

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

**Математическое моделирование цилиндрического волновода
с деформацией боковой поверхности**

А. Н. Боголюбов^а, А. И. Ерохин, И. Е. Могилевский^б

*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет,
кафедра математики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.*

E-mail: ^аbogan7@yandex.ru, ^бmogilev@phys.msu.ru

Статья поступила 17.05.2011, подписана в печать 28.06.2011

Рассмотрена математическая модель волновода переменного поперечного сечения с входящими углами. Исследовано влияние входящих углов на модовую структуру поля волновода.

Ключевые слова: волновод, входящий угол, метод сечений.

УДК: 621.372.829. PACS: 41.20.Jb.

Введение

Волноводы с входящими углами находят широкое применение в микроволновых устройствах [1]. Учитывая большую трудоемкость и высокую стоимость производства таких систем, а также резкий рост скорости работы компьютерных машин, задача математического моделирования волноводящих структур сложной формы стала весьма актуальной.

В настоящей работе рассматривается математическая модель цилиндрического волновода переменного сечения с входящими углами.

Так как в современной литературе хорошо исследованы системы с постоянным поперечным сечением, то на сегодняшний день имеется большое количество работ, посвященных расчету собственных функций сечений с входящим углом. Одним из часто используемых методов численного решения таких задач является метод конечных элементов [2]. Асимптотическое поведение решения в окрестности угловой точки поперечного сечения может быть исследовано теоретически [3–5].

Таким образом, наличие хорошо разработанных алгоритмов построения собственных функций поперечных сечений определило использование метода сечений для расчета рассматриваемого в настоящей работе нерегулярного волновода. Метод сечений заключается в поиске решения уравнения в виде его разложения по собственным функциям поперечных сечений волновода.

1. Постановка задачи

В настоящей работе ограничимся скалярной постановкой задачи.

Рассмотрим бесконечный цилиндрический волновод круглого сечения с граничной поверхностью Σ , на которой зададим простейшее граничное условие — однородное условие Дирихле. Пусть в некоторой части волновода длиной a , которую будем называть нерегулярной, сделан вырез так, что в его поперечном сечении будет входящий острый угол. Введем цилиндрическую систему координат, начало которой поместим в середи-

ну левого торца нерегулярной части волновода, а ось Oz направим вдоль его оси.

Считаем, что слева из бесконечности падает волна с амплитудой A_{n0} и постоянной распространения вдоль оси волновода $\tilde{\gamma}_{n0}$, соответствующей n_0 -му собственному значению $\tilde{\lambda}_{n0}$ оператора Лапласа для сечения регулярной части волновода. Распространение волн можно описать с помощью краевой задачи для уравнения Гельмгольца с парциальными условиями излучения на бесконечности. Потребуем непрерывность функций u и $\frac{\partial u}{\partial z}$ на границе между регулярной частью волновода и нерегулярной, т.е. при $z=0$ и при $z=a$, а также выполнение условий Мейкснера на ребре. Волны, возникающие в волноводе, будут удовлетворять системе уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u + k^2 u(M, z) = 0, \quad M \in S_z, \quad z \in (-\infty; +\infty), \\ u|_{\Sigma} = 0, \\ u|_{z=0-0} = u|_{z=0+0}, \\ u|_{z=a-0} = u|_{z=a+0}, \\ \left. \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0-0} = \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0+0}, \\ \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=a-0} = \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=a+0}, \end{array} \right\} \quad (1) \\ u|_{z \leq 0} = A_{n0} e^{i\tilde{\gamma}_{n0} z} \tilde{\varphi}_{n0}(M) + \sum_n R_n e^{-i\tilde{\gamma}_n z} \tilde{\varphi}_n(M), \\ u|_{z \geq a} = \sum_n T_n e^{i\tilde{\gamma}_n z} \tilde{\varphi}_n(M), \end{array} \right.$$

где k^2 — постоянный коэффициент, $u(M, z) \in H^1(S_z) \forall z$.

В системе (1) используются обозначения: $\tilde{\varphi}_n \tilde{\lambda}_n$ — ортонормированные на единицу собственные функции и собственные значения поперечного сечения регулярной части волновода (без выреза), S_z — сечение волновода с координатой z , R_n и T_n — коэффициенты

отражения и прохождения n -й гармоники соответственно, $\tilde{\gamma}_{n0}^2 = k^2 - \tilde{\lambda}_{n0}$.

