

Смешанные конечные элементы для анализа вещественных и комплексных мод цилиндрических волноводов

А. Л. Делицын^a, С. И. Круглов^b

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

E-mail: ^adelitsyn@mail.ru, ^bmsc-sf@yandex.ru

Статья поступила 08.02.2011, подписана в печать 18.07.2011

Рассмотрено применение метода смешанных конечных элементов для анализа дисперсионных кривых цилиндрических волноводов с градиентным заполнением. Приведены результаты тестирования алгоритма и расчетов систем с переменным показателем преломления. Продемонстрировано возникновение комплексных волн в слоистых волноводах.

Ключевые слова: цилиндрические волноводы, комплексные моды, дисперсионные кривые, метод смешанных конечных элементов.

УДК: 517.95. PACS: 41.20.-q.

Введение

Хорошо известно существование комплексных мод в регулярных волноводах с диэлектрическим заполнением [1]. Под комплексными модами понимают моды с комплексным квадратом постоянной распространения в условиях отсутствия потерь в волноводе. Известно, что подобные волны возникают уже в двухслойных волноводах. Следует отметить, что, несмотря на большое количество работ, посвященных непосредственно нахождению подобных мод, законченная математическая теория, описывающая их качественное поведение, в настоящий момент времени отсутствует. Вычисление комплексных постоянных распространений в слоистых волноводах проводилось путем решения дисперсионного уравнения, в монографии [1] приведено большое количество результатов подобных расчетов. Для волноводов с более сложным заполнением возможно применение ряда методов для расчета постоянных распространения, из которых, по-видимому, наибольшей общностью обладает метод конечных элементов. Несмотря на большое количество работ, посвященных реализации метода конечных элементов для расчета мод волноводов с диэлектрическим заполнением, задача разработки программы для волноводов с радиальным изменением показателя преломления не может считаться удовлетворительно решенной. Проблема заключается в использовании полярной системы координат, в которой нуль является особой точкой системы уравнений. В то же время имеющееся программное обеспечение предназначено для работы в декартовой системе координат. Таким образом, решение спектральной задачи для волноводов с радиальным заполнением требует применения метода, не учитывающего возможность разделения переменных и предназначенного для решения двумерных задач. При этом, поскольку решается краевая задача для системы уравнений Максвелла, необходимо использовать смешанные конечные элементы для правильной аппроксимации нулевого собственного значения. Поскольку граница области и линии разрыва диэлектрической проницаемости представляют собой окружности, то практически реализуемы конеч-

ные элементы нулевого–первого порядков. Это приводит на практике к достаточно невысокой точности вычислений в случае грубой сетки либо к заметному времени работы программы, не соответствующему одномерному характеру задачи. Одним из способов решения задачи в полярной системе координат является введение фиктивного идеально проводящего стержня, расположенного на оси волновода, радиус которого устремляется к нулю. При этом исчезает особая точка системы уравнений в начале координат. В силу легко проверяемого для данной задачи аналога теоремы Самарского собственные значения задачи со стержнем стремятся к собственным значениям исходной задачи, при стремлении радиуса стержня к нулю. К сожалению, для рассматриваемой задачи скорость сходимости в настоящее время неизвестна.

Для задачи о волноводе с радиальным изменением показателя преломления метод, основанный на введении фиктивного стержня, был реализован в работе [2]. В этой работе использовались смешанные конечные элементы 1-го и 2-го порядков. Полученные результаты согласовывались с точными, при этом использовались достаточно грубые сетки (20 элементов) при высоком порядке элементов. В то же время проведенные расчеты обнаружили невысокую точность полученных результатов. В таблице (во 2-м элементе каждой клетки таблицы) показано, что точность вычисления собственных значений составляет два знака после запятой. Мы показали, что высокую точность можно получить, применяя элементы 0-го и 1-го порядков, на сетке из 200 элементов. При этом точность вычисления собственных значений составляет четыре знака после запятой практически во всех тестируемых точках.

