{eq}}(T)}{\tau(T)},\\
&\frac{d\varepsilon}{dt}=-\frac{\varepsilon-\varepsilon_{\mathrm{eq}}(T)}{\tau(T)},\\
&\rho=\frac{p\mu}{RT},
\end{aligned}\tag{1}$$

где μ — молярная масса газа, R — газовая постоянная, τ — время релаксации, $\varepsilon_{\mathrm{eq}}(T)$ — равновесное значение энергии внутренних степеней свободы при температуре T, $d/dt=\partial/\partial t+(\boldsymbol{v}\nabla)$. Учет диссипативных процессов привел бы к постепенному затуханию вихря и уменьшению его циркуляции, полного момента импульса и других интегральных характеристик. Кроме того, в [6] было показано, что перестройка вихря в результате выделения тепла происходит гораздо быстрее, чем вязкая диссипация вихря. Поэтому мы ограничимся рассмотрением вопроса о существовании сохраняющихся величин для вихря в невязкой среде.

Пусть в пространстве задан стационарный колоннообразный вихрь: $v_r=v_z=0$, $v_\varphi=v_\varphi(r)$, $p=p(r)$, $T=T(r)$, $\rho=\rho(r)$, $\partial p/\partial r=\rho v_\varphi^2/r$, $p=R\rho T/\mu$, где r, φ — координаты полярной системы координат в плоскости сечения вихря. Возбуждение внутренних степеней свободы в области вихря приводит [5, 6] к постепенному переходу вложенной энергии из внутренних степеней свободы в тепло, образованию волн сжатия и перераспределению вещества в вихре. Поскольку часть вещества уносится волнами за пределы любой конечной области интегрирования, законы сохранения для циркуляции вихря, его полного момента импульса и энергии не выполняются в точности. Однако они могут выполняться асимптотически: если интеграл $\iint Ar\,dr\,d\varphi$ в процессе перестройки вихря меняется на величину, стремящуюся к нулю при увеличении радиуса области, по которой производится интегрирование, будем говорить, что величина A (ею может быть плотность, завихренность или какая-либо их функция) сохраняется асимптотически. Рассмотрим, каким требованиям должна удовлетворять величина A, чтобы асимптотический закон сохранения имел смысл (сходимость интеграла) и выполнялся при динамике вихря. Потребуем, чтобы выполнялись три условия.

1. Сам закон сохранения в дифференциальной форме

$$\frac{dA}{dt}+A\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0.\tag{2}$$

Если A — плотность, то уравнение (1) переходит в уравнение непрерывности, выражающее сохранение массы. Поскольку из-за волны, уносящей массу, масса в конечной области не сохраняется, $A=\rho$ запрещают остальные условия.

2. Произведение потока через границу области интегрирования на время распространения волны до границы области должно стремиться к нулю при $R_{\mathrm{int}}\to\infty$, где R_{int} — радиус области интегрирования. Для осесимметричного возбуждения внутренних степеней свободы, не зависящего от координаты вдоль оси вихря, это условие запишется как

$$\begin{aligned}
N(R_{\mathrm{int}})\Delta t&=R_{\mathrm{int}}\Delta t\int Av_r\,d\varphi=\\
&=2\pi A(R_{\mathrm{int}})v_r(R_{\mathrm{int}})R_{\mathrm{int}}\Delta t\to 0\quad\text{при}\quad R_{\mathrm{int}}\to\infty.
\end{aligned}\tag{3}$$

То есть величина $A(r)$ (или $A(r,\varphi)$ в неосесимметричном случае) должна достаточно быстро убывать при $r\to\infty$. Это условие необходимо, чтобы прохождение волны через границу области интегрирования не нарушало закон сохранения. Считая скорость распространения волны постоянной, $\Delta t\sim R_{\mathrm{int}}$, значит, для $A=\rho$, учитывая, что в цилиндрической волне $v_r\sim r^{-1/2}$, это условие не выполнено.