Преобразуем парциальные условия так, чтобы получить задачу в ограниченной области при $z \in (0; a)$. При $z \leq a$ имеем

$$u|_{z \leq 0} = A_{n0} e^{i\tilde{\gamma}_{n0} z} \tilde{\varphi}_{n0}(M) + \sum_n R_n e^{-i\tilde{\gamma}_n z} \tilde{\varphi}_n(M), \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z \leq 0} = i\tilde{\gamma}_{n0} A_{n0} e^{i\tilde{\gamma}_{n0} z} \tilde{\varphi}_{n0}(M) + \sum_n (-i)\tilde{\gamma}_n R_n e^{-i\tilde{\gamma}_n z} \tilde{\varphi}_n(M). \quad (3)$$

Домножив уравнение (2) на $\tilde{\varphi}_k$ и проинтегрировав его по сечению S_0 , получим

$$(u, \tilde{\varphi}_k)|_{S_0, z \leq 0} = A_{n0} e^{i\tilde{\gamma}_{n0} z} \delta_{n0, k} + R_k e^{-i\tilde{\gamma}_k z}. \quad (4)$$

Выразив слагаемое $R_k e^{-i\tilde{\gamma}_k z}$ из выражения (4), подставив его в (3) и положив $z = 0$, приходим к условию при $z = 0 - 0$:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0-0} = 2A_{n0} i\tilde{\gamma}_{n0} \tilde{\varphi}_{n0}(M) - \sum_n i\tilde{\gamma}_n (u, \tilde{\varphi}_n)|_{S_0} \tilde{\varphi}_n(M).$$

Учитывая граничные условия при $z = 0$, получим

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0+0} = 2A_{n0} i\tilde{\gamma}_{n0} \tilde{\varphi}_{n0}(M) - \sum_n i\tilde{\gamma}_n (u, \tilde{\varphi}_n)|_{S_0} \tilde{\varphi}_n(M).$$

Аналогично получается граничное условие при $z = a - 0$:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=a-0} = \sum_n i\tilde{\gamma}_n (u, \tilde{\varphi}_n)|_{S_a} \tilde{\varphi}_n(M).$$

Так как сечение регулярной части волновода есть круг, то S_0 и S_a суть круги.

Таким образом, получена следующая задача:

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u(M, z) = 0, & M \in S_z, \quad z \in (0; a), \\ u|_{\Sigma} = 0, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = 2A_{n0} i\tilde{\gamma}_{n0} \tilde{\varphi}_{n0}(M) - \sum_n i\tilde{\gamma}_n (u, \tilde{\varphi}_n)|_{S_0} \tilde{\varphi}_n(M), \\ \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=a} = \sum_n i\tilde{\gamma}_n (u, \tilde{\varphi}_n)|_{S_a} \tilde{\varphi}_n(M). \end{cases} \quad (5)$$

2. Численное решение задачи

Будем искать решение в виде его конечного разложения по собственным функциям поперечного сечения нерегулярной части волновода:

$$u^N = \sum_{n=1}^N C_n(z) \varphi_n(M, z), \quad z \in (0; a),$$

где $\varphi_n(M, z)$ — ортонормированные собственные функции оператора Лапласа для сечения S_z .

Будем считать, что сечение нерегулярной части волновода постоянно, тогда $\varphi_n(M, z) \equiv \varphi_n(M)$, $\lambda_n(z) \equiv \lambda_n = \text{const}$ и

$$u^N = \sum_{n=1}^N C_n(z) \varphi_n(M). \quad (6)$$

Подставим искомое решение вида (6) в систему (5), домножим его скалярно на $\varphi_n(M, z)$, тогда уравнение для коэффициентов $C_n(z)$ примет вид

$$C_n''(z) + \gamma_n^2 C_n(z) = 0, \quad n = 1, \dots, N,$$

где $\gamma_n^2 = k^2 - \lambda_n$. Для граничного условия при $z = 0$ получим выражение

$$\sum_{n=1}^N C_n'(0) \varphi_n(M) = 2A_{n0} i\tilde{\gamma}_{n0} \tilde{\varphi}_{n0}(M) - \sum_{n=1}^N i\tilde{\gamma}_n \left(\sum_{k=1}^N C_k(z) \varphi_k(M), \tilde{\varphi}_n(M) \right) \Big|_{S_0} \tilde{\varphi}_n(M). \quad (7)$$

