

Модель для расчета траекторий движения электронов в водной среде, помещенной в магнитное поле

А. В. Белоусов^а, А. С. Наместников^б, А. П. Черняев^с

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра физики ускорителей и радиационной медицины. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

E-mail: ^аbelousalex@rambler.ru, ^бgrinlife.a@gmail.com, ^сchernyaevopk@msu.ru

Статья поступила 03.10.2010, подписана в печать 31.05.2011

Рассматривается возможность применения достаточно простой полуаналитической модели для построения и исследования траекторий электронов в водной среде в поперечном магнитном поле. Рассматриваются энергии электронов, применяемых в медицинских ускорителях электронов — до 30 МэВ, величина индукции магнитного поля — до 3 Тл. Полученные данные сравниваются с работами сторонних авторов, в которых для моделирования использовался метод Монте-Карло, а также с экспериментальными данными.

Ключевые слова: траектории электронов, поперечное магнитное поле, распространение электронов в среде.
УДК: 53.098. PACS: 34.10.+x.

Введение

В последнее время актуальным вопросом стало исследование возможности применения магнитного поля для формирования дозных полей. Для исследования поведения фотонов и электронов в среде в магнитном поле используются экспериментальные методы, а также метод моделирования Монте-Карло.

К настоящему времени выполнено большое количество исследований, показавших принципиальную возможность использования магнитного поля для изменения дозных распределений пучков фотонов и электронов [1–3]. Предложены две методики использования магнитного поля: продольные магнитные поля для улучшения продольного распределения области полутени и уменьшения влияния неоднородностей; поперечные поля для уменьшения области полутени в продольном направлении.

Ниже приводится обзор двух работ, данные которых сопоставляются с полученными результатами. В работе [4] осуществлялось моделирование методом Монте-Карло для изучения характеристик пучков электронов, полученных на медицинских ускорителях с энергией до 20 МэВ в присутствии поперечного магнитного поля величиной 1.5 и 3 Тл. Целью работы являлось изучение возможности применения магнитного поля для модулированной электронной радиационной терапии. Начальная глубина магнитного поля изменялась в пределах нескольких сантиметров — от 1 до 3 см. Было получено, что магнитное поле величиной 1.5 Тл может создавать псевдо-Брегговский пик на глубине порядка 1 см, но при этом данный метод позволяет получать перераспределение дозы в облучаемом объеме. На рис. 1 представлен результат, полученный на пучке электронов с энергией 6 МэВ в поле 1.5 Тл, начинающемся на глубине 1 см [4].

В работе [5] проводилось облучение полистиренового фантома узким (диаметр $d = 1.3$ см) пучком электронов с энергией 28 МэВ. В полистирен были вставлены радиоохромные пленки. Вся система была помещена в поперечное магнитное поле с индукцией 1 Тл.

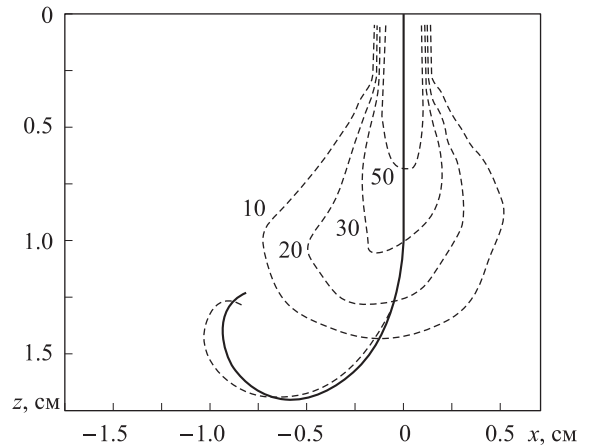


Рис. 1. Траектория электронов с энергией 4 МэВ в поле 1.5 Тл (сплошная линия — работа [4], штриховая — расчет по аналитическим выражениям)