3. Сам интеграл $\iint Ar\,dr\,d\varphi=2\pi\int\limits_0^{R_{\mathrm{int}}}A(r)r\,dr$ должен сходиться, иначе закон сохранения не имеет смысла. Это означает, что величина $A(r)$ убывает быстрее, чем r^{-2}. Таким образом, это условие оказывается более строгим, чем условие (3), которое требует убывания быстрее $r^{-3/2}$.

Если эти три условия выполнены, то можно проинтегрировать уравнение (2) по площади и получить

$$\frac{\partial}{\partial t}\iint Ar\,dr\,d\varphi=-N(R_{\mathrm{int}}).\tag{4}$$

Так как величина $A(r)$ убывает достаточно быстро (выполнены второе и третье условия), изменение интеграла $\iint Ar\,dr\,d\varphi$ стремится к нулю при $R_{\mathrm{int}}\to\infty$. Таким образом, всегда можно выбрать радиус области интегрирования так, чтобы закон сохранения был выполнен с любой наперед заданной точностью.

Законы сохранения в осесимметричном случае

Все вышеприведенное построение лишено смысла без конкретных величин A, которые удовлетворяли бы всем трем условиям. Поскольку второе и третье условия касаются лишь асимптотики $A(r)$, можно искать A как решение уравнения (2), достаточно быстро убывающее при $r \to \infty$. Можно заметить, что любая величина A вида

$$A = a \cdot F(b_1, b_2, \ldots), \tag{5}$$

где a — решение уравнения (2), F — произвольная функция, а b_i — величины с нулевой полной производной по времени ($db_i/dt \equiv 0$), сама будет являться решением уравнения (2). Справедливость этого утверждения легко проверить прямой подстановкой выражения (5) в уравнение (2):

$$\frac{dA}{dt} + A \operatorname{div} \boldsymbol{v} = \frac{da}{dt}F + a \sum_i \frac{\partial F}{\partial b_i}\frac{db_i}{dt} + aF \operatorname{div} \boldsymbol{v} = \\ = F\left(\frac{da}{dt} + a \operatorname{div} \boldsymbol{v}\right) = 0.$$

Поиск величин A сводится, таким образом, к поиску подходящих a и b_i (могут существовать и другие решения уравнения (2), не представимые в виде (5)). Преимущество поиска a над поиском A заключается в том, что величина A должна удовлетворять второму и третьему требованиям, а на величины a такое ограничение не накладывается: выполнение требований можно обеспечить путем выбора функции F. Одна величина a уже упоминалась — это плотность, которая удовлетворяет уравнению непрерывности. Второй величиной при осесимметричном течении (зависимость всех величин только от r и t) является завихренность $\boldsymbol{\omega}$, которая удовлетворяет уравнению Фридмана

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} - (\boldsymbol{\omega}\nabla)\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega} \operatorname{div} \boldsymbol{v} = \frac{1}{\rho^2}[\operatorname{grad}\rho \times \operatorname{grad} p],$$

которое в осесимметричном случае принимает вид

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0,$$

поскольку завихренность в этом случае имеет единственную ненулевую компоненту $\omega_z = \omega$, а градиенты плотности и давления коллинеарны. Нулевую полную производную по времени в осесимметричном случае имеют (и следовательно, подходят в качестве b_i) $b_1 = \boldsymbol{\omega}/\rho$ и $b_2 = rv_\varphi$. Действительно, из уравнений Фридмана и непрерывности следует, что

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho}\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} - \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\operatorname{div}\boldsymbol{v} - \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt} = \\ = -\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho^2}\left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}\boldsymbol{v}\right) = 0,$$

а из азимутальной компоненты уравнения движения — что

$$\frac{d}{dt}(rv_\varphi) = r\frac{dv_\varphi}{dt} + v_r v_\varphi = -v_r v_\varphi + v_r v_\varphi = 0.$$