Обозначим $(\varphi_k(M), \tilde{\varphi}_n(M))|_{S_0} = \varphi_{kn}^{S_0}$, $(\varphi_k(M), \tilde{\varphi}_n(M))|_{S_a} = \varphi_{kn}^{S_a}$. Заметим, что $\varphi_{kn}^{S_0} \neq \varphi_{nk}^{S_0}$. Тогда, домножив скалярно граничное условие (7) на φ_m , получим

$$C_m'(0) = 2A_{n0} i\tilde{\gamma}_{n0} \varphi_{mn}^{S_0} - \sum_{k=1}^N \left(\sum_{n=1}^N i\tilde{\gamma}_n \varphi_{mn}^{S_0} \varphi_{kn}^{S_0} \right) C_k(0).$$

Аналогично преобразуется второе граничное условие при $z = a$:

$$C_m'(a) = \sum_{k=1}^N \left(\sum_{n=1}^N i\tilde{\gamma}_n \varphi_{mn}^{S_a} \varphi_{kn}^{S_a} \right) C_k(a).$$

Таким образом, получена система уравнений для определения коэффициентов разложения искомого решения u

$$\begin{cases} C_m''(z) + \gamma_m^2 C_m(z) = 0, & m = 1, \dots, N, \\ C_m'(0) = 2A_{n0} i\tilde{\gamma}_{n0} \varphi_{mn}^{S_0} - \sum_{k=1}^N \left(\sum_{n=1}^N i\tilde{\gamma}_n \varphi_{mn}^{S_0} \varphi_{kn}^{S_0} \right) C_k(0), \\ C_m'(a) = \sum_{k=1}^N \left(\sum_{n=1}^N i\tilde{\gamma}_n \varphi_{mn}^{S_a} \varphi_{kn}^{S_a} \right) C_k(a). \end{cases} \quad (8)$$

Данную систему будем решать итерационным методом. Обозначим коэффициент разложения решения, полученный на p -й итерации, как $C_m^{(p)}(z)$. Для вычисления коэффициента $C_m^{(p+1)}(z)$ на $(p+1)$ -й итерации в граничных условиях системы (8) возьмем коэффициенты с другими порядковыми номерами, полученные на предыдущей p -й итерации. Тогда для нахождения $C_m^{(p+1)}(z)$ имеем систему, содержащую два граничных условия третьего рода и решаемую аналитически:

$$\begin{cases} C_m^{(p+1)''}(z) + \gamma_m^2 C_m^{(p+1)}(z) = 0, & m = 1, \dots, N, \\ C_m^{(p+1)'}(0) + \left[\sum_{n=1}^N i\tilde{\gamma}_n (\varphi_{mn}^{S_0})^2 \right] C_m^{(p+1)}(0) = \\ = 2A_{n0} i\tilde{\gamma}_{n0} \varphi_{mn}^{S_0} - \sum_{k=1, k \neq m}^N \left(\sum_{n=1}^N i\tilde{\gamma}_n \varphi_{mn}^{S_0} \varphi_{kn}^{S_0} \right) C_k^{(p)}(0), \\ C_m^{(p+1)'}(a) - \left[\sum_{n=1}^N i\tilde{\gamma}_n (\varphi_{mn}^{S_a})^2 \right] C_m^{(p+1)}(a) = \\ = \sum_{k=1, k \neq m}^N \left(\sum_{n=1}^N i\tilde{\gamma}_n \varphi_{mn}^{S_a} \varphi_{kn}^{S_a} \right) C_k^{(p)}(a). \end{cases}$$

3. Результаты

Для расчета модовой структуры волновода написана программа, использующая метод конечных элементов для расчета собственных функций и собственных значения оператора Лапласа для поперечных сечений волновода. Радиус волновода взят равным 1 см. Волновое число выбранно таким, чтобы в волноводе могли распространяться не более чем 10 мод, а именно 7.1 см^{-1} . Амплитуда падающей волны нормирована на 1. При решении задачи (8) в случае падения первых гармоник, когда частоты находятся на достаточном расстоянии от частоты отсечки, для выхода решения на стационар требовалось не более трех итераций. Вклады от последующих итераций составляли не более одного процента. Для расчета собственных функций и собственных частот требовалось порядка 5000 конечных элементов.

В качестве теста программы рассматривался случай, когда параметры входящего угла были много меньше размеров сечения. По результатам счета падающие

гармоники проходили в волноводе без искажения, что согласуется с физикой данного явления. Также во всех численных экспериментах был выполнен закон сохранения энергии.

