

## Кинетическая модель двумерного цилиндрического токового слоя

И. Ю. Васько<sup>a</sup>, В. Ю. Попов<sup>b</sup>

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет,  
кафедра математики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

Институт космических исследований РАН.

Россия, 117997, Москва, ул. Профсоюзная, д. 84/32.

E-mail: <sup>a</sup>vaskoij@yandex.ru, <sup>b</sup>masterlu@mail.ru

Статья поступила 28.05.2011, подписана в печать 13.09.2011

Работа посвящена построению класса стационарных решений системы уравнений Власова–Максвелла в виде двумерных цилиндрических токовых слоев с током вдоль азимутального направления  $\mathbf{j} = j_\theta(\rho, z)\mathbf{e}_\theta$ . Магнитное поле такой системы обладает двумя компонентами  $\mathbf{B} = B_z(\rho, z)\mathbf{e}_z + B_\rho(\rho, z)\mathbf{e}_\rho$ . Математически задача сводится к нахождению решений нелинейного уравнения в частных производных для функции  $u(\rho, z)$ :  $\partial^2 u / \partial x^2 + x^{-1} \partial^2 u / \partial z^2 = e^{-u}$ , где  $x = \rho^2$ . Методами теории групп найдено трехпараметрическое семейство точных решений этого уравнения и рассмотрены асимптотики решений при больших значениях  $\rho$  и вблизи оси цилиндрической системы координат ( $\rho \sim 0$ ). Обсуждается применение построенного класса решений для описания токовых слоев, наблюдаемых в магнитосферах планет Солнечной системы, магнитные диполи которых лежат в плоскости эклиптики.

*Ключевые слова:* система уравнений Власова–Максвелла, нелинейные уравнения в частных производных, цилиндрический токовый слой, магнитосферы планет.

УДК: 533.95. PACS: 52.25.Dg.

### Введение

Ключевым вопросом физики космической плазмы является вопрос о структуре и динамике токовых слоев, которые наблюдаются в гелиосфере, в частности в магнитосферах планет Солнечной системы и в солнечном ветре. Эти плазменные объекты обладают уникальным свойством накапливать и затем взрывным образом высвобождать энергию магнитного поля. В результате именно токовые слои играют ключевую роль в крупномасштабных магнитных возмущениях (суббурях) в магнитосферах планет, во вспышках на Солнце и ускорении частиц в солнечном ветре (см., например, [1–3]).

Наиболее простая конфигурация токового слоя, рассматриваемая в большинстве моделей токовых слоев, представляет собой плоский токовый слой, характерный для магнитосфер планет, чей магнитный диполь направлен почти перпендикулярно к плоскости эклиптики. Примером является магнитосфера Земли, чей магнитный момент образует небольшой угол ( $\sim 10^\circ$ ) с осью вращения, которая в свою очередь почти перпендикулярна к плоскости эклиптики. Силовые линии земного диполя при взаимодействии с потоком солнечного ветра вытягиваются на ночной стороне магнитосферы в направлении от Земли и образуют так называемый магнитосферный хвост. В центре его находится практически плоский токовый слой, разграничивающий разнонаправленные магнитные поля. Магнитосферу, схожую с земной, имеют также планеты Меркурий, Юпитер и Сатурн. Среди моделей плоских токовых слоев можно отметить широко известную модель Харриса [4] и ее двумерное обобщение [5, 6]. Кроме того, известен целый класс одномерных моделей плоских токовых слоев, построенных с учетом адиабатических инвариантов частиц (см. [7] и цит. лит.).

Более сложной структурой обладают токовые слои,

наблюдаемые в магнитосферах планет, чьи магнитные диполи лежат почти в плоскости эклиптики (примером являются магнитосферы Урана и Нептуна [8], а также астероида Плутона). Исследования спутника «Voyager-2» показали, что ось вращения Урана лежит близко к плоскости эклиптики, а магнитный диполь составляет с осью вращения угол  $\sim 60^\circ$ . В результате во время вращения планеты один из полюсов магнитного диполя периодически принимает положение вдоль направления скорости солнечного ветра. В этом случае обтекание солнечным ветром приводит к симметричному вытягиванию силовых линий, входящих в магнитный полюс, на ночную сторону от планеты. А это в свою очередь приводит к формированию в хвосте магнитосферы цилиндрического токового слоя [8], у которого максимум плотности тока сосредоточен в окрестности гигантской цилиндрической поверхности (или поверхности вращения) на ночной стороне магнитосферы, а вдоль оси хвоста формируется магнитное поле с аксиальной симметрией.

