Рассеяние звука на турбулентных флуктуациях давления и энтропии

Е. В. Юшков, В. П. Юшков

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра физики атмосферы. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
E-mail: yushkov@phys.msu.ru

Статья поступила 10.02.2011, подписана в печать 29.06.2011

Проанализирована широко известная формула Татарского, описывающая рассеяние звуковых волн в турбулентной атмосфере. Показано, что если основой для разделения акустических и турбулентных флуктуаций является адиабатичность первых и несжимаемость вторых, то эти посылки приводят к появлению добавочных членов в классической формуле, возможно, небольших в инерционном интервале турбулентности. Показано также, как изменяется формула Обухова, описывающая связь турбулентных флуктуаций давления и скоростей в сжимаемой атмосфере, и к чему приводит независимость флуктуаций потенциальной и термодинамической температур. По аналогии с формулой для мелкомасштабных изотропных флуктуаций температуры, также выведенной А. М. Обуховым, выведена формула для флуктуаций энтропии и потенциальной плотности — функции энтропии, описывающей пространственное распределение плотности вероятности распределения идентичных «частиц жидкости» при турбулентном перемешивании.

Ключевые слова: турбулентность, энтропия, давление, звуковые волны, сжимаемость, бароклинность.
УДК: 504.35. PACS: 47.27.nb, 43.28.+h, 92.60.hk.

Введение

Турбулентность в пограничном слое атмосферы изучена достаточно подробно. Классические монографии [1–5], сотни научных статей, лабораторное и численное моделирование, множество натурных экспериментов, кажется, охватили все вопросы, которые могут быть исследованы. Однако новые измерения порождают и новые вопросы, которые можно обобщить следующим образом: какие приближения или предположения, заложенные в основание теории турбулентности, выполняются в наименьшей степени в новых задачах и к чему приведет замена этих приближений на, возможно, более адекватные. Настоящая работа в значительной степени повторяет вывод нескольких классических формул, лишь добавляя к рассмотрению новые члены, которые могут быть значимы при определенных условиях или которые дают уточняющие поправки к классическим формулам. Одновременно эти новые поправки могут изменять интерпретацию экспериментальных результатов и потому порождать необходимость дополнительных исследований.

Хорошо известно, что А. М. Обухов еще в 1949 г. в работе [7] рассмотрел вопрос о турбулентных флуктуациях давления в несжимаемой жидкости при условии $\rho = \mathrm{const}$. Однако в атмосфере приближение постоянной плотности не является адекватным, в отличие от приближения несжимаемости ($\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$) для достаточно медленных турбулентных флуктуаций, поэтому для атмосферы в формулу Обухова следует внести коррективы. Несмотря на эту очень важную работу, до сих пор традиционно полагается, что турбулентные флуктуации давления в атмосфере малы, а флуктуации плотности связаны лишь с флуктуациями температуры. Так, например, в 1953 г. В. И. Татарским была получена формула, широко используемая в настоящее время и описывающая рассеяние звука в турбулентной атмосфере [5], и в ней отсутствуют турбулентные флуктуации давления. Приближения, использованные Татарским, являются общепринятыми в настоящее время, и большинство последующих работ использует эти приближения (см., например, книгу [6]).

Повторение вывода формулы Татарского показывает, что использованные приближения проще для анализа и, возможно, в большинстве практических задач флуктуации давления действительно дают малый вклад в формулу рассеяния звуковых волн «слышимого» диапазона. Однако этот дополнительный анализ оказывается полезен в методическом плане и открывает новые механизмы, влияющие на рассеяние акустических волн с большей длиной волны — сотни метров и более (акустический инфразвук). Экспериментальные измерения индикатрисы рассеяния звуковых волн в турбулентной атмосфере, проведенные М. А. Каллистартовой [9], подтвердили формулу Татарского, однако в иных метеорологических условиях, например ночью, особенно при сильной устойчивой стратификации, эти дополнительные члены могут давать и более значимый вклад в рассеяние инфразвуковых волн даже и не очень низкой частоты. К тому же точность измерений при проведении такого эксперимента в настоящее время может быть значительно увеличена.

Принцип рассеяния звуковых волн на турбулентных неоднородностях лежит в основе, например, акустического зондирования атмосферного пограничного слоя (АПС), которое активно развивается уже более 30 лет [11]. Известно, что интенсивность рассеяния, а также высота слоя перемешивания, измеряемые акустическим способом, особенно в условиях устойчивой стратификации, не всегда совпадают с данными других измерений как интенсивности [12], так и высоты пограничного слоя [13]. Для объяснения этих различий привлекаются дополнительные предположения, справедливость которых порой трудно проверить. В этом смысле настоящая работа указывает на еще одну возможную причину.