Заметим, что последнее равенство справедливо и в случае зависимости параметров течения от r, z и t при учете конечной протяженности зоны возбуждения вдоль оси вихря. В равновесном газе появляется еще одна величина b_i, а именно энтропия, удовлетворяющая уравнению энергии для идеальной жидкости $ds/dt = 0$. Таким образом, мы получаем следующие две ветви величин A для осесимметричных вихрей в неравновесном газе:

$$A_1 = \rho F_1(\omega/\rho, rv_\varphi), \quad A_2 = \omega F_2(\omega/\rho, rv_\varphi), \tag{6}$$

где F_1 и F_2 — произвольные функции. Поскольку уравнение (2) линейно относительно A и однородно, его решениями являются также любые линейные комбинации величин A_1 и A_2. Любая из них, убывающая при $r \to \infty$ быстрее, чем r^{-2}, приводит к закону сохранения для $\iint Ar\,dr\,d\varphi$, выполняющемуся с любой наперед заданной точностью (при соответствующем выборе радиуса зоны интегрирования R_{int}). В частности, при эволюции вихря в неравновесной среде в случае осесимметричного возбуждения сохраняются полный момент импульса $2\pi\int \rho v_\varphi r^2\,dr$ $(A = \rho \cdot rv_\varphi)$ для всех вихрей с $v_\varphi(r)$, убывающей быстрее r^{-3}, и циркуляция $2\pi\int \omega r\,dr$ $(A = \omega)$ для всех вихрей с $v_\varphi(r)$, убывающей быстрее r^{-1}. Для вихрей с более пологим профилем $v_\varphi(r)$ эти величины просто не имеют смысла, так как интегралы расходятся.

Заметим, что полученные законы сохранения справедливы для любого осесимметричного неравновесного или теплового воздействия, при котором не изменяются уравнения непрерывности и движения. Справедливость законов сохранения для полного момента импульса и циркуляции проверялась с помощью численного моделирования методом Годунова второго порядка точности. При $R_{\text{int}} = 25 \cdot R_{\text{vor}}$, где R_{vor} — радиус вихря, начальное и конечное значения интегралов отличались менее чем на 0.5% при том, что максимальное изменение v_φ составляло примерно 14%.

В случае зависимости величин от z, остаются справедливыми законы сохранения для величин $A_1 = \rho F_1(rv_\varphi)$. В равновесном газе к числу аргументов функций F_1 и F_2 можно добавить энтропию s. При неосесимметричном воздействии геометрическая симметрия задачи, обеспечивавшая выполнение необходимых условий для некоторых величин a и b_i, нарушается, однако можно показать, что полный момент импульса $\iint \rho v_\varphi r^2\,dr\,d\varphi$ все равно сохраняется. Этому посвящен следующий раздел.

Неосесимметричное воздействие: сохранение полного момента импульса

Если задача не осесимметрична, и параметры течения зависят от φ, $d(rv_\varphi)/dt = -(1/\rho)(dp/d\varphi) \neq 0$. Соответственно для $A = \rho \cdot rv_\varphi$ вместо уравнения (2) имеем

$$\frac{d(\rho \cdot rv_\varphi)}{dt} + \rho \cdot rv_\varphi \operatorname{div}\boldsymbol{v} = -\frac{\partial p}{\partial \varphi}.$$

Заметим, что для справедливости закона сохранения не обязательно, чтобы уравнение (2) было выполнено в каждой точке. Достаточно, чтобы интеграл по площади от правой части был равен нулю или хотя бы стремился к нулю при $R_{\text{int}} \to \infty$. Тогда изменение интеграла $\iint Ar\,dr\,d\varphi$ будет стремиться к нулю при $R_{\text{int}} \to \infty$. Действительно, вместо (4) имеем $\frac{\partial}{\partial t}\iint Ar\,dr\,d\varphi = -N(R_{\text{int}}) + \iint \text{RHS}\,r\,dr\,d\varphi$, где RHS —

