АСТРОНОМИЯ, АСТРОФИЗИКА И КОСМОЛОГИЯ

Применение функций Хаара с циклическим сдвигом для поиска космических струн

О. С. Сажина

Государственный астрономический институт имени П. К. Штернберга (ГАИШ МГУ). Россия, 119991, Москва, Университетский просп., д. 13.
E-mail: tedeshka@mail.ru

Статья поступила 12.04.2011, подписана в печать 16.06.2011

Космические струны — предсказываемые теорией одномерные структуры космологических масштабов, поиск которых активно ведется последние годы с помощью оптических и радионаблюдений. Один из наиболее перспективных методов поиска таких объектов — анализ структуры анизотропии реликтового излучения, которая может быть генерирована космическими струнами. Для такой задачи авторами был предложен метод разложения сигнала по модифицированным функциям Хаара, а именно обладающих циклическим сдвигом. Однако для корректного использования системы таких функций необходимо доказательство ее полноты и ортонормальности, чему и посвящена предлагаемая статья.

Ключевые слова: функции Хаара, космическая струна, космология.
УДК: 524.8. PACS: 02.60.-x, 95.75.Mn, 98.70.Vc, 98.80.-k, 95.35.+d, 95.36.+x.

Введение

В рамках проблемы исследования темной энергии ранней Вселенной особый интерес представляют возможные солитонные и солитоноподобные решения, которыми являются стабильные одномерные структуры — космические струны, возникающие во всех наиболее реалистичных моделях физики элементарных частиц [1, 2]. Теоретические исследования в современной физике элементарных частиц дают множество указаний на существование новой физики за рамками Стандартной модели. Космические струны возникают как в рамках моделей Великого объединения, так и в теории суперструн [3, 4]. Обнаружение таких объектов позволило бы не только выявить природу и закономерности развития темной энергии ранней Вселенной, но и изучить масштабы энергий, не достижимых на современных ускорителях.

Космические струны как возможные космологические объекты были впервые предсказаны Т. Кибблом в 1976 г. и активно изучались в последующих работах Я.Зельдовича, а также А. Виленкина и П. Шелларда [2, 5–7]. Существование космических струн не противоречит всем имеющимся на сегодняшний момент космологическим наблюдательным данным и, более того, находит широкую поддержку в теории, а также косвенную поддержку в наблюдениях.

Существует два основных метода поиска космических струн во Вселенной: поиск характерных цепочек событий гравитационного линзирования фоновых по отношению к струне источников [8–16], а также анализ анизотропии реликтового излучения, которая может генерироваться космическими струнами совместно с классическими адиабатическими возмущениями плотности [17–19].

В работе [18] было проведено моделирование генерации анизотропии реликтового излучения одиночной струной и была выявлена характерная структура такой анизотропии. Важно отметить, что структура анизотропии не зависит от параметров струны (линейной плотности струны, ее скорости и расстояния до наблюдателя). Для анализа реальных карт наблюдений анизотропии реликтового излучения, полученных космическим аппаратом WMAP [20], а также для проекта «Планк» («Planck»), необходимы алгоритмы разделения возможных сигналов от космических струн от «фона» адиабатических возмущений плотности.

Одна из наиболее важных задач, возникающих при поиске струн по анизотропии, — это учет произвольности ориентации космической струны в пространстве. Для этой цели авторами предложено использовать систему функций Хаара с циклическим сдвигом, которая и дает возможность учета поворота струны. Однако для корректного использования вводимой системы для обработки реальных данных необходимо доказательство ее полноты и ортонормальности, что и представлено в настоящей статье.

1. Функции Хаара с циклическим сдвигом

Согласно общим теоремам для евклидовых пространств [21, 22], в пространстве L_2 существуют полные ортогональные системы функций. В частности, Хааром [21] был предложен следующий набор функций, представляющий собой полную ортонормальную систему на отрезке $[0,1]$:

$$\begin{aligned}
&\phi_0 = 1,\\
&\quad \phi_{01},\\
&\quad \phi_{11},\quad \phi_{12},\\
&\quad \phi_{21},\quad \phi_{22},\quad \phi_{23},\quad \phi_{24},\\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\quad \phi_{n1},\quad \phi_{n2},\quad \phi_{n3},\quad \ldots,\quad \phi_{n2^n}.
\end{aligned}$$