1. Флуктуации давления и энтропии в индикатрисе рассеяния звуковых волн

Проделаем еще раз вывод формулы Татарского, добавляя те члены, которые отсутствовали в исходном анализе в силу принятых упрощений, но которые могут иметь тот же порядок, по крайней мере теоретически, что и оставленные члены уравнений. Распространение в турбулентной среде звуковых волн с малой длиной волны (в инерционном интервале турбулентности) описывается упрощенными уравнениями гидродинамики [14]. Пренебрегая пока диссипативными процессами, влиянием силы тяжести и сил плавучести:

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}+(\boldsymbol{V},\nabla)\boldsymbol{V}=-\frac{1}{\rho}\nabla p, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{V})=0. \tag{2}$$

Будем рассматривать скорость, плотность, давление и температуру как сумму средней, турбулентной и акустической составляющих: $V_i=V_{0i}+u_i+\xi_i$, где ξ_i — скорость адиабатических движений (звуковая), u_i — скорость турбулентных флуктуаций, V_{0i} — среднее течение, например в пограничном слое (i — компоненты скоростей); $p=p_0+p_a+p'$, p_0 — гидростатическое давление, p_a — акустическое давление, p' — турбулентная составляющая. Для упрощения выкладок, поскольку нас интересует в первую очередь влияние турбулентных флуктуаций давления на рассеяние звука, положим $V_{0i}=0$ (отсутствие доплеровского сдвига в рассеянии) и $p_0=\mathrm{const}$, $T_0=\mathrm{const}$ (рассеяние в небольшом объеме, нет зависимости интенсивности рассеяния от температурной стратификации атмосферы — рефракции акустических волн).

Считая воздух идеальным газом, запишем выражение для энтропии: $S=C_v\ln p-C_p\ln\rho$, где C_v и C_p — удельные теплоемкости при постоянном объеме и давлении ($C_p/C_v=\gamma$). Уравнение адиабатичности для акустической компоненты

$$\frac{dS}{dt}=\frac{\partial S}{\partial t}+(\boldsymbol{V},\nabla)S=0 \tag{3}$$

замыкает систему уравнений (1), (2), если считать поля турбулентных флуктуаций заданными. Из (3) следует

$$\frac{d\ln\rho}{dt}=\frac{1}{\gamma}\frac{d\ln p}{dt} \tag{4}$$

и

$$\frac{1}{\gamma p}\frac{dp}{dt}=-\operatorname{div}\boldsymbol{V}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}=-(\boldsymbol{V}\nabla)\boldsymbol{V}-R_\mu T\nabla\ln p. \tag{6}$$

Выразим теперь термодинамическую температуру T через потенциальную температуру θ и давление, поскольку потенциальная температура не меняется в звуковой волне и $\theta_a=0$, а $\theta=\theta_0+\theta'$. Тогда $R_\mu T=\frac{c_0^2}{\gamma}\frac{\theta}{\theta_0}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\varkappa}$, где $\varkappa=R_\mu/C_p$, а $c_0^2=\gamma R_\mu\theta_0$. Или $R_\mu T=\frac{c_0^2}{\gamma}(1+T')\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\varkappa}$, где $T'=\theta'/\theta_0$. Аналогично обозначим $P'=p'/p_0$ и $P=p_a/p_0$, в соответствии с обозначениями Татарского [5]. Отметим сразу, что T' в этой части работы описывает относительные флуктуации потенциальной, а не термодинамической температуры.

Тогда из первого уравнения системы (5) получаем

$$\frac{d(p_a+p')}{dt}=-\gamma(p_0+p_a+p')\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}+\frac{\partial \xi_i}{\partial x_i}\right), \tag{7}$$

или

$$\frac{\partial(P+P')}{\partial t}+(u_i+\xi_i)\frac{\partial(P+P')}{\partial x_i}=$$
$$=-\gamma\frac{\partial u_i}{\partial x_i}-\gamma\frac{\partial \xi_i}{\partial x_i}-\gamma(P+P')\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}+\frac{\partial \xi_i}{\partial x_i}\right). \tag{8}$$

Линеаризуем уравнения относительно акустических переменных и отбросим члены, содержащие лишь турбулентные величины, так как они будут скомпенсированы в силу тех же уравнений движения (без акустических составляющих). В следующем разделе эти члены будут рассмотрены подробнее. Отметим лишь, что уравнения для турбулентных компонент замыкаются дополнительным условием $\operatorname{div}\boldsymbol{u}=0$. Тогда

$$\frac{\partial(P+P')}{\partial t}+u_i\frac{\partial P}{\partial x_i}+\xi_i\frac{\partial P'}{\partial x_i}=-\gamma\frac{\partial \xi_i}{\partial x_i}-\gamma P'\frac{\partial \xi_i}{\partial x_i}. \tag{9}$$

Будем считать, что акустические величины зависят от времени посредством множителя $\exp(-i\omega t)$ (волны в комплексном представлении), и период этих волн значительно меньше характерного времени изменения турбулентных флуктуаций такого же пространственного масштаба. Это означает, что в сумме акустической и турбулентной составляющих турбулентная часть описывает флуктуации, усредненные за время много больше периода акустических колебаний (для акустических колебаний инерционного масштаба длин волн $\nu\sim 1$ кГц), поэтому $\left|\frac{\partial P'}{\partial t}\right|\ll\left|\frac{\partial P}{\partial t}\right|$. Тогда

$$i\omega P=u_i\frac{\partial P}{\partial x_i}+\xi_i\frac{\partial P'}{\partial x_i}+\gamma\frac{\partial \xi_i}{\partial x_i}+\gamma P'\frac{\partial \xi_i}{\partial x_i}. \tag{10}$$