Одномерный цилиндрический токовый слой в рамках кинетической теории был рассмотрен в работе [9]. В этой модели плотность тока направлена вдоль азимутального направления  $\mathbf{j} = j_\theta(\rho)\mathbf{e}_\theta$  (здесь и в дальнейшем будем использовать цилиндрические координаты  $\mathbf{r} = (\rho, \theta, z)$ , где ось  $z$  направлена вдоль оси хвоста), а магнитное поле  $\mathbf{B} = B_z(\rho)\mathbf{e}_z$ , причем на некоторой поверхности  $\rho = \text{const}$  магнитная компонента  $B_z$  обращается в ноль. Данная модель не учитывает изменения плазменных характеристик в направлении  $z$ , а также радиальную компоненту  $B_\rho$  магнитного поля.

В настоящей работе построен класс двумерных цилиндрических токовых слоев, в которых плотность тока имеет азимутальное направление  $\mathbf{j} = j_\theta(\rho, z)\mathbf{e}_\theta$ , а магнитное поле имеет две компоненты

$\mathbf{B} = B_z(\rho, z)\mathbf{e}_z + B_\theta(\rho, z)\mathbf{e}_\theta$ . С математической точки зрения задача заключается в построении решений одного нелинейного уравнения в частных производных. Групповые методы позволяют построить трехпараметрическое семейство решений и тем самым получить класс двумерных токовых слоев.

### 1. Постановка задачи

Рассматриваются двумерные стационарные решения системы уравнений Власова–Максвелла для электрон-ионной бесстолкновительной (сильно разреженной) плазмы. Пусть система обладает аксиальной симметрией, т. е. все величины зависят от  $(\rho, z)$ . Электрическое и магнитное поля определяются скалярным потенциалом  $\phi(\rho, z)$  и компонентой векторного потенциала  $A_\theta(\rho, z)$ :

$$\begin{cases} \mathbf{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (-\nabla\phi + [\mathbf{v} \times [\nabla \times A_\theta \mathbf{e}_\theta]]) \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = 0, \\ \Delta A_\theta = -\frac{4\pi}{c} \sum_\alpha q_\alpha \int (\mathbf{v} \mathbf{e}_\theta) f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{v}, \\ \Delta\phi = -4\pi \sum_\alpha q_\alpha \int f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{v}. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $\alpha = i, e$  — сорт частиц и заряды  $q_i = -q_e = q$ . Условие квазинейтральности плазмы

$$\sum_\alpha q_\alpha \int f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{v} = 0, \quad (2)$$

позволяет определить связь между скалярным и векторным потенциалами. Решением первого уравнения системы (1) является произвольная функция интегралов движения частицы в полях  $-\nabla\phi$  и  $[\nabla \times A_\theta \mathbf{e}_\theta]$ . Из условий стационарности и двумерности задачи следует сохранение двух интегралов движения — полной энергии  $H_\alpha$  и обобщенного момента  $P_{\theta,\alpha}$ :

$$H_\alpha = \frac{1}{2m_\alpha} \left( p_{\rho,\alpha}^2 + \frac{1}{\rho^2} \left( P_{\theta,\alpha} - \frac{q_\alpha}{c} \rho A_\theta \right)^2 + p_{z,\alpha}^2 \right) + q_\alpha \phi, \quad (3)$$

$$P_{\theta,\alpha} = p_{\theta,\alpha} + \frac{q_\alpha}{c} \rho A_\theta = m_\alpha \rho v_\theta + \frac{q_\alpha}{c} \rho A_\theta.$$

Следовательно, стационарную функцию распределения плазмы можно задавать как функцию интегралов движения:  $f_\alpha = f_\alpha(H_\alpha, P_{\theta,\alpha})$ . Конкретный вид этой функции определяется видом источников плазмы и различными магнитосферными процессами. Выберем функцию распределения частиц сорта  $\alpha$  аналогично работе [7] вида

$$f_\alpha = n_0 \left( \frac{m_\alpha}{2\pi T_\alpha} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{H_\alpha - \Omega_\alpha P_{\theta,\alpha}}{T_\alpha} \right\}, \quad (4)$$

где  $T_\alpha$  — температура частиц,  $n_0$  — характерное значение концентрации частиц плазмы,  $\Omega_\alpha$  — постоянная угловая скорость их вращения. Условие квазинейтральности (2) приводит к уравнению, аналогичному полученному в [7] для одномерной системы:

$$\phi = \rho^2 \frac{T_i T_e}{2q(T_i + T_e)} \left( \frac{m_i \Omega_i^2}{T_i} - \frac{m_e \Omega_e^2}{T_e} \right), \quad \frac{\Omega_e}{T_e} = -\frac{\Omega_i}{T_i}. \quad (5)$$