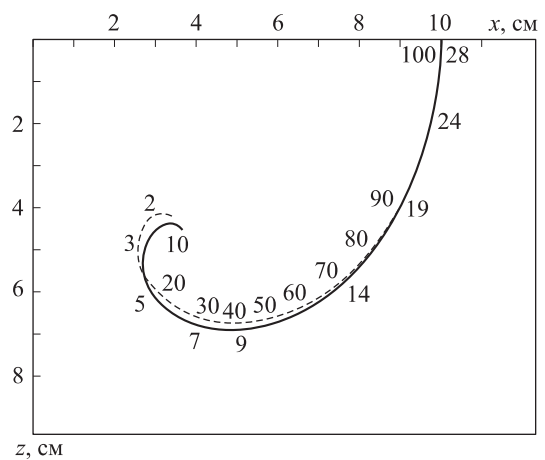


Рис. 2. Траектории электронов с энергией 28 МэВ в поле 1 Тл (сплошная линия — работа [5], штриховая — расчет по аналитическим выражениям)

В работе сравнивалось распределение дозы при наличии магнитного поля и в отсутствие магнитного поля, изучались возможности формирования дозных распределений с помощью магнитного поля. На рис. 2 представлена экспериментальная кривая, показывающая траектории электронов с энергией 28 МэВ в поле величиной 1 Тл. Под кривой значения энергии электронов в данной точке траектории, над кривой это же значение, нормированное на 100% [5].

Аналитические и полуаналитические модели описаны в литературе крайне скудно. Возможность использования аналитических методов обусловлена малостью угла однократного рассеяния, что приводит к существенному упрощению упругой части интеграла столкновений в уравнениях переноса. Представление интеграла столкновений в дифференциальной форме позволило получить ряд решений уравнений переноса в малоугловом приближении [6–8].

В настоящей работе для исследования прохождения электронов через водную среду в поперечном магнитном поле получены полуаналитические выражения, основанные на численном интегрировании аналитических выражений, не использующих экспериментальных данных. Вследствие малости угла отклонения в однократном соударении не исследуется влияние рассеяния электронов, однако сравнение полученных результатов с результатами моделирования показывает, что данное приближение слабо влияет на результат. Использование данных выражений позволяет изучить влияние и закономерности, характеризующие данные процессы, при этом позволяет существенно сократить время расчетов и провести более полные исследования.

1. Используемая модель

1.1. Теоретическое обоснование модели

Уравнение движения частицы с зарядом e и скоростью \mathbf{v} в магнитном поле \mathbf{B} имеет вид

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{e}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] + \mathbf{F}, \quad (1)$$

где c — скорость света, \mathbf{F} — член, учитывающий потери энергии частицы. Здесь следует отметить, что учет изменения направления движения частицы вследствие взаимодействия с атомами среды в настоящей работе не ведется. Импульс частицы может быть записан как $\mathbf{p} = m\mathbf{v}\gamma$, где m — масса покоя частицы, а $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ — гамма-фактор Лоренца.

Пусть s — путь вдоль траектории частицы, тогда $v = ds/dt$, и, переходя от дифференцирования по времени к дифференцированию по координате, уравнение (1) можно записать в виде

$$mv^2 \frac{d\gamma}{ds} \hat{\mathbf{v}} + mv^2 \gamma \frac{d\hat{\mathbf{v}}}{ds} = \frac{e}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] + \mathbf{F}. \quad (2)$$

Здесь $\hat{\mathbf{v}}$ — единичный вектор в направлении движения частицы $\mathbf{v} = v \cdot \hat{\mathbf{v}}$. Первое слагаемое уравнения (2) связано с изменением скорости частицы по модулю, т.е. с изменением ее энергии, а второе с изменением направления движения под действием магнитного поля.

При движении частицы в среде из-за столкновения с атомами и электронами скорость частицы в направле-

нии движения уменьшается. Поскольку кинетическая энергия частицы E связана с полной соотношением $mc^2\gamma = E + mc^2$, то, продифференцировав по s , получаем следующее выражение:

$$\frac{d\gamma}{ds} = \frac{d\left(\frac{E}{mc^2}\right)}{dt} = \frac{1}{mc^2} \frac{dE}{ds} = -\frac{1}{mc^2} S_T(E), \quad (3)$$

где $S_T(E)$ — линейные потери энергии в приближении непрерывного замедления. Уравнение (3) определяет энергию частицы с начальной энергией E_0 как функцию пройденного ею пути s :

$$\int_{E(s)}^{E_0} \frac{dE}{S_T(E)} = s. \quad (4)$$

В данном приближении уравнение (1) принимает вид

$$\sqrt{E(s)[E(s) + 2mc^2]} \frac{d\hat{\mathbf{v}}}{ds} = e[\hat{\mathbf{v}} \times \mathbf{B}],$$

где $E(s)$ определяется из уравнения (4).