правая часть уравнения (2) в неосесимметричном случае. Для полного момента импульса $\mathrm{RHS} = -\partial p/\partial\varphi$, и поскольку $p(r,\varphi)$ является периодической функцией φ, интеграл от правой части $\iint \mathrm{RHS}\, r\, dr\, d\varphi$ равен нулю. Таким образом, можно заключить, что и при неосесимметричном воздействии сложный процесс изменения параметров вихря, включающий распространение волны сжатия, образование спирали нагретого газа и падение горячего газа на центр вихря [6], не меняет полный момент импульса вихря, если не учитывать диссипативные процессы. Вихрь не исчезает даже при очень сильном воздействии: несмотря на то, что волна уносит часть массы, момент импульса должен сохраниться, поэтому происходит лишь небольшое изменение угловой скорости.

Интеграл энергии

Система интегралов движения (6) имеет один существенный недостаток: в ней нет ни одной величины, связанной с запасом энергии во внутренних степенях свободы. Таким образом, система (6) показывает, какие величины остаются неизменными при любой величине воздействия, но не описывает зависимость величины изменений от величины воздействия. Конечное состояние вихря зависит не только от начальных распределений скорости и плотности, но и от того, какая энергия была вложена во внутренние степени свободы. Поэтому, чтобы определить параметры этого конечного состояния, необходимо построить закон сохранения для какой-либо величины, связанной с поступательной температурой и энергией внутренних степеней свободы. Вполне логично, что такой величиной может являться некоторая энергия. Полная энергия $e = c_p\rho T - p + \rho\varepsilon + \rho v^2/2$ не сохраняется, поскольку волна сжатия, вызванная релаксацией энергии внутренних степеней свободы, уносит часть вещества, а следовательно, и внутреннюю энергию, которой это вещество обладало. Получить закон сохранения можно, если взять в качестве величины A не e, а $A_e = e - c_p\rho T_\infty + p_\infty - \rho\varepsilon_{\mathrm{eq}}(T_\infty)$, где p_∞ и T_∞ — давление и температура в невозмущенной среде. Убедимся в том, что эта величина удовлетворяет всем трем требованиям. Прежде всего,

$$\frac{dA_e}{dt} + A_e \operatorname{div}\boldsymbol{v} =$$
$$= \frac{de}{dt} + e\operatorname{div}\boldsymbol{v} + p_\infty \operatorname{div}\boldsymbol{v} - \left(c_p T_\infty + \varepsilon_{\mathrm{eq}}(T_\infty)\right)\left(\frac{d\rho}{dt} + \rho\operatorname{div}\boldsymbol{v}\right) =$$
$$= \frac{de}{dt} + e\operatorname{div}\boldsymbol{v} + p_\infty \operatorname{div}\boldsymbol{v}.$$