Серия номер n содержит 2^n функций. В общем случае

$$\phi_0 = 1, \tag{1}$$

$$\phi_{ni} = \begin{cases} 2^{n/2}, & \dfrac{i-1}{2^n} < x < \dfrac{i-1}{2^n} + \dfrac{1}{2^{n+1}}, \\ -2^{n/2}, & \dfrac{i-1}{2^n} + \dfrac{1}{2^{n+1}} < x < \dfrac{i}{2^n}, \\ 0, & x \notin \left[\dfrac{i-1}{2^n}; \dfrac{i}{2^n}\right], \end{cases} \tag{2}$$

$$n = 0, 1, \ldots; \quad i = 1, 2, \ldots, 2^n.$$

В точках разрыва функции $\{\phi_{ni}\}$ системы Хаара могут быть определены произвольным образом.

Определим функции Хаара $\{\psi_{ni}\}$ с циклическим сдвигом. Для простоты рассмотрим такие функции на отрезке $[0, 1]$ с действительным циклическим сдвигом $a \in [0, 1/2]$. В зависимости от параметра a функции $\{\psi_{ni}\}$ делятся на четыре группы.

Если $0 < a < 1 - i/2^n$, то

$$\psi_{ni}^{(a)} = \begin{cases} 2^{n/2}, & \dfrac{i-1}{2^n} + a < x < \dfrac{i-1}{2^n} + a + \dfrac{1}{2^{n+1}}, \\ -2^{n/2}, & \dfrac{i-1}{2^n} + a + \dfrac{1}{2^{n+1}} < x < \dfrac{i}{2^n} + a, \\ 0, & x \notin \left[\dfrac{i-1}{2^n} + a; \dfrac{i}{2^n} + a\right]. \end{cases} \tag{3}$$

Если $1 - i/2^n < a < 1 - i/2^n + 1/2^{n+1}$, то

$$\psi_{ni}^{(b)} = \begin{cases} 2^{n/2}, & \dfrac{i-1}{2^n} + a < x < \dfrac{i-1}{2^n} + a + \dfrac{1}{2^{n+1}}, \\ -2^{n/2}, & \dfrac{i-1}{2^n} + a + \dfrac{1}{2^{n+1}} < x < 1 \cup \\ & \cup\, 0 < x < \frac{i}{2^n} + a - 1, \\ 0, & x \in \left[\dfrac{i}{2^n} + a - 1; \dfrac{i-1}{2^n} + a\right]. \end{cases} \tag{4}$$

Если $1 - i/2^n + 1/2^{n+1} < a < 1 - i/2^n + 1/2^n$, то

$$\psi_{ni}^{(c)} = \begin{cases} 2^{n/2}, & \dfrac{i-1}{2^n} + a < x < 1 \cup \\ & \cup\, 0 < x < \frac{i-1}{2^n} + a + \frac{1}{2^{n+1}} - 1, \\ -2^{n/2}, & \dfrac{i-1}{2^n} + a + \dfrac{1}{2^{n+1}} - 1 < x < \dfrac{i}{2^n} + a - 1, \\ 0, & x \in \left[\dfrac{i}{2^n} + a - 1; \dfrac{i-1}{2^n} + a\right]. \end{cases} \tag{5}$$

Если $1 - (i-1)/2^n < a < 1/2$, то

$$\psi_{ni}^{(d)} = \begin{cases} 2^{n/2}, & \dfrac{i-1}{2^n} + a - 1 < x < \dfrac{i-1}{2^n} + a - 1 + \dfrac{1}{2^{n+1}}, \\ -2^{n/2}, & \dfrac{i-1}{2^n} + a - 1 + \dfrac{1}{2^{n+1}} < x < \dfrac{i}{2^n} + a - 1, \\ 0, & x \notin \left[\dfrac{i-1}{2^n} + a - 1; \dfrac{i}{2^n} + a - 1\right]. \end{cases} \tag{6}$$

Величина сдвига объясняется тем фактом, что функции Хаара с циклическим сдвигом $a \in (1/2, 1]$ могут быть легко получены из функций Хаара с циклическим сдвигом $a \in [0, 1/2]$ с помощью операции отражения относительно действительной оси.

Докажем, что для фиксированного сдвига a набор функций Хаара со сдвигом (3)–(6) является полным и ортонормальным, так же как и система классических функций Хаара (1), (2).

2. Ортонормальность системы функций Хаара с циклическим сдвигом

Известно, что классическая система функций Хаара (вейвлеты Хаара) представляет собой полную ортонормальную систему [23–25].