Введем обозначения  $\Omega = \Omega_i - \Omega_e$ ,  $T = T_i + T_e$ . Функция распределения (4) задает единственную компоненту

плотности тока

$$j_\theta = q n_0 \rho \Omega \exp \left\{ \frac{q \Omega}{c T} \rho A_\theta + \frac{\Omega^2 (m_i T_i^2 + m_e T_e^2)}{2 T^3} \rho^2 \right\}. \quad (6)$$

Далее введем безразмерные переменные  $\rho_* = \rho/\rho_0$ ,  $z_* = z/\rho_0$  и  $A_* = A_\theta/A_0$ , где

$$\rho_0^4 = \frac{c^2 T}{\pi q^2 n_0 \Omega_0^2}, \quad A_0 = \frac{c T}{q \Omega \rho_0}, \quad \lambda = \frac{\Omega^2 \rho_0^2 (m_i T_i^2 + m_e T_e^2)}{2 T^3}.$$

Второе уравнение системы (1), представляющее собой уравнение для векторного потенциала, принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial \rho_*} \frac{1}{\rho_*} \frac{\partial}{\partial \rho_*} \rho_* A_* + \frac{\partial^2 A_*}{\partial z_*^2} = -4 \rho_* \exp \left\{ \rho_* A_* + \lambda \rho_*^2 \right\}. \quad (7)$$

Производя повторную замену переменных  $x = \rho_*^2$ ,  $\zeta = 2z_*$  и  $u = -(\rho_* A_* + \lambda \rho_*^2)$ , получим следующее уравнение для функции  $u$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} = e^{-u}. \quad (8)$$

Безразмерные компоненты магнитного поля обозначим через  $B_\rho^*$  и  $B_z^*$ . Единицей измерения поля является величина  $A_0/\rho_0$ . Компоненты магнитного поля выражаются через функцию  $u$  следующим образом:

$$\begin{aligned} B_\rho^* &= -\frac{\partial A_*}{\partial z_*} = \frac{2}{\sqrt{x}} \frac{\partial u}{\partial \zeta}, \\ B_z^* &= \frac{1}{\rho_*} \frac{\partial}{\partial \rho_*} (\rho_* A_*) = -2 \left( \lambda + \frac{\partial u}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Безразмерные концентрацию и плотность тока обозначим  $n^* = e^{-u}$  и  $j_\theta^* = \sqrt{x} e^{-u}$  соответственно. Единицей измерения концентрации является величина  $n_0$ , а плотности тока —  $q n_0 \Omega \rho_0$ .

Уравнение силовых линий, лежащих в плоскости  $(\rho_*, z_*)$ , имеет вид  $\rho_* A_* = \text{const}$  и может быть записано через функцию  $u$ :  $u + \lambda x = \text{const}$ .

Уравнение (8) является нелинейным уравнением относительно функции  $u$ . Далее рассмотрим построение его частных решений.

## 2. Построение семейства частных решений уравнения (8)

### 2.1. Сведение уравнения (8) к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

Уравнение (8) допускает две однопараметрические группы, инфинитезимальные операторы которых имеют вид [10]

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad X_2 = x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} + 2 \frac{\partial}{\partial u}. \quad (10)$$

Решение, инвариантное относительно оператора (10), находится из условия  $F(x, \zeta, u) = 0$ , где  $X_2 F = 0$ , и имеет вид  $u = 2 \ln x + \varphi(\xi)$  и  $\xi = \zeta^2/x$ ,  $\xi \in \mathbb{R}_+^1$ . Подставляя эту функцию в уравнение (8), получим обыкновенное дифференциальное уравнение для функции  $\varphi$

$$\xi(\xi + 4)\varphi'' + 2(\xi + 1)\varphi' = 2 + e^{-\varphi}. \quad (11)$$

Заменой  $\eta = \sqrt{\xi/(\xi + 4)}$  ( $\eta \in (0, 1)$ ) уравнение (11) приводится к виду

$$(1 - \eta^2)^2 \varphi_{\eta\eta} = 4(2 + e^{-\varphi}). \quad (12)$$

Явное интегрирование уравнения (12) представляется затруднительным. Однако несложно вычислить асимптотики решения данного уравнения в двух предельных случаях  $\eta \approx 0$  и  $\eta \approx 1$ , что отвечает рассмотрению системы соответственно вдали от оси цилиндрической системы координат и вблизи нее.