Поступая аналогичным образом со вторым уравнением системы (6), получаем

$$\frac{\partial(u_i+\xi_i)}{\partial t}=-(u_k+\xi_k)\frac{\partial(u_i+\xi_i)}{\partial x_k}-$$
$$-\frac{c_0^2}{\gamma}(1+T')(1+P+P')^{\varkappa-1}\frac{\partial(1+P+P')}{\partial x_i}. \tag{11}$$

Заносим скобку с давлением под производную и используем волновое представление для акустической компоненты. Получаем

$$\left(-i\omega\xi+u_k\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}+\xi_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)=-\frac{c_0^2}{\gamma\varkappa}(1+T')\frac{\partial(1+P+P')^{\varkappa}}{\partial x_i}, \tag{12}$$

а линеаризуя это уравнение относительно турбулентных флуктуаций, получим

$$\left(-i\omega\xi+u_k\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}+\xi_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)=-\frac{c_0^2}{\gamma\varkappa}(1+T')\frac{\partial(1+\varkappa P+\varkappa P')}{\partial x_i}, \tag{13}$$

или

$$i\omega\xi_i=u_k\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}+\xi_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{c_0^2}{\gamma}\frac{\partial P}{\partial x_i}+\frac{c_0^2}{\gamma}T'\frac{\partial P}{\partial x_i}. \tag{14}$$

Выше мы учли, что члены, содержащие только турбулентные компоненты, сократятся в силу уравнений движения (если акустические возмущения по амплитуде значительно меньше турбулентных).

Возьмем дивергенцию от (14):

$$i\omega\frac{\partial\xi_i}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_k\frac{\partial\xi_i}{\partial x_k}+\xi_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)+\frac{c_0^2}{\gamma}\Delta P+\frac{c_0^2}{\gamma}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(T'\frac{\partial P}{\partial x_i}\right). \tag{15}$$

Умножим (10) на $i\omega$:

$$-\omega^2P=i\omega u_i\frac{\partial P}{\partial x_i}+i\omega\xi_i\frac{\partial P'}{\partial x_i}+i\omega\gamma\frac{\partial\xi_i}{\partial x_i}+i\omega\gamma P'\frac{\partial\xi_i}{\partial x_i} \tag{16}$$

и подставим (14), отбрасывая величины второго порядка малости по $\boldsymbol{u}$, T', P' (произведения, содержащие три переменные). Получим

$$-\omega^2P=i\omega u_i\frac{\partial P}{\partial x_i}+\frac{c_0^2}{\gamma}\frac{\partial P}{\partial x_i}\frac{\partial P'}{\partial x_i}+i\omega\gamma\frac{\partial\xi_i}{\partial x_i}+c_0^2P'\Delta P, \tag{17}$$

а подставляя (15) в (17):

$$-\omega^2P=i\omega u_i\frac{\partial P}{\partial x_i}+\frac{c_0^2}{\gamma}\frac{\partial P}{\partial x_i}\frac{\partial P'}{\partial x_i}+\gamma\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_k\frac{\partial\xi_i}{\partial x_k}+\xi_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)+ \\ +c_0^2\Delta P+c_0^2\frac{\partial}{\partial x_i}\left(T'\frac{\partial P}{\partial x_i}\right)+c_0^2P'\Delta P, \tag{18}$$

или (еще раз используя (14) и отбрасывая члены следующего порядка малости)

$$c_0^2\Delta P+\omega^2P=-i\omega u_i\frac{\partial P}{\partial x_i}-\frac{c_0^2}{\gamma}\frac{\partial P}{\partial x_i}\frac{\partial P'}{\partial x_i}+ \\ +\frac{ic_0^2}{\omega}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_k\frac{\partial^2P}{\partial x_i\partial x_k}+\frac{\partial P}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)-c_0^2\frac{\partial}{\partial x_i}\left(T'\frac{\partial P}{\partial x_i}\right)-c_0^2P'\Delta P. \tag{19}$$

Используем цепочку равенств

$$-i\omega u_i\frac{\partial P}{\partial x_i}+\frac{ic_0^2}{\omega}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[u_k\frac{\partial^2P}{\partial x_i\partial x_k}+\frac{\partial P}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right]= \\ =\frac{ic_0^2}{\omega}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left[\frac{\partial}{\partial x_k}\left(u_k\frac{\partial P}{\partial x_i}\right)+\frac{\partial P}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right]-\frac{\omega^2}{c_0^2}(u_iP)\right)= \\ =\frac{ic_0^2}{\omega}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_k}\left[u_k\frac{\partial P}{\partial x_i}+u_i\frac{\partial P}{\partial x_k}\right]-\frac{ic_0^2}{\omega}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[u_i\left(\Delta P+\frac{\omega^2}{c_0^2}P\right)\right], \tag{20}$$