Для удобства доказательства необходимой нам ортонормальности функций Хаара с циклическим сдвигом сначала докажем, что система функций (1), (2) является ортонормальной в пространстве функций $L_2[0, 1]$, и используем эту схему доказательства в дальнейшем:

$$(\phi_{ni}\phi_{mj}) = \int_0^1 \phi_{ni}(x)\phi_{mj}(x)\,dx = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, i = j. \end{cases} \tag{7}$$

Пусть для определенности $m < n$. Для доказательства (7) докажем две вспомогательные леммы. Рассмотрим две серии функций $\{\phi_{ni}\}$ и $\{\phi_{mj}\}$, $i = 1, 2, \ldots, 2^n$; $j = 1, 2, \ldots 2^m$.

Лемма 1. *Расстояние* $\Delta = |x_n - x_m|$, *где*

$$x_n = \frac{i-1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}, \quad x_m = \frac{j-1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}},$$

не меньше $\Delta^* = 2^{-(n+1)}$ *для* $i = 1, 2, \ldots, 2^n$; $j = 1, 2, \ldots, 2^m$ *и* $m < n$.

Доказательство. Расстояние Δ определяется как

$$\Delta = \left|\frac{i-1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{j-1}{2^m} - \frac{1}{2^{m+1}}\right| = \\ = \left|\frac{i}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{j}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}}\right| \tag{8}$$

Найдем, при каких i и j оно достигает своего минимума. Это, очевидно, происходит тогда, когда выражение под знаком модуля равно нулю:

$$i = \frac{1}{2} + j \cdot 2^{n-m} - 2^{n-m-1}.$$

Однако i есть натуральное число, следовательно, Δ достигает минимума при

$$i^*_{1,2} = j \cdot 2^{n-m} - 2^{n-m-1}; j \cdot 2^{n-m} - 2^{n-m-1} + 1.$$

Подставляя оба выражения для i^* в (8), находим $\Delta^* = 2^{-(n+1)}$. Для любых $i > i^*$ выполняется $\Delta > \Delta^*$, что и требовалось доказать. □

Лемма 2. *Функции серий Хаара* $\{\phi_{ni}\}$ *и* $\{\phi_{mj}\}$ *для любых* $i \neq j$; $i = 1, 2, \ldots, 2^n$; $j = 1, 2, \ldots, 2^m$ *не меняют знак одновременно.*

Доказательство. По лемме 1, расстояние от конца интервала, на котором функция ϕ_{ni} не равна нулю, до конца интервала, на котором функция ϕ_{mj} не равна нулю, есть величина, не меньшая $\Delta^* = 2^{-(n+1)}$. Но Δ^* есть длина интервала, на котором функция ϕ_{ni} не меняет знак. Таким образом, когда функция ϕ_{ni} меняет знак, функция ϕ_{mj} знак не меняет, что и требовалось доказать. □

Скалярное произведение (ϕ_{ni}, ϕ_{mj}) кусочно-постоянных функций распадается на сумму произведений на каждом из интервалов $2\Delta^*$. По лемме 2,

$$(\phi_{ni}, \phi_{mj}) = \frac{2}{2^{n+1}} \begin{cases} \phi_{ni}\phi_{mj} + (-\phi_{ni})\phi_{mj} \\ \phi_{ni}(-\phi_{mj}) + (-\phi_{ni})(-\phi_{mj}) \end{cases} = 0.$$

Таким образом, функции Хаара представляют собой ортогональную систему. Докажем, что эта система является нормированной:

$$\|\phi_{ni}\|^2 = \int_0^1 \phi_{ni}(x)^2\, dx = \left(2^{n/2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2^{n+1}} + \left(-2^{n/2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = 1.$$

Итак, доказано, что система функций Хаара является ортонормальной на отрезке $[0,1]$ по норме пространства L_2.

Рассмотрим теперь систему функций Хаара с циклическим сдвигом (3)–(6). Докажем для нее соотношение (7).