Применяя к функции  $u$  группу переносов вдоль оси  $\zeta$  (группа с оператором  $X_1$ ), получим однопараметрическое семейство решений

$$u_a = 2 \ln x + \varphi((\zeta + 2a)^2/x), \quad a \in \mathbb{R}^1. \quad (13)$$

## 2.2. Асимптотика функции $\varphi$ при $\eta \approx 0$

Уравнение (12) перепишем в виде  $\varphi_{\eta\eta} = 4(2 + e^{-\varphi})/(1 - \eta^2)^2$ . В окрестности точки  $\eta = 0$  правая часть уравнения голоморфна, поэтому асимптотика с точностью  $O(\eta^3)$  имеет вид

$$\varphi = a_0 + a_1\eta + 4 \left(1 + \frac{1}{2}e^{-a_0}\right) \eta^2 + O(\eta^3). \quad (14)$$

Здесь  $a_{0,1}$  - произвольные константы. Значениям  $\eta \approx 0$  соответствуют значения  $\xi \approx 0$ , причем  $\eta = \frac{1}{2}\sqrt{\xi} + O(\xi^{3/2})$ , поэтому  $\varphi = a_0 + a_1\sqrt{\xi} + \mu\xi + O(\xi^{3/2})$ , где  $a_{0,1}$  - новые произвольные константы и  $\mu = 1 + e^{-a_0}/2 \neq 0$ .

## 2.3. Асимптотика функции $\varphi$ при $\eta \approx 1$

Из уравнения (12) видно, что  $\varphi_{\eta\eta} \geq 8/(1 - \eta^2)^2$ , поэтому при  $\eta \rightarrow 1$  очевидно, что  $\varphi \rightarrow \infty$ . Тогда при  $\eta \approx 1$  имеем  $e^{-\varphi} \ll 1$  и главный член асимптотики функции  $\varphi$  (обозначаемый далее  $\varphi_{as}$ ) находится из уравнения

$$\frac{d^2\varphi_{as}}{d\eta^2} = \frac{8}{(1 - \eta^2)^2}. \quad (15)$$

Явное интегрирование (15) дает  $\varphi_{as} = -2(1 - (1 - \eta)) \ln(1 - \eta) + 2\eta \ln(1 + \eta) + C_1(1 - \eta) + C_0$ , где  $C_{0,1}$  - произвольные константы. Тогда с точностью до  $O((1 - \eta)^2)$  асимптотика функции  $\varphi$  примет вид  $\varphi = -2 \ln(1 - \eta) + 2(1 - \eta) \ln(1 - \eta) + C_0 + C_1(1 - \eta) + O((1 - \eta)^2)$ . Значениям  $\eta \approx 1$  соответствуют значения  $\xi \gg 1$ , причем  $\eta = 1 - 2/\xi + O(1/\xi^2)$ , следовательно

$$\varphi = 2 \ln \xi + C_0 + \frac{4}{\xi} \ln \left(\frac{1}{\xi}\right) + \frac{C_1}{\xi} + O\left(\frac{1}{\xi^2} \ln(\xi)\right), \quad (16)$$

где  $C_{0,1}$  - новые произвольные константы.

## 2.4. Асимптотики основных величин при $\rho_* \approx 0$ и $\rho_* \gg 1$

Асимптотики основных величин системы (магнитные поля, плотность плазмы и тока) приводятся для функции  $u_0$  семейства (13). Асимптотики этих же величин для функций  $u_a$  могут быть получены подстановкой  $\zeta \rightarrow \zeta + 2a$  ( $z_* \rightarrow z_* + a$ ).

Рассмотрим решение вдали от оси цилиндрической системы, когда  $x \gg 1$  и, следовательно,  $\eta \approx 0$ . Для функции  $u_0$  вдали от оси, согласно (14), можно записать

$$u_0 = 2 \ln x + a_0 + a_1 \frac{|\zeta|}{\sqrt{x}} + \mu \frac{\zeta^2}{x} + O(x^{-3/2}). \quad (17)$$

Заметим, что эта же асимптотика будет справедлива и в другом предельном случае:  $x = \text{const}$ ,  $\zeta \approx 0$ . Чтобы избежать разрыва производной  $\partial u_0/\partial \zeta$ , будем рассматривать решение при  $\zeta > 0$ .