Из уравнения энергии (без учета диссипативных процессов) $\partial e/\partial t + \operatorname{div}(v(e+p)) = 0$ следует, что $de/dt + e\operatorname{div}\boldsymbol{v} = -\operatorname{div}(p\boldsymbol{v})$. Таким образом, правая часть уравнения (2) для A_e равна $-\operatorname{div}((p-p_\infty)\boldsymbol{v})$. Интеграл по площади от правой части равен $-\iint\limits_S \operatorname{div}((p-p_\infty)\boldsymbol{v})\, dS = -\oint\limits_{\partial S} (p-p_\infty)v_r\, dl$. В осесимметричном случае интеграл по контуру (окружности, ограничивающей область интегрирования) легко берется: $-2\pi R_{\mathrm{int}}(p(R_{\mathrm{int}}) - p_\infty)v_r(R_{\mathrm{int}})$. Остается показать, что полученное выражение стремится к нулю при $R_{\mathrm{int}} \to \infty$. Простой оценки для цилиндрической волны $v_r \sim 1/\sqrt{r}$ недостаточно, поэтому обратимся к известной задаче, имеющей много общего с эволюцией вихря при возбуждении внутренних степеней свободы, а именно к задаче о точечном взрыве. Фактически задача об изменении параметров вихря в результате релаксации начального возбуждения — это обобщение задачи о точечном взрыве, в котором, во-первых, учитывается вращение среды (сам вихрь), а во-вторых, выделение энергии может происходить постепенно по мере релаксации возбуждения. В остальном эти задачи схожи: в определенной точке происходит энерговыделение (сейчас нас интересует только асимптотика решения при $r \to \infty$, поэтому энерговыделение можно считать точечным), в результате образуется волна, которая уносит часть массы, оставляя в центре область нагретого легкого газа. Поскольку результаты численного моделирования, а также аналитические решения [6] показывают, что вращение не оказывает заметного влияния на радиальное распространение волны, то для оценки скорости убывания $(p(R_{\mathrm{int}}) - p_\infty)$ и $v_r(R_{\mathrm{int}})$ при $R_{\mathrm{int}} \to \infty$ можно воспользоваться известной асимптотикой для решения задачи о цилиндрическом точечном взрыве [9]: $v_r(r)$, $(p(r) - p_\infty) \sim r^{-3/4}$ для взрыва с учетом противодавления или $v_r(r)$, $(p(r) - p_\infty) \sim 1/r$ в приближении сильного взрыва. Более слабой (и более точной при $r \to \infty$) оценки для взрыва с учетом противодавления вполне достаточно: $R_{\mathrm{int}}(p(R_{\mathrm{int}}) - p_\infty)v_r(R_{\mathrm{int}}) \sim R_{\mathrm{int}}^{-1/2}$, следовательно, интеграл от правой части уравнения для A_e, аналогичного (2), стремится к нулю при увеличении радиуса области интегрирования, и закон сохранения будет (асимптотически) выполнен, если $A_e(r)$ убывает быстрее $1/r^2$. Чтобы выяснить, какие требования это накладывает на исходный вихрь и на радиальный профиль возбуждения, представим A_e в виде

$$A_e(r) = c_p\rho(r)(T(r) - T_\infty) - (p(r) - p_\infty) +$$
$$+ \rho(\varepsilon(r) - \varepsilon_{\mathrm{eq}}(T_\infty)) + \rho(r)v^2(r)/2.$$

Оценка асимптотики этих слагаемых в начальном состоянии вихря показывает, что $A_e(r)$ убывает быстрее $1/r^2$, если $v_\varphi(r)$ убывает быстрее $1/r$ и величина возбуждения $T_i(r) - T_\infty$ (где T_i — температура внутренних степеней свободы) убывает быстрее $1/r^2$. То есть для моделей вихря с более крутым профилем угловой скорости, чем у вихря Рэнкина, и для достаточно локального возбуждения можно построить сходящийся интеграл энергии, сохраняющийся при том, что часть вещества (и часть полной энергии e) волна уносит за пределы конечной области интегрирования. Поскольку при выводе интеграла энергии использовались уравнения гидродинамики в векторной форме, все вышесказанное справедливо и для неосесимметричного возбуждения. Таким образом, в неосесимметричном случае существуют по крайней мере два закона сохранения: сохранение полного момента импульса и сохранение энергии A_e.

Выводы

Выделение энергии в результате релаксации внутренних степеней свободы молекул или действия другого источника энергии приводит к изменениям параметров