В настоящей работе мы сравниваем полученные результаты с известными, а также приводим новые результаты расчетов волноводов с более сложными показателями преломления. В качестве примера рассмотрено вычисление дисперсионных кривых шестислойного волновода, расчет которых, особенно в комплексной области (методом сшивания мод), представляется малоэффективным.

1. Применение смешанных конечных элементов к расчету дисперсионных кривых волноводов с градиентным заполнением

Электромагнитное поле волновода описывается системой Максвелла из восьми уравнений для шести неизвестных

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -ik\varepsilon\mathbf{E}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = ik\mathbf{H}, \\ \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \\ \operatorname{div} \varepsilon\mathbf{E} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

В цилиндрической системе координат уравнения имеют вид

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = -ik\varepsilon E_r, \\ \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = -ik\varepsilon E_\varphi, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = -ik\varepsilon E_z, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = ikH_r, \\ \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = k\varepsilon H_\varphi, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rE_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} = k\varepsilon H_z, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rH_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\varepsilon E_r) + \frac{\varepsilon}{r} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} + \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Будем искать нормальные волны, т.е. решения, зависящие от z и φ в виде $E, H \sim e^{i\gamma z + im\varphi}$.

После подстановки векторов подобного вида в (2), (3) и сокращения на экспоненциальный множитель приходим к задаче на отрезке $[0, 1]$, в которой роль собственного значения играет параметр γ :

$$\begin{cases} \frac{1}{r} imH_z - i\gamma H_\varphi = -ik\varepsilon E_r, \\ i\gamma H_r - \frac{dH_z}{dr} = -ik\varepsilon E_\varphi, \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(rH_\varphi) - \frac{1}{r} imH_r = -ik\varepsilon E_z, \\ \frac{1}{r} imE_z - i\gamma E_\varphi = ikH_r, \\ i\gamma E_r - \frac{dE_z}{dr} = k\varepsilon H_\varphi, \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(rE_\varphi) - \frac{1}{r} imE_r = k\varepsilon H_z, \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(rH_r) + \frac{1}{r} imH_\varphi + i\gamma H_z = 0, \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r\varepsilon E_r) + \frac{\varepsilon}{r} imE_\varphi + \varepsilon i\gamma E_z = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Сравнение вычисленных и точных значений постоянных распространения полого волновода ($\varepsilon = 1, m = 1, r = 1$)

K	$\operatorname{Im} \gamma, H_{11}$	$\operatorname{Re} \gamma, H_{11}$	$\operatorname{Im} \gamma, E_{11}$	$\operatorname{Re} \gamma, E_{11}$
0	1.841195 1.840110 (1.841183)	0	3.831731 3.831707 (3.831706)	0
0.5	1.772004 1.770960 (1.771992)	0	3.798969 3.799002 (3.798943)	0
1	1.545962 1.54504 (1.545948)	0	3.698941 3.699150 (3.698914)	0
1.5	1.067707 1.067069 (1.067688)	0	3.525927 3.526454 (2.525900)	0
2	0	0.781025 0.780595 (0.781051)	3.268358 3.269388 (3.268328)	0
2.5	0	1.691153 1.690184 (1.691165)	2.903819 2.905643 (2.903785)	0
3	0	2.368543 2.367184 (2.368552)	2.383727 2.386935 (2.383688)	0
3.5	0	2.976575 2.974869 (2.976582)	1.559540 1.566197 (1.559478)	0
4	0	3.551056 3.549028 (3.551062)	0	1.147968 1.136093 (1.148054)
4.5	0	4.106092 4.103758 (4.106098)	0	2.359625 1.136093 (2.359667)
5		4.648655 4.646026 (4.648660)	0	3.212113 3.205581 (3.212168)