Используя формулы (9) для характеристик плазмы и компонент поля, получаем асимптотики

$$\begin{aligned} n^* &= e^{-a_0} \rho_*^{-4} + \dots, & j_\theta^* &= e^{-a_0} \rho_*^{-3} + \dots, \\ B_z^* &= -2\lambda - \frac{4}{\rho_*^2} + \dots, & B_\rho^* &= \frac{2a_1}{\rho_*^2} + 4\mu \frac{\zeta}{\rho_*^3} + \dots \end{aligned} \quad (18)$$

Как показывают асимптотики (18), концентрация и плотность тока вдали от оси достаточно быстро убывают. Компонента  $B_z^*$  выходит на отрицательную константу, а  $B_\rho^*$  стремится к нулю.

Рассмотрим теперь систему в противоположном предельном случае:  $x \approx 0$ ,  $\zeta = \text{const} \neq 0$  и, следовательно,  $\eta \approx 1$ . Для функции  $u_0$  вблизи оси, согласно (16), имеем

$$u_0 = 2 \ln \zeta^2 + C_0 + \frac{4x}{\zeta^2} \ln \left(\frac{x}{\zeta^2}\right) + C_1 \frac{x}{\zeta^2} + O(x^2 \ln x). \quad (19)$$

Заметим, что эта же асимптотика будет справедлива в другом предельном случае:  $x = \text{const}$ ,  $\zeta \gg 1$  (с заменой в (19)  $O(x^2 \ln x) \rightarrow O(\zeta^{-2} \ln \zeta)$ ).

Вновь используя формулы (9), получим при  $x \approx 0$

$$\begin{aligned} n^* &= \frac{e^{-C_0}}{16} z_*^{-4} + \dots, & j_\theta^* &= \frac{e^{-C_0}}{16} \rho_* z_*^{-4} + \dots, \\ B_z^* &= -2\lambda - \frac{4 \ln \rho_*}{z_*^2} + \dots, & B_\rho^* &= \frac{4}{\rho_* z_*} + \dots \end{aligned} \quad (20)$$

Асимптотики (18) показывают, что плотность плазмы вблизи оси симметрии падает с увеличением  $z_*$ , а плотность тока  $j_\theta^*$  стремится к нулю. При этом компоненты магнитного поля имеют сингулярности. Существование этих сингулярностей следует из баланса давления, которое в направлении оси  $z$  имеет вид  $\text{const} \cdot \frac{\partial n^*}{\partial z_*} = -j_\theta^* B_\rho^*$ . Из данного уравнения видно, что соотношения  $\partial n^*/\partial z_* \neq 0$  и  $j_\theta^* \sim \rho_*$  приводят к сингулярности  $B_\rho^* \sim \rho_*^{-1}$ . Наличие сингулярности другой компоненты магнитного поля  $B_z^*$  объясняется следующим образом. Из формул для асимптотик плотности тока (18), (20) следует, что она всюду регулярна. С другой стороны,  $j_\theta^* \sim \partial B_z^*/\partial \rho_* - \partial B_\rho^*/\partial z_*$  и второе слагаемое этого выражения вблизи оси  $\sim \rho_*^{-1}$ . Отсюда заключаем, что первое слагаемое этого выражения обязано содержать слагаемое  $\sim \ln \rho_*$ .

Отметим, что полученные асимптотики (18), (20) указывают на наличие поверхности, на которой  $B_z^* = 0$ . Это следует из того, что  $B_z^*|_{\rho_* \approx 0} > 0$  и  $B_z^*|_{\rho_* \gg 1} < 0$ . Кроме того, асимптотика для концентрации  $n^*$  (20) показывает, что плотность плазмы убывает при  $z_* \rightarrow \infty$  при любом фиксированном значении  $\rho_*$ .

Далее приведены численное решение уравнения (12) и построение двумерных профилей концентрации и плотности тока.

## 2.5. Профили концентрации и плотности тока

Задача Коши для уравнения (12) с начальными условиями  $\varphi(0) = \varphi_0$  и  $\varphi'(0) = \varphi'_0$  решалась численно

на множестве  $\eta \in [0, 1)$  методом Рунге–Кутты 4-го порядка в системе MatLab. Из численного решения (12) находились функции  $u_a$ . Далее при помощи формулы (9) строились графики различных физических величин в плоскости  $(\rho_*, z_*)$  (на рис. 1–3 оси обозначены соответственно как  $(\rho, z)$ ).