Лемма 1*. *Расстояние* $\Delta = |x_n - x_m|$, *где*

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{i-1}{2^n} + \dfrac{1}{2^{n+1}} + a, & 0 < a < 1 - \dfrac{i}{2^n} + \dfrac{1}{2^{n+1}}, \\ \dfrac{i-1}{2^n} + \dfrac{1}{2^{n+1}} + a - 1, & 1 - \dfrac{i}{2^n} + \dfrac{1}{2^{n+1}} < a < \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

$$x_m = \begin{cases} \dfrac{j-1}{2^m} + \dfrac{1}{2^{m+1}} + a, & 0 < a < 1 - \dfrac{j}{2^m} + \dfrac{1}{2^{m+1}}, \\ \dfrac{j-1}{2^m} + \dfrac{1}{2^{m+1}} + a - 1, & 1 - \dfrac{j}{2^m} + \dfrac{1}{2^{m+1}} < a < \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

не меньше $\Delta^* = 2^{-(n+1)}$ *для* $i = 1, 2, \ldots, 2^n$; $j = 1, 2, \ldots 2^m$ *и* $m < n$.

Доказательство. Доказательство для случаев

$$x_n = \frac{i-1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + a, \quad x_m = \frac{j-1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} + a$$

и

$$x_n = \frac{i-1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + a - 1, \quad x_m = \frac{j-1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} + a - 1$$

полностью аналогично доказательству леммы 1, поскольку сдвиг a, одинаковый для одного набора функций, не влияет на величину рассматриваемого интервала.

Рассмотрим для определенности случай

$$x_n = \frac{i-1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + a, \quad x_m = \frac{j-1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} + a - 1,$$

поскольку

$$x_n = \frac{i-1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + a - 1, \quad x_m = \frac{j-1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} + a,$$

очевидно, аналогичен. Имеем

$$\Delta = \left| \frac{i-1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + a - \frac{j-1}{2^m} - a - \frac{1}{2^{m+1}} + 1 \right| = \left| \frac{i}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{j}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} + 1 \right|.$$

Минимальное значение модуля есть

$$\Delta = \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{m+1}} > \Delta^*,$$

что и требовалось доказать. □

Аналогично рассуждениям для классической системы Хаара из леммы 1* заключаем, что функции серий Хаара с циклическим сдвигом не меняют знак одновременно. Отсюда следует, что скалярное произведение кусочно-постоянных функций системы (3)–(6) распадается на сумму произведений на каждом из интервалов $2\Delta^*$, причем

$$(\psi_{ni}, \psi_{mj}) = \frac{2}{2^{n+1}} \begin{cases} \psi_{ni}\psi_{mj} + (-\psi_{ni})\psi_{mj} \\ \psi_{ni}(-\psi_{mj}) + (-\psi_{ni})(-\psi_{mj}) \end{cases} = 0.$$

Таким образом, функции Хаара с циклическим сдвигом представляют собой ортогональную систему.

Докажем, что эта система является нормированной:

$$\left\|\psi_{ni}^{(a)}\right\|^2 = \int_0^1 \psi_{ni}^{(a)}(x)^2\, dx = \left(2^{n/2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2^{n+1}} + \left(-2^{n/2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = 1,$$

$$\left\|\psi_{ni}^{(b)}\right\|^2 = \int_0^1 \psi_{ni}^{(b)}(x)^2\, dx = \left(2^{n/2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2^{n+1}} + \left(-2^{n/2}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{i-1}{2^n} - a - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{i}{2^n} + a - 1\right) = \left(2^{n/2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2^{n+1}} + \left(-2^{n/2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = 1,$$

$$\left\|\psi_{ni}^{(c)}\right\|^2 = \int_0^1 \psi_{ni}^{(c)}(x)^2\, dx = \left(2^{n/2}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{i-1}{2^n} - a + \frac{i-1}{2^n} + a + \frac{1}{2^{n+1}} - 1\right) + \left(-2^{n/2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \left(2^{n/2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2^{n+1}} + \left(-2^{n/2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = 1,$$

$$\left\|\psi_{ni}^{(d)}\right\|^2 = \int_0^1 \psi_{ni}^{(d)}(x)^2\, dx = \left(2^{n/2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2^{n+1}} + \left(-2^{n/2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = 1.$$

Итак, доказано, что система функций Хаара с действительным циклическим сдвигом является ортонормальной на отрезке $[0,1]$ по норме пространства L_2.

3. Полнота системы функций Хаара с циклическим сдвигом

Пользуясь указаниями в книге [21], докажем, что система (3)–(6) является полной.