отметим, что $\Delta P+\frac{\omega^2}{c_0^2}P$ линейно по малым величинам $\boldsymbol{u}$, T', P', поэтому, отбрасывая выражения второго порядка малости, в итоге получаем

$$c_0^2\Delta P+\omega^2P=-\frac{c_0^2}{\gamma}\frac{\partial P}{\partial x_i}\frac{\partial P'}{\partial x_i}-\frac{2c_0^2}{i\omega}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_k}\left(u_i\frac{\partial P}{\partial x_k}\right)- \\ -c_0^2\frac{\partial}{\partial x_i}\left(T'\frac{\partial P}{\partial x_i}\right)-c_0^2P'\Delta P, \tag{21}$$

или (используя дисперсионное соотношение $\omega^2=k^2c_0^2$)

$$\Delta P+k^2P=-\frac{2}{i\omega}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_k}\left(u_i\frac{\partial P}{\partial x_k}\right)-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(T'\frac{\partial P}{\partial x_i}\right)- \\ -\frac{1}{\gamma}\frac{\partial P}{\partial x_i}\frac{\partial P'}{\partial x_i}-P'\Delta P. \tag{22}$$

Это уравнение, правая часть которого выписана с точностью до членов первого порядка по турбулентным флуктуациям $\boldsymbol{u}$, T', P' и описывает распространение звуковых волн в турбулентной атмосфере.

Найдем выражение для рассеянного поля, ориентируясь на выкладки Татарского [5]. Положим $P=P_0+P_s$ где P_0 — падающая волна, а P_s — рассеянное поле. Для слабого рассеяния (в линейном приближении) в правой части (22) можно положить $P=P_0$. Так как $\Delta P_0+k^2P_0=0$, получаем

$$\Delta P_s+k^2P_s=-\frac{2}{i\omega}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_k}\left(u_i\frac{\partial P_0}{\partial x_k}\right)-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(T'\frac{\partial P_0}{\partial x_i}\right)- \\ -\frac{1}{\gamma}\frac{\partial P_0}{\partial x_i}\frac{\partial P'}{\partial x_i}-P'\Delta P_0. \tag{23}$$

Решение уравнения (23) имеет вид

$$P_s(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi}\int\limits_V d^3r'\,\frac{e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\left[\frac{2}{i\omega}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_k}\left(u_i\frac{\partial P_0}{\partial x_k}\right)+ \\ +\frac{\partial}{\partial x_i}\left(T'\frac{\partial P_0}{\partial x_i}\right)+\frac{1}{\gamma}\frac{\partial P_0}{\partial x_i}\frac{\partial P'}{\partial x_i}+P'\Delta P_0\right]. \tag{24}$$

Пусть $P_0(\boldsymbol{r}')=A_0e^{i\boldsymbol{kr}'}$. Сделаем приближение малости рассеивающего объема:

$$\frac{e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\approx\frac{e^{ikr}}{r}e^{-ik\boldsymbol{nr}'}, \tag{25}$$

где $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор вдоль $\boldsymbol{r}$ (в направлении рассеянной волны). Преобразуем интеграл (24) по теореме Гаусса, пренебрегая поверхностными интегралами, т. е. считая поверхностные эффекты малыми по сравнению с объемными. Тогда

$$P_s(\boldsymbol{r})=\frac{iA_0e^{ikr}}{4\pi r}\int\limits_V d^3r'\,e^{-ik\mathbf{n}\boldsymbol{r}'}\left[\frac{2}{i\omega}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\left(u_ik_je^{i\mathbf{k}\boldsymbol{r}'}\right)+ \\ +\frac{\partial}{\partial x_i}\left(T'k_ie^{i\mathbf{k}\boldsymbol{r}'}\right)+\frac{1}{\gamma}k_ie^{i\mathbf{k}\boldsymbol{r}'}\frac{\partial P'}{\partial x_i}+iP'k^2e^{i\mathbf{k}\boldsymbol{r}'}\right]= \\ =-\frac{A_0e^{ikr}}{4\pi r}\int\limits_V d^3r'\,e^{i\mathbf{K}\boldsymbol{r}'}\left[kn_ik_iT'+2kn_jk_jn_i\frac{u_i}{c_0}+ \\ +\frac{1}{\gamma}k_i(kn_i-k_i+\gamma k_i)P'\right], \tag{26}$$

где $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{k}-k\boldsymbol{n}$. Введем также дополнительный вектор $\boldsymbol{K}'$: $K_i'=kn_i+(\gamma-1)k_i$.

Как известно, средний вектор плотности потока энергии рассеянного излучения [5]:

$$\boldsymbol{S}=\frac{\rho_0c_0^3}{2k}Im[P^*\nabla P]=\frac{1}{2}\rho_0c_0^3\boldsymbol{n}\langle P^*(\boldsymbol{r})P(\boldsymbol{r})\rangle. \tag{27}$$