Заметим, что построенное семейство решений (13), которое описывает двумерные цилиндрические токовые слои, является трехпараметрическим. Параметрами служит тройка величин  $(\varphi_0, \varphi'_0, a)$ . Выбирая эти параметры различным образом, можно получать различные токовые слои. Приведем графики физических величин для конкретных значений величин  $(\varphi_0, \varphi'_0, a)$  и укажем на характер изменения графиков при изменении параметров  $(\varphi_0, \varphi'_0, a)$ .

Все физические характеристики будем изображать при  $z_* > 0$ , считая, что центр планеты расположен в отрицательной области оси  $z_*$ . Для построения силовых линий необходимо задать численное значение параметра  $\lambda$ . Однако форма силовых линий качественно не зависит от  $\lambda$  и далее используется  $\lambda = 0.1$ .

Примем следующие значения параметров  $(\varphi_0, \varphi'_0, a) = (-3, 0, 3)$ . График концентрации  $n^*/n_{\max}^*$

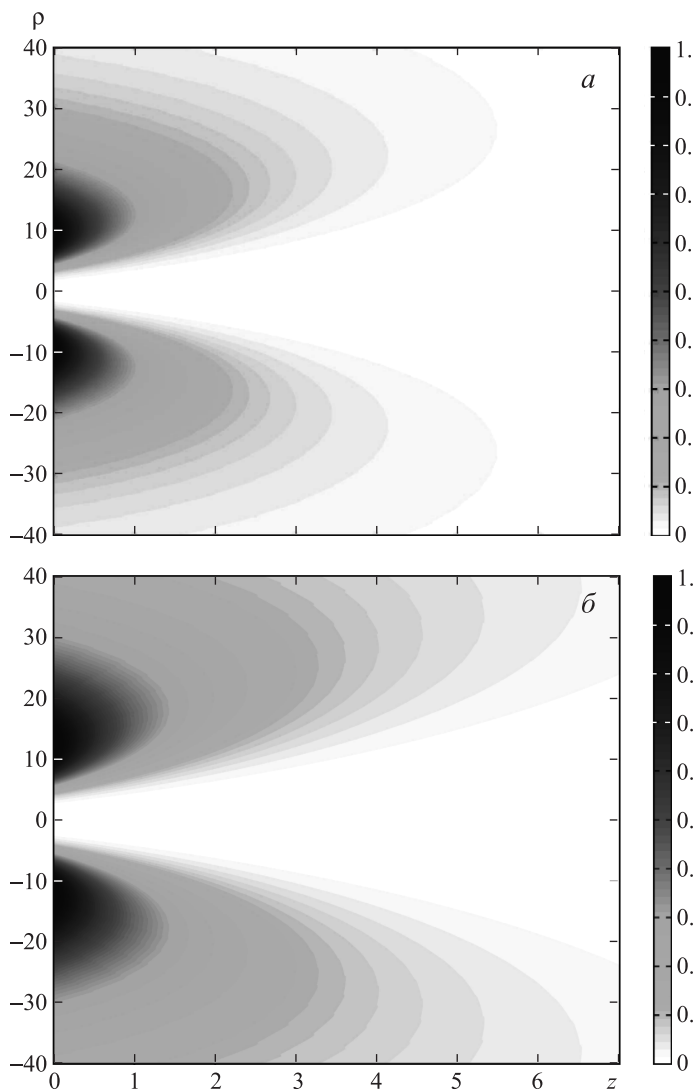


Рис. 1. Концентрация плазмы  $n^*/n_{\max}^*$  (а) и плотность тока  $j_{\theta}^*/j_{\theta, \max}^*$  (б) для  $(\varphi_0, \varphi'_0, a) = (-3, 0, 3)$

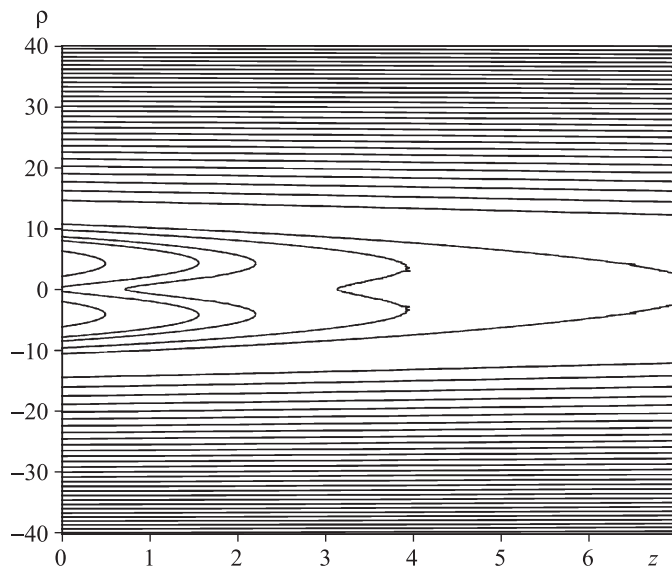


Рис. 2. Силовые линии магнитного поля для  $(\varphi_0, \varphi'_0, a) = (-3, 0, 3)$