На рис. 1 приведены результаты численного эксперимента в случае падения первой гармоники при входящем угле 0.2π глубины 1 см, т.е. для случая поперечного сечения в виде сектора с раствором 1.8π . Как видно из рисунка, наличие входящих углов приводит к частичному отражению падающей гармоники и возбуждению гармоник с отличным от падающей гармоники порядковым номером. На рис. 1, а также на других рисунках для данного порядкового номера пустой столбец обозначает амплитуду волны, бегущей вправо, а заштрихованный — влево.

На рис. 2 отображены результаты счета в случае наличия одного и двух небольших входящих углов. Наличие одного малого угла практически не влияет на прохождение первой гармоники, но добавление второго угла, даже меньшего, чем первый, приводит к частичному-

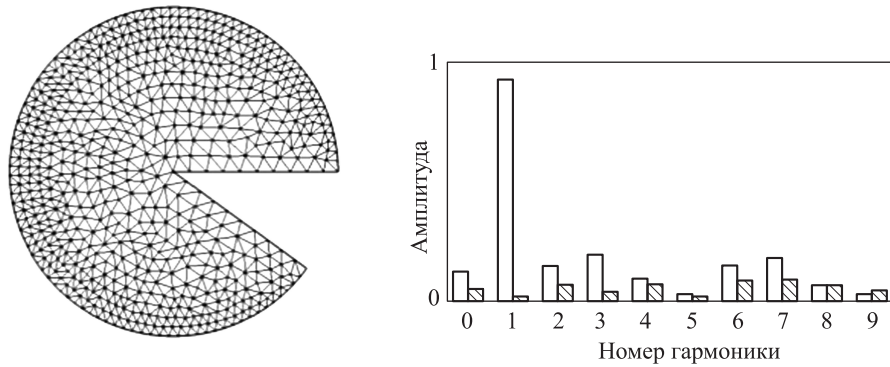


Рис. 1. Коэффициенты прохождения и отражения волн для сектора с раствором 1.8π при падении первой гармоники

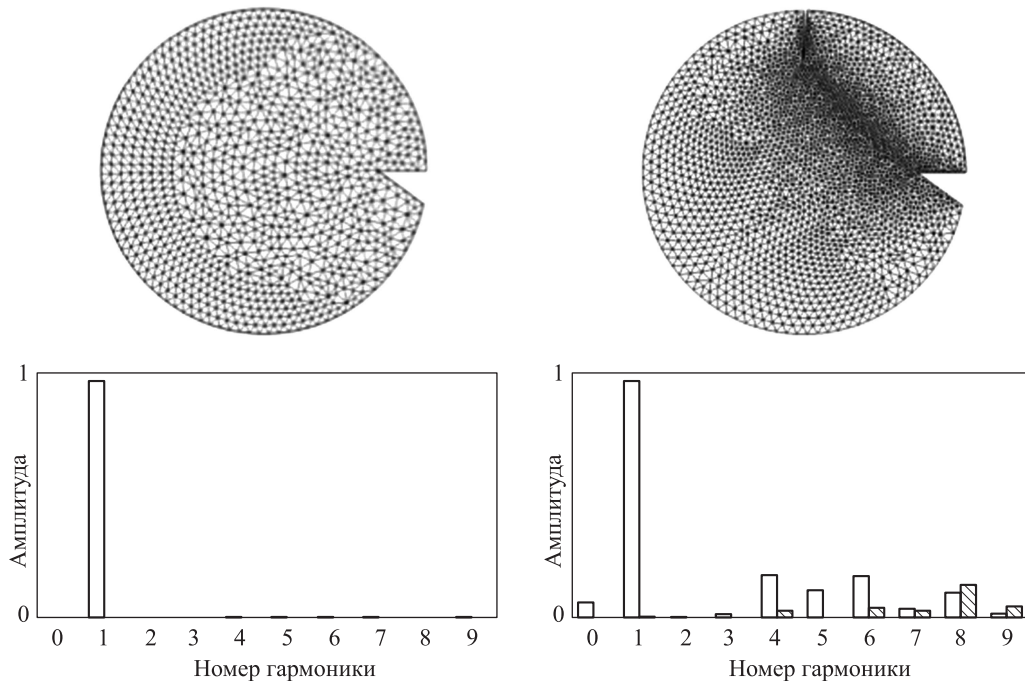


Рис. 2. Коэффициенты прохождения и отражения волн при наличии одного (0.2π) и двух (0.2π и 0.02π) входящих углов глубины 0.3 см при падении первой гармоники