Предполагая, что мелкомасштабная турбулентность статистически изотропна, обозначим:

$$\begin{aligned}
&\langle T'(\boldsymbol{r}_1)T'(\boldsymbol{r}_2)\rangle=B_T(\rho), && \langle T'(\boldsymbol{r}_1)P'(\boldsymbol{r}_2)\rangle=B_{TP}(\rho),\\
&\langle T'(\boldsymbol{r}_1)u_i(\boldsymbol{r}_2)\rangle=0, && \langle P'(\boldsymbol{r}_1)P'(\boldsymbol{r}_2)\rangle=B_P(\rho),\\
&\langle u_j(\boldsymbol{r}_1)u_i(\boldsymbol{r}_2)\rangle=c_0^2B_{ij}(\rho), && \langle P'(\boldsymbol{r}_1)u_i(\boldsymbol{r}_2)\rangle=0,
\end{aligned} \tag{28}$$

где $\rho=|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|$. Получаем

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}\frac{\rho_0 c_0^3}{2}\frac{A_0^2}{16\pi^2 r^2}V\int\limits_V e^{i\boldsymbol{K}\rho}\Big[k^2(\mathbf{kn})^2\left(B_T + k^2 4 n_i n_j B_{ij}\right) + \\ + (\mathbf{K}'\mathbf{k})^2 B_P - 2(\mathbf{K}'\mathbf{k})(\mathbf{kn})B_{TP}\Big]d^3\rho. \quad (29)$$

В традиционных обозначениях Фурье-образов корреляций

$$\int\limits_V e^{i\mathbf{K}\rho}B_T\,d^3\rho = (2\pi)^3\Phi_T(K), \quad \int\limits_V e^{i\mathbf{K}\rho}B_{ij}\,d^3\rho = (2\pi)^3\Phi_{ij}(K). \quad (30)$$

Обозначим по аналогии (все флуктуации относительные)

$$\int\limits_V e^{i\mathbf{K}\rho}B_P\,d^3\rho = (2\pi)^3\Phi_P(K), \quad \int\limits_V e^{i\boldsymbol{K}\rho}B_{TP}\,d^3\rho = (2\pi)^3\Phi_{TP}(K). \quad (31)$$

Тогда

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}\frac{\rho_0 c_0^3}{2}\frac{A_0^2}{16\pi^2 r^2}V 8\pi^3\Big[k^2\Phi_T(\boldsymbol{K})(\boldsymbol{kn})^2 + \\ + 4k^2\Phi_{ij}(\boldsymbol{K})(\boldsymbol{kn})^2 n_i n_j + \Phi_P(\boldsymbol{K})(\boldsymbol{K}'\boldsymbol{k})^2 - 2\Phi_{TP}(\boldsymbol{K})(\boldsymbol{K}'\boldsymbol{k})(\boldsymbol{kn})\Big]. \quad (32)$$

Обозначим теперь через θ угол рассеяния (чтобы обозначения совпадали с классической формулой Татарского). Тогда $\boldsymbol{kn} = k\cos\theta$ и

$$n_i n_j \Phi_{ij}(\mathbf{K}) = \frac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{4\pi K^2}\frac{E(K)}{c_0^2}, \quad (33)$$

а $\boldsymbol{K}'\boldsymbol{k} = k^2(cos\theta + \gamma - 1)$. Окончательно получаем

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}\frac{\pi}{4}\rho_0 c_0^3\frac{k^4 A_0^2}{r^2}\left[\Phi_T(\boldsymbol{K})\cos^2\theta + \frac{E(K)}{c_0^2 K^2}\frac{\cos^2\theta\cos^2\frac{\theta}{2}}{\pi} + \\ + \Phi_P(\boldsymbol{K})(cos\theta + \gamma - 1)^2 - 2\Phi_{TP}(\boldsymbol{K})(cos\theta + \gamma - 1)\cos\theta\right]. \quad (34)$$

Члены во второй строке дополняют формулу Татарского, но Φ_T теперь описывает относительные флуктуации потенциальной, а не термодинамической температуры.

2. Турбулентные флуктуации давления и энтропии. Формулы Обухова

Вполне естественно, что уточненная формула Татарского совпадает с оригинальной в пренебрежении флуктуациями давления ($P' = 0$), которые меньше температурных, если говорить об относительных величинах. Однако учет флуктуаций давления связывает формулу Татарского с формулой Обухова, описывающей связь флуктуаций давления с флуктуациями скорости [7]. Добавление же в уравнение связи новых членов качественно изменяет соотношение между флуктуациями скорости и флуктуациями термодинамических величин: они становятся относительно независимыми.

Чтобы показать необходимость такой независимости, повторим еще раз вывод А.М. Обуховым уравнения связи структурных функций термодинамических характеристик и скорости для модели локально изотропной турбулентности, но с учетом сжимаемости воздуха. Запишем снова упрощенное уравнение Эйлера:

$$\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial t} + (\boldsymbol{V}\nabla)\boldsymbol{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\Phi; \quad (35)$$

здесь Φ — потенциал внешних сил (геопотенциал). Влиянием силы Кориолиса на мелкомасштабные флуктуации пока, для простоты, пренебрегаем. Выразим силу градиента давления через две температуры:

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p = -R_\mu T\nabla\ln\left(\frac{T}{\theta}\right)^{1/\varkappa} = -C_p(\nabla T - T\nabla\ln\theta), \quad (36)$$

или

$$\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial t} + (\boldsymbol{V}\nabla)\boldsymbol{V} = -C_p\nabla T + T\nabla S - \nabla\Phi. \quad (37)$$