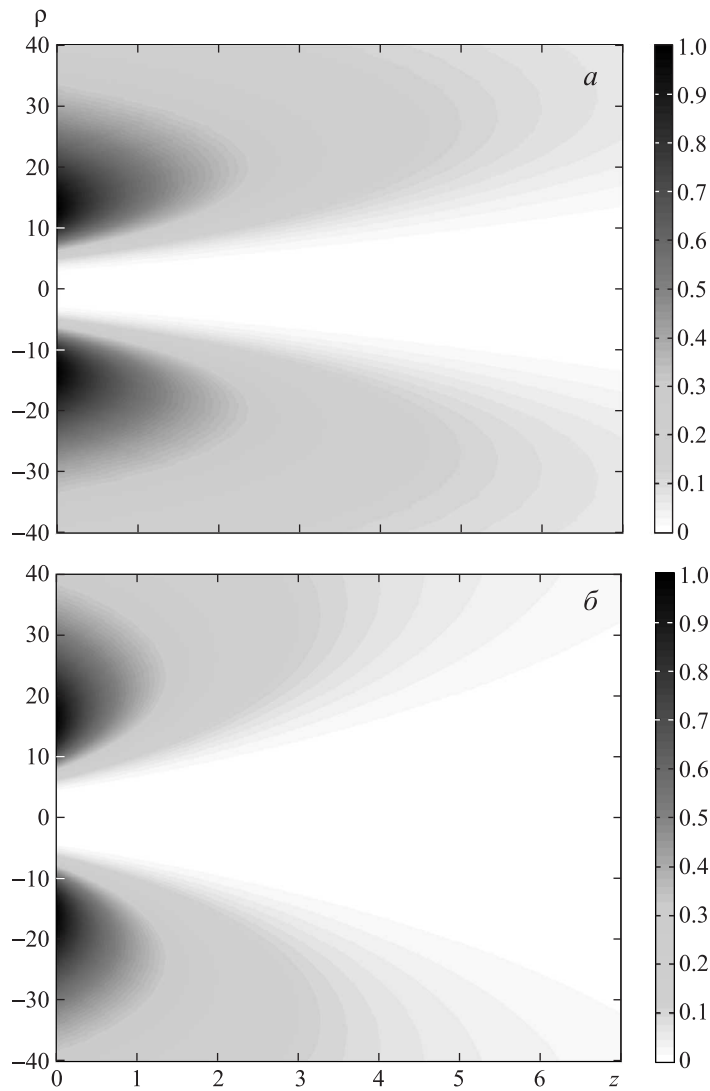


Рис. 3. Плотность тока  $j_{\theta}^*/j_{\theta, \max}^*$  для  $(\varphi_0, \varphi'_0, a) = (-3, 0, 5)$  (а) и  $(\varphi_0, \varphi'_0, a) = (-5, 0, 3)$  (б)

плазмы показан на рис. 1, а, плотности тока  $j_\theta^*/j_{\theta, \max}^*$  — на рис. 1, б. Концентрация частиц плазмы и плотность тока нормированы на максимальные значения  $n_{\max}^*$  и  $j_{\theta, \max}^*$  соответственно. Вид силовых линий изображен на рис. 2.

Чтобы показать качественные изменения в профилях физических величин при изменении параметров  $(\varphi_0, \varphi'_0, a)$ , на рис. 3, а приведен профиль плотности тока для параметров  $(\varphi_0, \varphi'_0, a) = (-3, 0, 5)$ .

Видно, что с увеличением параметра  $a$  область, в которой плотность тока отлична от нуля, расширяется в направлениях  $\rho_*$  и  $z_*$ , причем расширение в направлении  $\rho_*$  гораздо сильнее. Кроме того максимум тока смещается в сторону больших значений  $\rho_*$ .

Изменение параметра  $\varphi_0$  приводит в основном лишь к смещению максимума плотности тока в сторону больших значений  $\rho_*$ . Это демонстрирует рис. 3, б, на котором приведена плотность тока в слое с  $(\varphi_0, \varphi'_0, a) = (-5, 0, 3)$ .