В нашем случае удобно выбрать следующие уравнения:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} mH_z - \gamma H_\varphi + k\varepsilon E_r = 0, \\ i\gamma H_r - \frac{d}{dr} H_z + ik\varepsilon E_\varphi = 0, \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r\varepsilon E_r) + \frac{1}{r} i\varepsilon mE_\varphi + i\gamma \varepsilon E_z = 0, \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{r} mE_z - \gamma E_\varphi - kH_r = 0, \\ i\gamma E_r - \frac{d}{dr} E_z - ikH_\varphi = 0, \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(rH_r) + \frac{1}{r} imH_\varphi + i\gamma H_z = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Введем обозначения:

$$X = (H_r, H_\varphi, E_z)^T, Y = (\varepsilon E_r, \varepsilon E_\varphi, H_z)^T.$$

Подставляя Y из (7) в (6), приходим к задаче на

собственные значения для системы уравнений:

$$\begin{pmatrix} \gamma \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r + k^2 \varepsilon r & imr \frac{d}{dr} \frac{1}{r} & -k \varepsilon m \\ im \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r & -\frac{m^2}{r} + k^2 \varepsilon r & -ik \varepsilon r \frac{d}{dr} \\ km \varepsilon & ik \frac{d}{dr} r \varepsilon & \frac{d}{dr} r \varepsilon \frac{d}{dr} - \frac{\varepsilon}{r} m^2 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \gamma^2 r \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \mathbf{X} \quad (8)$$

с краевыми условиями

$$H_r(0) = 0, \quad E_z(0) = 0, \quad H_r(1) = 0, \quad E_z(1) = 0, \quad |X(0)| < \infty. \quad (9)$$

В случае разрывного ε дополнительно необходимо поставить условия сопряжения на границе непрерывности:

$$[H_\varphi]_s = [E_z]_s = 0. \quad (10)$$

Кроме того, должно выполняться неиспользованное уравнение Максвелла

$$-ik \varepsilon E_z = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r H_\varphi) - \frac{1}{r} im H_r, \quad (11)$$

которое является следствием системы уравнений (8), если собственное значение γ не равно нулю.

Следуя работе [2], перенесем краевые условия из точки $r = 0$ в точку $r = a$. При стремлении a к нулю собственные значения этой задачи стремятся к собственным значениям исходной. Для решения задачи (8)–(10) используем метод смешанных конечных элементов [3]. Введем новые переменные $H_r = r H_r$, $H_\varphi = i H_\varphi$, для удобства обозначая их теми же символами. Умножая уравнение (8) на произвольный вектор $\mathbf{X} = (\tilde{H}_r, \tilde{H}_\varphi, \tilde{E}_z)$, удовлетворяющий граничным условиям, условиям сопряжения и условиям гладкости, и интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} & \int_\alpha^1 \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} H_r + \frac{m}{r} H_\varphi \right) \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \tilde{H}_r + \frac{m}{r} \tilde{H}_\varphi \right) r dr + \\ & + \int_\alpha^1 \varepsilon \left(r \frac{dE_z}{dr} \frac{d\tilde{E}_z}{dr} + \frac{m^2}{r} E_z \tilde{E}_z \right) - \int_\alpha^1 \left[k^2 \varepsilon \left(\frac{1}{r} H_r \tilde{H}_r + H_\varphi \tilde{H}_\varphi \right) + \right. \\ & \left. + km \varepsilon \frac{1}{r} (E_z \tilde{H}_r - H_r \tilde{E}_z) - k \varepsilon r \left(\frac{d}{dr} E_z \tilde{H}_\varphi - H_\varphi \frac{d}{dr} \tilde{E}_z \right) \right] dr = \\ & = -\gamma^2 \int_\alpha^1 \left(\frac{1}{r} H_r \tilde{H}_r + r H_\varphi \tilde{H}_\varphi + \varepsilon r E_z \tilde{E}_z \right) dr. \quad (12) \end{aligned}$$

Будем приближенно искать компоненты вектора \mathbf{X} в виде:

$$\begin{aligned} r H_r &= \sum_1 H_{ri} N_i(r), \\ E_z &= \sum_i E_{zi} N_i(r), \\ i H_\varphi &= \sum_i H_{\varphi i} P_i(r), \end{aligned}$$

где $N(r)$, $P(r)$ — кусочно-линейные и кусочно-постоянные базисные функции (см. [2, 3]).