Даже если рассматривать только мелкомасштабные флуктуации и считать пока, что $\nabla\Phi = \mathrm{const} = -C_p\nabla T_0$, то уже это уравнение показывает, что флуктуации температуры нельзя просто заменить флуктуациями потенциальной температуры (или энтропии), так как они связаны через флуктуации скоростей. Измерения турбулентности в пограничном слое [17] показывают, что интенсивности флуктуаций скорости и флуктуаций температуры относительно независимы, а это означает, что флуктуации термодинамической и потенциальной температуры имеют один масштаб, но не связаны функционально, иначе при отбрасывании одного из членов возникала бы одновременная корреляционная связь между интенсивностями флуктуаций двух других, подобная формуле Обухова [7].

В самом деле, если просто пренебречь флуктуациями энтропии (считать $S = \mathrm{const}$), и полагая пока $V_{0i} = 0$, для турбулентных флуктуаций скорости имеем:

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}, \nabla)\boldsymbol{u} = -C_p\nabla T. \quad (38)$$

Здесь уже T — абсолютные значения турбулентных флуктуаций термодинамической температуры. Если взять дивергенцию от правой и левой частей, то с учетом несжимаемости турбулентного движения $\operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0$, получим

$$-C_p\Delta T = \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\frac{\partial v_k}{\partial x_i}. \quad (39)$$

Здесь по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Полагая, что поля турбулентных флуктуаций скоростей и температур статистически однородны и изотропны (в инерционном интервале масштабов), умножим оператор Лапласа от температуры в точке M_1 на такое же выражение в точке M_2 и усредним результат. Обозначим структурную функцию температуры $D_T(\rho) = \langle(T(M_2) - T(M_1))^2\rangle$, так что $\Delta^2 D_T(\rho) = -2\Delta^2\langle T(M_1)T(M_2)\rangle$, где ρ — расстояние между точками наблюдений, которое, конечно, не следует путать с плотностью. Такое обозначение использовано здесь для сопоставления с формулой Обухова [7]. Пользуясь условием статистической однородности турбулентных полей, получаем

$$\Delta^2\langle T(M_1)T(M_2)\rangle = \\ = \frac{1}{C_p^2}\left\langle\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(M_1)\frac{\partial v_j}{\partial x_i}(M_1)\frac{\partial v_k}{\partial x_l}(M_2)\frac{\partial v_l}{\partial x_k}(M_2)\right\rangle. \quad (40)$$

Дифференцирование в левой части проводится по координатам вектора, соединяющего точки M_1 и M_2. Тогда

$$\Delta^2 D_T = \left(\frac{\partial^4}{\partial\rho^4} + \frac{4}{\rho}\frac{\partial^3}{\partial\rho^3}\right) D_T = \\ = -\frac{2}{C_p^2}\left\langle \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(M_1)\frac{\partial v_j}{\partial x_i}(M_1)\frac{\partial v_k}{\partial x_l}(M_2)\frac{\partial v_l}{\partial x_k}(M_2)\right\rangle. \quad (41)$$

Полагая (аппроксимируя) случайное поле скоростей гауссовым, можно выразить четвертые моменты скорости через вторые [7], и

$$\Delta^2 D_T(\rho) = -\frac{1}{C_p^2}\frac{\partial^2 D^{\beta\delta}}{\partial\xi^\alpha\partial\xi^\gamma}\frac{\partial^2 D^{\alpha\gamma}}{\partial\xi^\beta\partial\xi^\delta}, \quad (42)$$

где

$$D^{\alpha\beta} = \left\langle (v^\alpha(M_2) - (v^\alpha(M_1))(v^\beta(M_2) - (v^\beta(M_1))\right\rangle = \\ = D_{nn}(\rho)\delta^{\alpha\beta} + \left(\frac{D_{nn} - D_{ll}}{\rho^2}\right)\xi^\alpha\xi^\beta. \quad (43)$$

Здесь ξ^i — единичные орты, а D_{nn} и D_{ll} — продольная и поперечная структурные функции поля скоростей. Пользуясь формулами для поперечной и продольной структурной функции статистически однородного и изотропного поля [3], получаем связь структурных функций температуры и скорости:

$$D_T = \frac{1}{C_p^2}[D_{ll}(\rho)]^2, \quad (44)$$

что и означает одновременный рост интенсивности этих флуктуаций. Однако, как было сказано, измерения в естественных условиях в атмосферном пограничном слое показывают, что такой одновременной статистически устойчивой связи между интенсивностью флуктуаций температуры и скорости не наблюдается.

Приближение $S = \text{const}$ является довольно грубым. Независимость (функциональная) флуктуаций потенциальной и термодинамической температуры приводит к бароклинности турбулентных флуктуаций, что в свою очередь способствует генерации турбулентных вихрей. В самом деле, вектор бароклинности

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot}\left(-\frac{1}{\rho}\nabla p\right) = C_p \operatorname{rot}(-\nabla T + T\nabla S) = C_p \nabla T \times \nabla S, \quad (45)$$

поэтому флуктуации потенциальной температуры (или энтропии) нельзя сравнивать по амплитуде с флуктуациями термодинамической температуры (и отбрасывать малые компоненты), так как функциональная независимость этих двух температур является «источником» мелкомасштабной завихренности турбулентных течений в АПС (более крупномасштабная связана, очевидно, со средним течением и его вертикальным градиентом).