Построим вспомогательное пространство $M_{n+1}(\epsilon)$ следующим образом. Пусть $M_{n+1}(\epsilon)$ есть множество всех функций, сохраняющих постоянное значение на каждом из интервалов Δ_i:

$$\Delta_1 = 1/2^{n+1} - \epsilon, \quad \Delta_i = 1/2^{n+1} \quad (i = 2, \ldots, n),$$
$$\Delta_{n+1} = 1/2^{n+1} + \epsilon,$$

полученных разбиением отрезка $[0,1]$. Величина $\epsilon \in [0, 1/2^{n+1}]$ задает циклический сдвиг a системы Хаара (3)–(6):

$$a = \epsilon + p \cdot 1/2^{n+1},$$

где $0 \leqslant p \leqslant 2^n$ — целое число.

Для любых двух функций $f_1 \in M_{n+1}(\epsilon)$ и $f_2 \in M_{n+1}(\epsilon)$ их линейная комбинация $\alpha f_1 + \beta f_2 \in M_{n+1}(\epsilon)\ \ \forall\, \alpha, \beta$. Таким образом, $M_{n+1}(\epsilon)$ есть линейное пространство размерности 2^{n+1}. Любая непрерывная функция может быть представлена как предел равномерно сходящейся последовательности многочленов, состоящих из функций, принадлежащих пространству $M_{n+1}(\epsilon)$ (т. е. последовательности линейных комбинаций функций из $M_{n+1}(\epsilon)$). Другими словами, при достаточно большом n любую непрерывную функцию можно аппроксимировать с любой заданной точностью функциями из пространства $M_{n+1}(\epsilon)$.

Функции системы Хаара со сдвигом (3)–(6) принадлежат пространству $M_{n+1}(\epsilon)$ $(i = 1, 2, \ldots, 2^n)$. Эти функции, как было доказано выше, представляют собой ортонормальную систему. Их количество есть

$$1 + \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1}.$$

Следовательно, функции $\{\psi_{ni}\}$ линейно независимы, из чего в свою очередь следует, что они порождают пространство $M_{n+1}(\epsilon)$. Исходя из указанных выше свойств пространства $M_{n+1}(\epsilon)$, функции $\{\psi_{ni}\}$ представляют собой полную систему.

4. Анализ генерируемой космической струной анизотропии реликтового излучения с помощью функций Хаара с циклическим сдвигом

Поскольку анизотропия реликтового излучения, генерируемая одиночной прямой космической струной, содержит характерный скачок [18], то наиболее целесообразным методом ее выявления мы полагаем использование функций Хаара, модифицировав их подходящим образом. Заметим, что вводимые нами функции с произвольным вещественным сдвигом отличаются от классических вейвлетов Хаара, поскольку формируются циклически, путем сшивки конца и начала рассматриваемой области определения (отрезка $[0, 1]$), что необходимо для учета поворотов космической струны.

В рассматриваемой задаче «сигнал» — искомые структуры в анизотропии, обусловленной космической струной, «шум» — анизотропия, вызванная адиабатическими возмущениями. Анализируемые наблюдательные данные представлены в виде двумерной карты; сигнал ищется как функция двух разделяющихся переменных, например полярных координат. Зависящая от угловой переменной часть наблюдаемого сигнала, $g(\theta)$, ищется в виде суммы ряда Фурье по системе $\{\psi_{ni}(\theta)\}$:

$$g(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{2^n} c_{ni} \psi_{ni}(\theta),$$

где коэффициенты Фурье c_{ni} есть

$$c_{ni} = \frac{1}{\|\psi_{ni}\|^2} \int_0^1 g(\theta) \psi_{ni}(\theta)\, d\theta,$$

где θ — угол поворота струны, нормированный подходящим образом. Функция $\psi_{ni}(\theta)$ — одна из четырех, определенных соотношениями (3)–(6). Как было доказано, набор функций Хаара с циклическим сдвигом является полным и ортонормальным, что необходимо для их использования в качестве базисных.

Заключение

В работе доказаны полнота и ортонормальность модифицированных функций Хаара, полученных произвольным вещественным сдвигом классических функций Хаара, причем сдвиг производится циклически, путем сшивки начала и конца области определения — отрезка $[0, 1]$. Введение таких функций необходимо для анализа данных по анизотропии реликтового излучения для поиска характерных структур, обусловленных космическими струнами.