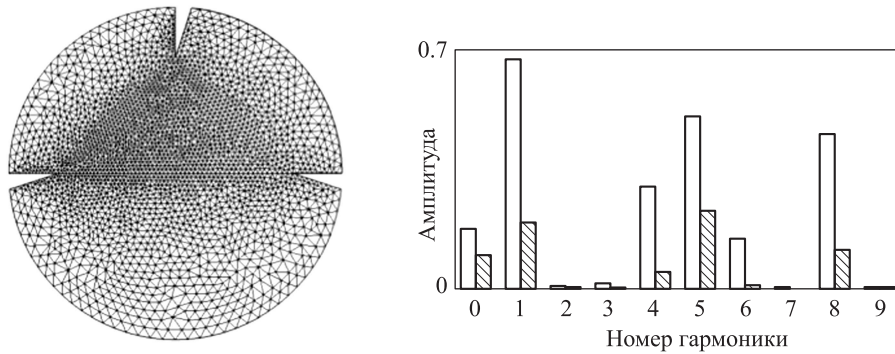


Рис. 3. Коэффициенты прохождения и отражения волн при наличии трех входящих углов размером 0.1π глубины 0.3 см при падении первой гармоники

му переходу энергии в старшие гармоники. Углы имеют глубину 0.3 см и равны 0.2π и 0.02π соответственно. На рис. 3 видно, что наличие трех входящих углов существенно меняет картину распространения гармоник. Все углы имеют размер 0.1π и глубину 0.3 см.

В некоторых случаях (рис. 2, 3) обнаружено отсутствие возбуждения определенных гармоник.

Заключение

На основе предложенной математической модели произведен расчет модовой структуры поля нерегулярного волновода с входящими углами. Показано, что наличие таких углов приводит к частичному отражению падающей волны и возбуждению других гармоник.

Показано, что с увеличением глубины входящего угла, а также его величины коэффициент прохождения падающей гармоники убывает, ее энергия переходит в другие волны. В случае незначительного выреза волновода, размеры которого много меньше размеров сечения, падающая волна практически не претерпевает никаких изменений.

С помощью численного эксперимента также обнаружено, что в некоторых случаях присутствуют гармоники, которые остаются невозбужденными. Этот эффект с физической точки зрения можно объяснить тем, что при данной конфигурации волновода между возбужда-

емыми и невозбуждаемыми волнами отсутствует энергетический обмен, а значит, если слева запустить такие волны, то они должны пройти без искажения. Данный факт был также подтвержден численными расчетами. Обнаруженный эффект можно использовать для выбора рабочей моды волновода, а также для создания модовых фильтров.

Предложенная методика расчета модовой структуры волновода может быть применена для изучения влияния на поле волновода таких структур, как различные кромки, стыки волноводов, наличие щупов, возбуждающих волновод. С помощью рассматриваемых в работе входящих углов можно моделировать различного рода царапины на поверхности волновода.

Список литературы

1. Schiff B., Yosibash Z. // IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques. 2000. **48**, N 2. P. 214.
2. Стрэнг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М., 1977.
3. Назаров С.А., Пламеневский Б.А. Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей. М., 1991.
4. Кондратьев В.А., Олейник О.А. // Успехи мат. наук. 1983. **38**, № 2. С. 3.
5. Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Могилевский И.Е., Свешников А.Г. // Радиотехника и электроника. 2003. **48**, № 7. С. 1.

Mathematical modeling of cylindrical waveguide with deformed lateral surface

A. N. Bogolubov^a, A. I. Erokhin, I. E. Mogilevsky^b

Department of Mathematics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.

E-mail: ^a bogan7@yandex.ru, ^b mogilev@phys.msu.ru.

A mathematical model of a waveguide with re-entrant corners in its variable cross-section is considered. The re-entrant corner influence on the waveguide field mode structure is investigated.

Keywords: waveguide, re-entrant corner, sectioning method.

PACS: 41.20.Jb.

Received 17 May 2011.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 6(2011).

Сведения об авторах

1. Боголюбов Александр Николаевич — докт. физ.-мат. наук, профессор, профессор; тел.: (495) 939-10-33, e-mail: bogan7@yandex.ru.
2. Ерохин Александр Игоревич — аспирант, тел.: (495) 939-10-33, e-mail: forlector@mail.ru.
3. Могилевский Илья Ефимович — канд. физ.-мат. наук, ассистент; тел.: (495) 939-10-33, e-mail: mogilev@phys.msu.ru.