3. Энтропия и функция Ляпунова

Разумно предположить, что именно энтропия, а не давление является той скалярной характеристикой турбулентности, флуктуации которой выравниваются наиболее быстро среди других термодинамических характеристик: p, ρ, T, поскольку в однородной по энтропии атмосфере адиабатические флуктуации — звуковые волны — затухают не сразу. При этом $(\nabla S)^2$ принимает минимальное значение в статистически стационарном пределе, не равное нулю при генерации турбулентности из внешних источников. На это указывают и хорошо известные результаты анализа флуктуаций термодинамических характеристик в классической статистической физике [15]. Если считать, что выравнивание неоднородностей энтропии на малых масштабах происходит из-за турбулентного движения частиц жидкости, то можно предположить, что скорость изменения энтропии «частицы жидкости» единичной массы (в «физически бесконечно малом объеме») при отсутствии источников пропорциональна его лапласиану, поскольку это простейший оператор, который инвариантен к поворотам и сдвигам при условии локальной однородности и изотропности турбулентности. Коэффициент «диффузии» энтропии или сглаживания ее пространственных неоднородностей ниже обозначим для отличия от коэффициента температуропроводности как γ (это обозначение использовано в работе [17], не следует путать с соотношением C_p/C_v, введенным выше). Он может быть связан также и с кинематической вязкостью среды. Чтобы не путать пока термодинамическую энтропию с характеристикой турбулентности, выражающей экстремальные и инвариантные свойства турбулентного перемешивания, обозначим эту скалярную величину как ψ. Смысл такого обозначения станет очевидным чуть ниже.

Уравнение для турбулентных микромасштабных флуктуаций скалярной характеристики ψ тогда будет аналогично уравнению для флуктуаций температуры. В самом деле, если

$$\frac{d\psi}{dt} = \gamma\Delta\psi, \quad (46)$$

то, учитывая несжимаемость жидкости и считая коэффициент «перемешивания» (диффузии) $\gamma = \text{const}$, можно переписать уравнение (46) в виде

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\psi v_k - \gamma\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\right) = 0. \quad (47)$$

Умножая теперь (47) на значение ψ в той же точке и статистически усредняя ($\langle\cdot\rangle$), получим

$$\left\langle\psi\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\rangle + \left\langle\psi\frac{\partial\psi v_k}{\partial x_k}\right\rangle - \gamma\langle\psi\Delta\psi\rangle = 0. \quad (48)$$

Используя свойство несжимаемости турбулентных флуктуаций скоростей, легко увидеть, что

$$\left\langle\psi\frac{\partial\psi v_k}{\partial x_k}\right\rangle = \left\langle\psi v_k\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\right\rangle = \left\langle v_k\frac{1}{2}\frac{\partial\psi^2}{\partial x_k}\right\rangle = \frac{\partial}{\partial x_k}\left\langle\frac{\psi^2 v_k}{2}\right\rangle, \quad (49)$$

Также очевидно, что

$$\gamma\langle\psi\Delta\psi\rangle = \gamma\left[\frac{\partial}{\partial x_k}\langle\psi\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\rangle - \left\langle\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\right)^2\right\rangle\right]. \quad (50)$$

Поэтому, подставляя (49) и (50) в (48), получаем

$$\left\langle\psi\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\rangle + \gamma\left\langle\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\right)^2\right\rangle + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{1}{2}\langle\psi^2 v_k\rangle - \frac{\gamma}{2}\left\langle\frac{\partial\psi^2}{\partial x_k}\right\rangle\right] = 0. \quad (51)$$

Но, согласно теореме о некоррелированности однородного и изотропного случайного поля скоростей со скалярным полем, первый член в квадратных скобках равен нулю. Второй член также равен нулю в силу однородности флуктуации ψ ($\langle\psi^2\rangle = \text{const}$). Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\langle\psi^2\rangle}{2} = -\gamma\langle(\nabla\psi)^2\rangle. \tag{52}$$

Поскольку уравнение (46) не включало источников поддержания флуктуаций ψ, то и (52) описывает процесс затухания флуктуаций ψ со временем. Эта формула может интерпретироваться и как определение ψ: среди всех скалярных термодинамических характеристик турбулентной среды функция ψ обладает свойством наиболее «быстрого» пространственного выравнивания, если ψ имеет наибольший коэффициент «диффузии» γ. При наличии внешних источников турбулентного перемешивания, не обязательно тепловых, в стационарном пределе среднее значение $(\nabla\psi)^2$ определяется интенсивностью этих источников, а величина ψ^2 принимает статистически стационарное значение в каждой пространственной точке.