колоннообразного вихря. Нарушается баланс между радиальным градиентом давления в вихре и центробежной силой. Образуется волна сжатия, которая уносит часть вещества, создающую избыточное давление, по направлению от оси вихря. Из-за выноса волной части вещества за пределы любой конечной области интегрирования традиционные законы сохранения для конечной области не выполнены. Тем не менее можно сформулировать критерий, обеспечивающий асимптотическое выполнение закона сохранения: изменение соответствующего интеграла движения в процессе эволюции вихря стремится к нулю при увеличении радиуса области интегрирования. Такой подход, в отличие от постоянного расширения области интегрирования по мере распространения волны, позволяет получить законы сохранения, выполняющиеся с заданной точностью для конечной области интегрирования, и проверить с их помощью точность численного моделирования в эйлеровых координатах. Пространственная симметрия задачи в случае начального возбуждения внутренних степеней свободы в осесимметричной области, концентрической с вихрем, позволяет найти широкий класс сохраняющихся величин, включающий циркуляцию и полный момент импульса вихря. Показано, что полный момент импульса сохраняется и в случае неосесимметричного возбуждения. Несмотря на то что волна уносит часть вещества, обладающую определенной тепловой энергией, можно ввести специальным образом нормированный интеграл энергии, который сохраняется как в осесимметричном, так и в неосесимметричном случае. С помощью интегралов энергии и полного момента импульса, а также условия стационарности вихря, можно найти характеристики конечного состояния вихря, не описывая процесс перехода, который может быть достаточно сложным. В дальнейшем на основе предложенного критерия могут быть получены законы сохранения для более сложных вихревых течений, обладающих определенной симметрией, например для закрученного течения в трубе.

Работиа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант 09-01-00748-а).

Список литературы

1. *Алексеенко С.В., Куйбин П.А., Окулов В.Л.* Введение в теорию концентрированных вихрей. М.; Ижевск, 2005.
2. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.; Л., 1947.
3. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М., 1973.
4. *Сэффмэн Ф.Дж.* Динамика вихрей. М., 2000.
5. *Винниченко Н.А., Осипов А.И., Уваров А.В.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2009. № 3. С. 77.
6. *Винниченко Н.А., Уваров А.В., Осипов А.И.* // ТВТ. 2010. № 1 (дополнительный). С. 147.
7. *Владимиров В.А.* // Журн. прикл. мех. и техн. физ. 1977. № 6. С. 72.
8. *Захаров В.Е.* // Функциональный анализ и его приложения. 1989. **23**, № 3. С. 24.
9. *Коробейников В.П., Мельникова Н.С., Рязанов Е.В.* Теория точечного взрыва. М., 1961.

Conservation laws for a vortex in compressible nonequilibrium medium

N. A. Vinnichenko[a], **A. V. Uvarov**[b], **A. I. Osipov**[c]

Department of Molecular Physics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.
E-mail: [a] *nickvinn@yandex.ru,* [b] *uvarov@phys.msu.ru,* [c] *osipov@phys.msu.ru.*

The problem of conserving quantities existence is considered for a vortex in relaxing compressible medium. Heat release due to relaxation of nonequilibrium medium leads to propagation of compression waves which take material away. Traditional integrals of motion are inapplicable in this case. We propose the concept of integral quantity which is conserved with arbitrary degree of accuracy despite the wave crossing the boundary of integration domain. Based on this concept, a broad class of conservation laws is derived for axisymmetric disturbances of columnar vortices including conservation of circulation and total angular momentum of the vortex. For nonaxisymmetric disturbances it is shown that the total angular momentum and properly defined energy integral are conserved. Numerical verification of the derived conservation laws is performed and perspectives of using these conservation laws in numerical simulations are discussed.

Keywords: vortex, conservation laws, nonequilibrium gas.
PACS: 47.32.C–, 47.32.Ef, 47.70.Nd.
Received 24 February 2011.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 5(2011).

Сведения об авторах

1. Винниченко Николай Аркадьевич — канд. физ.-мат. наук, науч. сотр.; тел.: (495) 939-27-41, e-mail: nickvinn@yandex.ru.
2. Уваров Александр Викторович — докт. физ.-мат. наук, профессор, профессор; тел.: (495) 939-26-94, e-mail: uvarov@phys.msu.ru.
3. Осипов Алексей Иосифович — докт. физ.-мат. наук, профессор, профессор; тел.: (495) 939-26-94, e-mail: osipov@phys.msu.ru.