Использование функций Хаара с циклическим сдвигом для разложения по мультипольным гармоникам анизотропии реликтового излучения дает возможность учета реальной ориентации космической струны в пространстве. Кроме того, согласно предварительной обработке данных семи лет наблюдений спутника WMAP, указанный метод впервые дает возможность обнаружения сигналов с амплитудами порядка $8 \div 10$ мкК (при величине амплитуды классических адиабатических возмущений плотности порядка 100 мкК), а скачок анизотропии, обусловленной струной, есть величина порядка $1.5 \div 10$ мкК [18].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 10-02-00961а) и гранта Президента РФ МК-473.2010.2. Работа выполнена в рамках проекта Минобразования № 14.740.11.0085.

Список литературы

1. *Hindmarsh A.* // The formation and evolution of cosmic strings / Ed. by G. Gibbons, S.W. Hawking, T. Vachaspathi. Cambridge, 1990.
2. *Vilenkin A., Shellard E.P.S.* Cosmic strings and other topological defects. Cambridge, 1994.
3. *Davis A.-C., Kibble T.W.B.* Fundamental cosmic strings. E-print archives. hep-th/0505050.
4. *Copeland E.J., Myers R.C., Polchinski J.* Cosmic F- and D-strings. E-print archives. hep-th/0312067.
5. *Kibble T.W.B.* // J. Phys. A: Math & Gen. 1976. **9** P. 1387.
6. *Vilenkin A.* // Phys. Rev. D. 1981. **23**. P. 852.
7. *Zeldovich Ya.B.* // MNRAS. 1980. **192**. P. 663.
8. *Sazhin M., Longo G., Capaccioli M.* et al. // MNRAS. 2007. **376**. P. 1731; E-print archives. astro-ph/0611744.
9. *Sazhin M., Longo G., Capaccioli M.* et al. // MNRAS. 2003. **343** P> 353.
10. *Sazhin M., Capaccioli M., Longo G.* et al. // E-print archives. astro-ph/0601494.
11. *Sazhin M., Capaccioli M., Longo G.* et al. // Astrophys. J. 2005. **636**. P. L5; E-print archives. astro-ph/0506400.
12. *Сажин М.В., Хованская О.С.* // Астрон. журн. 2005. **82**, № 5. С. 387.
13. *Сажин М.В., Хованская О.С., Капаччиоли М.* и др. // Письма в Астрон. журн. 2005. **31**, № 2. С. 83; E-print archives. astro-ph/0406516.
14. *Morganson E.* // MNRAS. 2010. **406**. P. 2452.
15. *Morganson E., Gasparini M.A.* // MNRAS. 2008. **385**. P. 1959.
16. *Vilenkin A.* // Nature. 1986. **322**. P. 613.
17. *Stebbins A.* // Ap. J. 1988. **327**. P. 584.
18. *Сажина О.С., Сажин М.В., Семенцов В.Н.* // ЖЭТФ. 2008. **133**, № 5. С. 1005.

19. *Lo A.S., Wright E.L.* Signatures of cosmic strings in the cosmic microwave background. E-print archives. arXiv:hep-th/0503120.
20. *Горбунов Д.С., Рубаков В.А.* Введение в теорию ранней Вселенной. В 2 т. М., 2008; 2010.
21. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., 2006.
22. *Пугачев В.С.* Лекции по функциональному анализу. М., 1996.
23. *Ruch D.K., Van Fleet P.J.* Wavelet theory, an elementary approach with applications. Wiley, 2009.
24. *Дремин И.М., Иванов О.В., Нечитайло В.А.* // УФН. 2001. **171**, № 5. С. 475.
25. *Соболь И.М.* Многомерные квадратные формулы и функции Хаара. М., 1969.

Application of Haar functions with cyclic translations in cosmic string search

O. S. Sazhina

P. K. Sternberg State Institute of Astronomy, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.
E-mail: tedeshka@mail.ru.

Cosmic strings are the cosmological size linear structures. The cosmic string search (in both optical and radio observations) is the active field of modern scientific efforts during last years. The most effective method in cosmic string search is the analysis of the structure of the cosmic microwave background radiation anisotropy, which could be generated by the strings. For this purpose it was elaborated the method of signal decomposition based on modified Haar functions with cyclic translations. To correct use of these functions the normality and fullness were proved.

Keywords: Haar functions, cosmic string, cosmology.
PACS: 02.60.–x, 95.75.Mn, 98.70.Vc, 98.80.–k, 95.35.+d, 95.36.+x.
Received 12 April 2011.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 6(2011).

Сведения об авторе

Сажина Ольга Сергеевна — ст. науч. сотрудник; тел. 8(495) 939-50-06, e-mail: tedeshka@mail.ru.