Для случайного поля среднее значение ψ^2 может интерпретироваться и как плотность вероятности распределения частиц жидкости (одинаковой массы) в координатном пространстве, в том смысле, что для однородного случайного поля эта величина имеет постоянное значение, а для локально однородного $(\nabla\psi)^2 \to \min$ по вероятности. Коэффициент «диффузии» или перемешивания γ также характеризует время корреляции τ турбулентных флуктуаций с пространственным масштабом λ: $\tau \sim \frac{\lambda^2}{\gamma}$. Общее распределение флуктуаций скалярной характеристики ψ по спектру определяет характерное время корреляции турбулентных флуктуаций τ_0, так что измерения через интервалы $\Delta t \gg \tau_0$ могут рассматриваться как независимые. Функция ψ является «почти детерминированной» функцией координат (т. е. функцией имеющей в основном низкочастотную и крупномасштабную динамическую изменчивость), а стационарность понимается как возможность рассматривать флуктуации ψ в разные моменты времени реализациями стационарного случайного процесса и среднее по времени интерпретировать как среднее по ансамблю (эргодичность флуктуаций ψ).

Заключение

Проведенный анализ показал, что взаимодействие акустических колебаний — адиабатических движений с несжимаемыми движениями, которые обычно и называют «турбулентными», хранит еще много особенностей, которые могут ускользать при использовании традиционных приближений. Так, например, турбулентные температурные флуктуации, рассмотренные Татарским, это, по-существу, колебания потенциальной температуры, так как они не включают быстрые адиабатические движения и приводятся к среднему давлению в области рассеяния.

Значимость добавленных членов в формуле Татарского быстро возрастает с ростом масштаба адиабатических колебаний, так как спектр турбулентных колебаний давления быстро падает с увеличением волнового числа [10]. Так, анизотропный градиент давления, связанный с геопотенциалом (см. формулу (37)), или термическая стратификация пограничного слоя и горизонтальные волны температуры/энтропии приводят к появлению новых добавочных членов в уравнении Эйлера для турбулентных пульсаций скорости и к завихренности бароклинного турбулентного движения [16].

Адиабатические колебания и турбулентные несжимаемые движения, несомненно, представляют собой две взаимосвязанные компоненты турбулентности, т. е. перемешивания «частиц жидкости». Обмен между этими частицами импульсом и энергией происходит за счет или при непосредственном участии адиабатических колебаний, причем этот обмен имеет форму вероятностного взаимодействия и не может быть описан только динамическим образом.

Список литературы

1. *Обухов А.М.* Турбулентность и динамика атмосферы. М., 1981.
2. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. Ч. 1. М., 1965.
3. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. Ч. 2. М., 1967.
4. *Ламли Дж.Л., Пановский Х.А.* Структура атмосферной турбулентности. М., 1966.
5. *Татарский В.И.* Распространение волн в турбулентной атмосфере. М., 1967.
6. *Осташев В.Е.* Распространение звука в движущихся средах. М., 1992.
7. *Обухов А.М.* // ДАН. 1949. **66**, № 1. С. 17.
8. *Татарский В.И.* // ЖЭТФ. 1953. **25**, № 1. С. 74.
9. *Каллистратова М.А.* // ДАН. 1959. **125**, № 1. С. 69.
10. *Голицын Г.С.* // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1964. № 8. С. 1253.
11. *Kallistratova M.A., Coulter R.L.* // Meteorol. Atmos. Physics. 2004. **85**. P. 21.
12. *Rusakov Y.S.* // Meteorol. Z.. 2007. **16**, N 4. P. 349.
13. *Beyrich F., Weill A.* // Bound. Layer Met. 1993. **63**. P. 97.
14. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика М., 1988.
15. *Климонтович Ю.Л.* Статистическая физика. М., 1982.
16. *Пономарев В.М., Чхетиани О.Г.* // Изв. РАН. Физ. атм. океана. 2005. **41**, № 5. С. 418.
17. *Юшков В.П.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2011. № 3. С. 100.

The sound scattering on turbulent fluctuations of pressure and entropy

E. V. Yushkov, V. P. Yushkov

Department of Physics of Atmosphere, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.
E-mail: yushkov@phys.msu.ru.

A well-known Tatarskij formula of the sound scattering in a turbulent atmosphere was analyzed. Appearance of additional terms in the classical formula is shown in the assumption that the acoustic fluctuations are adiabatic and the turbulent ones are incompressible. Comparison of the thermodynamic and potential temperature turbulent fluctuations shows that Obukhov formula, which describes the relationship of the pressure and velocity turbulent fluctuations, is changed in the atmosphere. Finally, a formula for entropy fluctuations is deduced by analogy with the formula for small-scale isotropic temperature fluctuations and the assumption that the thermodynamic entropy can be proportional to the informational one is discussed.

Keywords: turbulence, entropy, pressure, acoustic waves, compressibility, baroclinicity.
PACS: 47.27.nb, 43.28.+h, 92.60.hk.
Received 10 February 2011.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 6(2011).

Сведения об авторах

1. Юшков Егор Владиславович — аспирант; тел.: (495) 939-28-77, e-mail: yushkov@phys.msu.ru.
2. Юшков Владислав Пролетарьевич — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник; тел.: (495) 939-15-41, e-mail: yushkov@phys.msu.ru.