Подставляем эти выражения в (12), где для вектора $\tilde{\mathbf{X}}$ используются аналогичные функции, и получаем задачу на собственные значения вида $A\mathbf{X} = \gamma^2 B\mathbf{X}$, для решения которой используем стандартную программу пакета MATLAB.

Приведем результаты тестирования алгоритма. Сравним результаты расчетов для случая полого волновода ($\varepsilon = 1$, $r = 1$, $m = 1$) с точными (см. таблицу). Значение $m = 0$ не представляет интереса, поскольку в этом случае задача сводится к скалярной. Первый элемент клетки в таблице отвечает элементам 1-го и 0-го порядков, второй — 2-го и 1-го, в скобках приведены точные значения. Результаты сравнения показывают, что полученные значения постоянных пространства совпадают с точными до трех-четырех

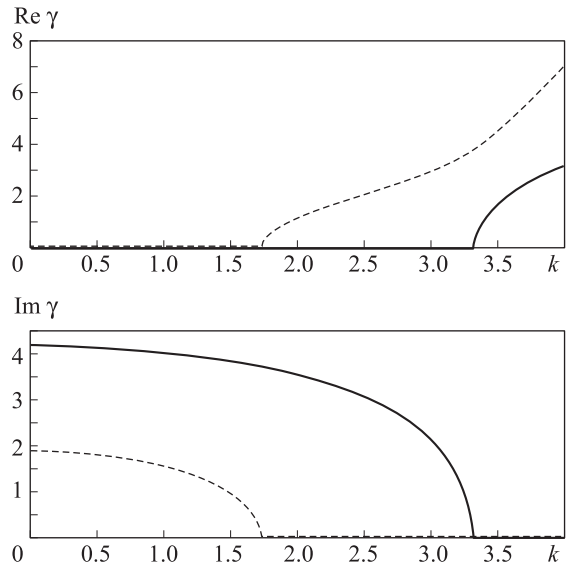


Рис. 1. 1-я и 2-я дисперсионные кривые двухслойного волновода

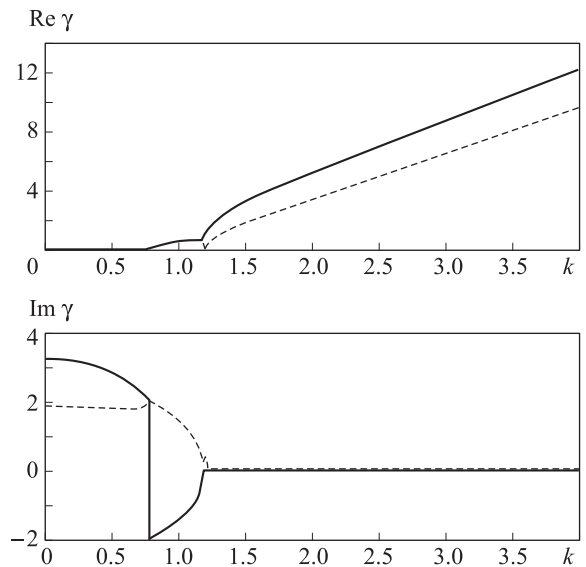