Введем сферическую систему координат: ξ — угол между направлением скорости \mathbf{v} и ее проекцией v_{xz} на плоскость xz ; η — угол между проекцией скорости v_{xz} и осью z .

В этой СК единичный вектор в направлении скорости запишется как

$$\hat{\mathbf{v}} = \cos \xi \sin \eta \hat{\mathbf{x}} + \sin \xi \hat{\mathbf{y}} + \cos \xi \cos \eta \hat{\mathbf{z}},$$

где $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$ — единичные векторы в направлении соответствующих осей. Пусть поле направлено вдоль оси y , тогда проекция уравнения (1) на ось y приводит к $\sin \xi = \text{const}$, или

$$\xi = \xi_0,$$

где ξ_0 — начальное значение ξ . Проекция уравнения (1) на оси x и z приводят к следующему соотношению:

$$\sqrt{E(s)[E(s) + 2mc^2]} \frac{d\eta}{ds} = eB, \quad (5)$$

откуда

$$\eta(s) = \eta_0 - eB \int_0^s \frac{ds'}{\sqrt{E(s')[E(s') + 2mc^2]}}.$$

Здесь η_0 — начальное значение величины η . Таким образом, если обозначить начальное положение частицы (x_0, y_0, z_0) , то следующая система задает траекторию:

$$\begin{cases} x(s) = x_0 + \cos \xi_0 \int_0^s \sin \eta(s') ds', \\ y(s) = y_0 + \sin \xi_0 s, \\ z(s) = z_0 + \cos \xi_0 \int_0^s \cos \eta(s') ds'. \end{cases} \quad (6)$$

Будем полагать потери энергии не зависящими от энергии частицы (данное приближение используется очень часто в прикладных исследованиях), тогда энергия частицы линейно убывает с ростом пробега вдоль траектории:

$$E(s) = S_T(R - s),$$

где $S_T = \text{const}$ (2 МэВ/см для воды), R — пробег, вычисленный в приближении непрерывного замедления. Данное приближение справедливо, как следует из формулы Бете–Блоха, при энергии электронов в диапазоне 1–20 МэВ, при более низких энергиях (менее 0.5 МэВ) данное приближение не легитимно, но поскольку пробег таких электронов менее 3 мм, то погрешность в оценке траектории незначительна. При этих предположениях решением уравнения (4) является следующая функция:

$$\eta(s'') = \eta_0 + \frac{qB}{S_T} \times \ln \left[\frac{\sqrt{\varepsilon(\varepsilon + 2)} + \varepsilon + 1}{\sqrt{\varepsilon(1 - s'')[\varepsilon(1 - s'') + 2]} + \varepsilon(1 - s'') + 1} \right],$$

где $s'' = s/R$ и меняется в пределах от 0 до 1; $\varepsilon \equiv S_T R / (mc^2) = E_0 / (mc^2)$. Введем обозначения

$$C(s) = \int_0^s \cos[\eta(s'')] ds'', \quad S(s) = \int_0^s \sin[\eta(s'')] ds''.$$

В этих обозначениях система уравнений (6), описывающая траекторию частицы, преобразуется к виду

$$\begin{cases} x(s) = x_0 + R \cos \xi_0 [\cos \eta_0 S(s/R) + \sin \eta_0 C(s/R)], \\ y(s) = y_0 + \sin \xi_0 s, \\ z(s) = z_0 + R \cos \xi_0 [\cos \eta_0 C(s/R) - \sin \eta_0 S(s/R)]. \end{cases}$$

1.2. Численный расчет

Для численного решения поставленной задачи, в предположении вышеописанной модели, была написана программа, входными данными для которой являются начальная энергия частицы, линейные потери энергии в предположении непрерывного замедления, индукция магнитного поля, углы, ориентирующие направление скорости частицы относительно магнитного поля, и начальные координаты. Программа рассчитывает и выводит на экран и в файл проекции траектории на плоскости xy , yz , xz .