Численный анализ показывает, что профили физических величин слабо зависят от параметра  $\varphi'_0$ , так что в действительности имеется два параметра, которые определяют структуру токового слоя.

Наличие поверхности, на которой  $B_z = 0$ , подтверждается рис. 3. Кроме того, видно, что вдали от оси  $B_\rho \rightarrow 0$ .

### Заключение

В работе получен класс двумерных решений уравнения Власова–Максвелла, описывающих цилиндрические токовые слои, и приведены самосогласованные профили магнитного поля, плотностей плазмы и тока. Показано, что рассматриваемая система обладает тремя свободными параметрами  $(\varphi_0, \varphi'_0, a)$ , выбирая которые можно получать различные токовые слои. Приведены

примеры таких слоев для некоторых конкретных значений параметров.

Основной особенностью построенного класса кинетических равновесий является сингулярность магнитного поля вблизи оси симметрии системы. Это указывает, что выбор функции распределения (4) не вполне удовлетворителен с физической точки зрения. Тем не менее построенная модель хорошо описывает токовый слой всюду, кроме области, непосредственно примыкающей к оси системы.

Авторы выражают благодарность академику РАН Л. М. Зеленому, д. ф.-м. н. Х. В. Маловой и к. ф.-м. н. А. В. Артемьеву за полезные обсуждения и внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 11-02-01166-а), грантами НОЦ 14.740.11.0086 и НШ-3200.2010.2.

### Список литературы

1. Плазменная гелиогеофизика / Под ред. Л. М. Зелёного, И. С. Веселовского. М., 2008.
2. Вайнштейн С.И., Быков А.М., Топтыгин И.Н. Турбулентность, токовые слои и ударные волны в космической плазме. М., 1989.
3. Зелёный Л.М., Малова Х.В., Артемьев А.В. и др. // Физика плазмы. 2011. **37**, № 2. С. 137.
4. Harris E.G. // Nuovo Cimento. 1962. **23**. P. 115.
5. Kan J.R. // Geophys. Res. 1973. **78**. P. 3773.
6. Lembège B., Pellat R. // Phys. Fluids. 1982. **25**. P. 1995.
7. Zelenyi L.M., Malova H.V., Popov V.Y. et al. // Nonlinear Proc. Geophys. **11**. P. 579.
8. Bagenal F. // Institute of Physics Publishing 2001. Dirac House, Temple Back, Bristol, BS16BE, UK, 2001.
9. Laval G., Pellat R., Vuillemin M. // Plasma Phys. and Controlled Fusion Res. 1966. **2**. P. 259.
10. Ибрагимов Н.Х. // Матем. и кибернетика. 1989. № 8.

## The kinetic model of the two dimensional cylindrical current sheet

I. Y. Vasko<sup>a</sup>, V. Y. Popov<sup>b</sup>

Department of Mathematics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.

Space Research Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow 117997, Russia.

E-mail: <sup>a</sup>vaskoiy@yandex.ru, <sup>b</sup>masterlu@mail.ru.

In this paper we develop a one class of solutions of the steady Vlasov–Maxwell equations, which describes two dimensional cylindrical current sheets with current directed azimuthally  $\mathbf{j} = j_\theta(\rho, z)\mathbf{e}_\theta$ . Magnetic field of these sheets has two components  $\mathbf{B} = B_z(\rho, z)\mathbf{e}_z + B_\rho(\rho, z)\mathbf{e}_\rho$ . From mathematical point of view, we find solutions of the nonlinear equation in partial derivatives for some function  $u(\rho, z)$ :  $\partial^2 u / \partial x^2 + x^{-1} \partial^2 u / \partial z^2 = e^{-u}$ , where  $x = \rho^2$ . We apply methods of group theory to develop three-parameter class of solutions. We also derive asymptotic behavior of these solutions for large values of  $\rho$  and for  $\rho \approx 0$ . We discuss applications of these solutions for description of current sheets in magnetospheres of planets with magnetic dipoles located near the ecliptic plane.

**Keywords:** system of Vlasov–Maxwell equations, nonlinear equations in partial derivatives, cylindrical current sheet, magnetospheres of planets.

PACS: 52.25.Dg.

Received 28 May 2011.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 1(2012).

### Сведения об авторах

1. Васко Иван Юрьевич — аспирант; e-mail: vaskoiy@yandex.ru.

2. Попов Виктор Юрьевич — докт. физ.-мат. наук, доцент; e-mail: masterlu@mail.ru.