Рис. 2. 3-я и 4-я дисперсионные кривые двухслойного волновода

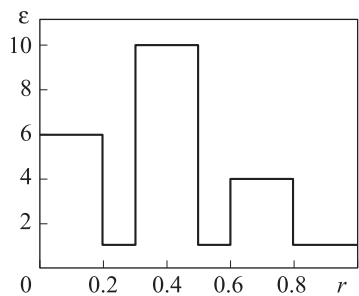


Рис. 3. Характеристики шестислойного волновода

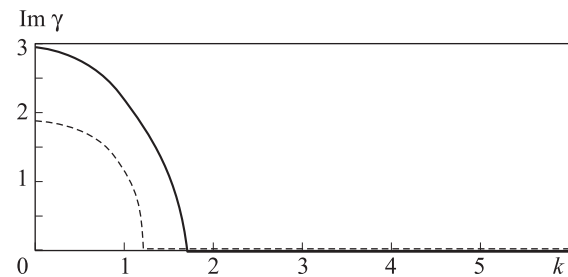
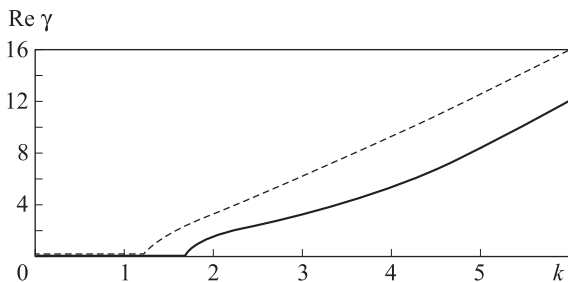


Рис. 4. 1-я и 2-я дисперсионные кривые шестислойного волновода

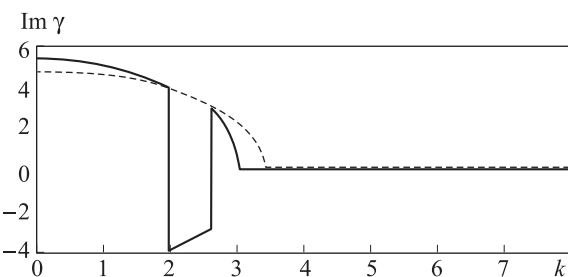
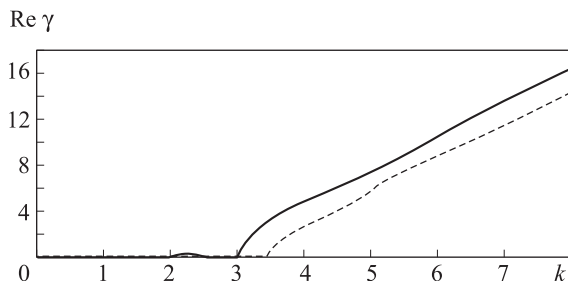


Рис. 5. 3-я и 4-я дисперсионные кривые шестислойного волновода, возникновение комплексных мод

знаков после запятой. Радиус внутреннего цилиндра был выбран следующим образом: $a = 0.000001$; его наличие не оказывает влияния на точность решения. В качестве второго примера приведен расчет мод двухслойного волновода ($\epsilon = 10, 0 < r < 0.2; \epsilon = 1, 0.2 < r < 1, m = 1$).

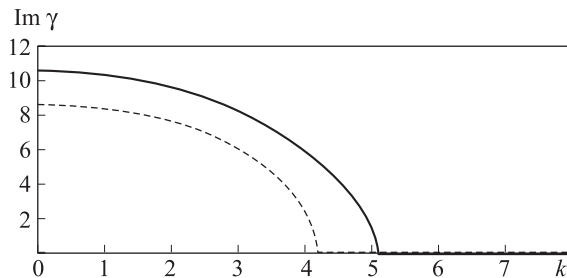
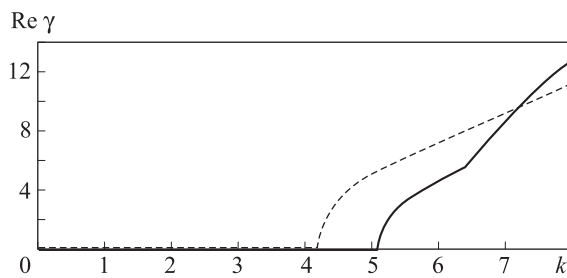


Рис. 6. 5-я и 6-я дисперсионные кривые шестислойного волновода, пересечение дисперсионных кривых