2. Сравнение и анализ результатов

Из сравнения результатов, полученных в работе [4], с результатами, полученными с помощью аналитических выражений, видно, что с ростом энергии расходимость кривых все больше. Для энергий 4 МэВ расходимость не более 2 мм, 8 МэВ — 4 мм, 14 МэВ — уже 6 мм. В процентном соотношении расходимость в конце траектории составляет 20%.

Сравнительный анализ показывает хорошее совпадение результатов на начальных этапах траекторий.

Расхождение в конце траектории связано с начальным рассеянием электронов в среде, без действия магнитного поля. Общий вид траекторий совпадает с хорошей точностью. В общем случае с ростом энергии увеличивается степень расхождения результатов, что связано с возрастанием роли радиационных потерь энергии и многократного рассеяния пучка. Учет радиационного торможения в принципе возможен, но требует разработки нового алгоритма численных расчетов.

При сравнении результатов, полученных в работе [5], с результатами аналитических расчетов видно, что кривая, полученная с помощью аналитических выражений, в достаточной мере согласуется с результатами, полученными при исследовании радиохромных пленок, помещенных в фантом. На экспериментальную кривую наложена теоретическая кривая (рис. 2), рассчитанная по аналитическим выражениям с помощью нашей программы. Как видим, наибольшее расхождение кривых наблюдается в конце траектории, оно составляет 3–4 мм, что в процентном отношении составляет 5%.

Заключение

В ходе выполнения настоящей работы были получены уравнения, описывающие движения электронов в водной среде при наличии поперечного магнитного поля. В предположении постоянных потерь энергии электроном на протяжении движения в водной среде, была создана программа для численного расчета, смоделированы траектории движения электрона с энергиями до 30 МэВ в водной среде при наличии поперечного магнитного поля величиной до 5 Тл. Полученные данные сравнивались с работами [4, 5]. Оказалось, что в заданных диапазонах энергии и индукции магнитного поля возможно применение предположения постоянных потерь, а данные настоящей работы совпадают с данными работ [4, 5]. Таким образом, получен новый метод исследования траекторий движения электронов в водной среде в поперечном магнитном поле, позволяющий сократить время расчетов.

Список литературы

1. Bielajew A.F. / Ed. by T. E. Jenkins et al. N. Y., 1987. P. 421.
2. Bielajew A.F. // Med. Phys. 1993. **20**. P. 1171.
3. Nardi E., Barnea G. // Med. Phys. 1999. **26**. P. 967.
4. Lee M.C., Ma C.-M. // Phys. Med. Biol. 2000. **45**. P. 2947.
5. Whitmire D.P., Bernard D.L., Peterson M.D., Purdy J.A. // Med. Phys. 1977. **4**, N 2. P. 409.
6. Наумов Н.Д. // ЖТФ. 2001. **71**, № 7. С. 83.
7. Наумов Н.Д. // ЖТФ. 2000. **70**, № 10. С. 90.
8. Ремизович В.С., Рогозкин Д.Б., Рязанов М.И. Флуктуации пробегов заряженных частиц. М., 1988.

Model for calculation electron trajectories in the water matter placed in magnetic field**A. V. Belousov^a, A. S. Namestnikov^b, A. P. Chernyaev^c***Department of Accelerator Physics and Radiation Medicine, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.**E-mail: ^abelousalex@rambler.ru, ^bgrinlife.a@gmail.com, ^cchernyaevopk@msu.ru.*

Possibility of application of simple semianalytical expression for electron trajectory in water medium construction at ascendancy transverse magnetic field is examined. Electron energies are examined used in medical accelerator (up to 30 MeV) and magnetic field up to 3 T. Received data are compared to data of other authors, which used Monte Carlo method and experimental data.

Keywords: electron trajectory, transverse magnetic field, passing electron through medium.

PACS: 34.10.+x.

Received 3 October 2010.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 5(2011).

Сведения об авторах

1. Белоусов А.В. — канд. физ.-мат. наук, доцент; тел.: (495) 49-46, e-mail: belousovav@physics.msu.ru.
2. Наместников А.С. — студент; тел.: (495) 939-49-46, e-mail: grinlife.a@gmail.com.
3. Черняев А.П. — докт. физ.-мат. наук, профессор; тел.: (405) 939-38-89, e-mail: chernyaevopk@msu.ru.