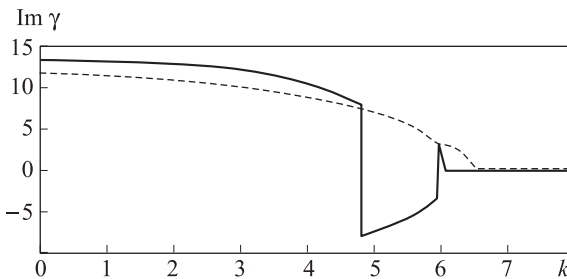
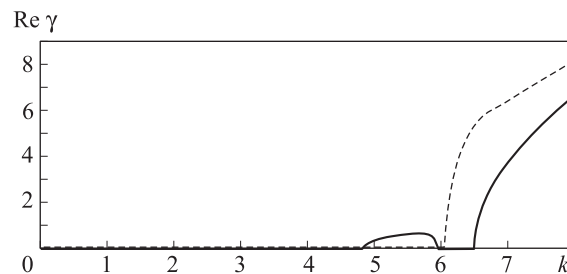


Рис. 7. 7-я и 8-я дисперсионные кривые шестислойного волновода, возникновение комплексных мод

Сравнение с результатами, опубликованными в монографии [1], показывает, что с графической точностью имеется их совпадение (рис. 1, 2). На рис. 2 виден эффект возникновения комплексных мод.

Разработанный алгоритм позволяет рассчитывать моды волноводов с произвольным числом диэлектрических слоев и в том числе — с переменным показателем преломления. В качестве примера приведем дисперсионные кривые шестислойного волновода. Подобная система выбрана в качестве простого примера, для которого применение метода сшивания для расчета комплексных ветвей дисперсионных кривых проблематично. Его характеристики отображены на рис. 3. Построим дисперсионные кривые, соответствующие $m = 1$. На рис. 4 отображены 1-я и 2-я дисперсионные кривые. При этом отсутствуют какие-либо аномалии в их по-

ведении. На рис. 5 приведены 3-я и 4-я дисперсионные кривые. Видно возникновение комплексных мод. На рис. 6 происходит пересечение 5-й дисперсионной кривой с 6-й. На рис. 7 изображены 7-я и 8-я дисперсионные кривые. Снова возникают комплексные моды. Таким образом, появление комплексных мод является достаточно типичным. Детальное рассмотрение эффекта возникновения подобного явления не является целью настоящей работы.

Заключение

Разработанная программа позволяет вычислять спектральные характеристики волноводов с градиентным диэлектрическим заполнением с высокой точностью (как правило, четыре знака после запятой). При-

меняемый алгоритм основан на строгой электродинамической постановке, причем не используются какие-нибудь упрощающие предположения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 09-01-00408а).

Список литературы

1. Веселов Г.И., Раевский С.Б. Слоистые металло-диэлектрические волноводы. М., 1988.
2. Делицын А.Л., Степанов И.В. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2005. № 5. С. 10.
3. Handbook of Numerical Analysis. V. 2 / Ed. by P.G. Ciarlet, J. C. Lions. North-Holland, 1990.

Mixed finite elements for cylindrical waveguides real and complex mode analysis

A. L. Delitsyn^a, S. I. Kruglov^b

Department of Mathematics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.

E-mail: ^adelitsyn@mail.ru, ^bmsc-sf@yandex.ru.

Mixed finite elements application for cylindrical waveguide mode analysis is considered. The results of computations compared with exact. The origin of complex modes in gradient waveguides is taking place.

Keywords: cylindrical waveguides, mixed finite elements, dispersion curves, complex modes.

PACS: 41.20.-q.

Received 8 February 2011.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 6(2011).

Сведения об авторах

1. Делицын Андрей Леонидович — докт. физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939-39-47, e-mail: delitsyn@mail.ru.
2. Круглов Станислав Иванович — студент; тел.: (495) 939-39-47, e-mail: msc-sf@yandex.ru.