

Генерации фермионной массы с участием фермионов Калуцы–Клейна под влиянием калибровочного поля в модели с 2+1 измерением

В. Ч. Жуковский^{1,a}, Е. А. Степанов¹

*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра теоретической физики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
E-mail: ^azhukovsk@phys.msu.ru*

Статья поступила 28.07.2011, подписана в печать 05.10.2011

Рассмотрена генерация массы на двумерной бране в трехмерной модели с четырехфермионным взаимодействием в присутствии внешнего калибровочного поля A_3 . В рамках данной модели генерируемая масса получается легче масс калуца-клейновских мод, что указывает на возможность решения проблемы иерархии масс в реалистических 4-мерных моделях. Получена зависимость эффективного потенциала и константы связи от параметров модели, таких как радиус компактификации, калибровочное поле и параметр фазового смещения.

Ключевые слова: хиральный конденсат, модель Калуцы–Клейна, компактификация, проблема иерархии масс.

УДК: 539.12.01. PACS: 11.30.Qc, 11.30.Rd, 12.38.Mh, 12.39.–x, 21.65.–f.

Введение

Одной из проблем многомерных теорий является механизм, благодаря которому дополнительные измерения оказываются скрытыми. Оригинальной идеей Калуцы–Клейна является то, что дополнительное пятое измерение компактифицировано с тем, чтобы описать физические процессы в четырехмерном пространстве-времени нашего мира [1]. В таком случае при изучении обычных физических явлений в пределе малого радиуса компактификации $R \rightarrow 0$ пространство-время выглядит как четырехмерное. Согласно распространенной до недавнего времени точке зрения, масштаб компактификации должен быть порядка планковского. На планковских масштабах ($l \sim 10^{-33}$ см, соответствующая энергия $M_{Pl} \sim 10^{19}$ ГэВ) дополнительные измерения должны быть ничтожного размера $R \leq 10^{-17}$ см и их непосредственное обнаружение представляется невозможным. Однако недавно стало уделяться внимание представлению мира на бране, в котором подразумевается локализация обычного вещества на трехмерном многообразии — бране, вложенной в многомерное пространство. В моделях мира на бране, таких как модели ADD [3] и Рэндалл–Сундрума [4], дополнительные измерения могут иметь большой или даже бесконечно большой размер, что могло бы приводить к экспериментально наблюдаемым эффектам. Таким образом, многомерные теории являются одним из способов объяснения иерархии масс элементарных частиц. Соответствующие частицы из разных поколений взаимодействуют одинаково, но массы их отличаются на порядки. Объяснение этому дается, например, в задаче [7], где была рассмотрена модель многомерного мира с одним дополнительным измерением.

В последние годы проявляется также интерес к теориям с небольшим количеством пространственно-временных измерений (так называемые низкоразмерные модели — см., например, [8, 9], а также [10, 11] и указанную там литературу). Теория поля в случае двух пространственных измерений давно признана важной

для понимания некоторых физических явлений, которые могут быть приближенно рассмотрены как плоские. Пример такой двумерной модели — графен, плоский одноатомный слой углерода, обладающий целым рядом необычных характеристик. В ряде недавних исследований [12, 13] были открыты аномальный эффект Холла, необычные свойства проводимости и ряд других интересных характеристик материала. В описании графена поведение электронов эффективно подчиняется уравнению Дирака, и в таком случае удобно рассматривать эту задачу в рамках квантовой теории поля для фермионов в пространстве 2+1 размерности. В частности, модели Намбу–Йона-Лазинио [14–16] и Гросса–Невё [17] хорошо подходят для рассмотрения подобных задач. В таких плоских системах модель Гросса–Невё обычно используется для исследования свойств симметрии, нарушения хиральной симметрии [18], а также для задач генерации массы фермионов [19].

В работе [21] была предложена модель, в которой существуют два типа фермионов: одни живут в пятимерном пространстве-времени и взаимодействуют с другими фермионами, живущими на 3-бране. Такое взаимодействие можно описать с помощью четырехфермионного взаимодействия при обмене калуца-клейновскими модами гравитона, что ведет к генерации динамической массы. С другой стороны, существует идея о том, что в качестве хиггсовской частицы может выступать дополнительная компонента калибровочного поля высшей размерности A_5 . Юкавская связь, состоящая из четырехмерных скаляров и A_5 , похожа на калибровочную связь (также называемую юкавской унификацией) и тоже может приводить к генерации массы. Ненулевое поле A_5 нарушает калибровочную и хиральную симметрию и играет роль хиггсовского поля [7]. В работе [22] модель [21] была рассмотрена в пятимерии, где высшая размерность была компактифицирована по кругу с радиусом компактификации R и, кроме того, были добавлены периодические и антипериодические граничные условия для фермионов. Модель была расширена введением по-

стоянного калибровочного поля A_5 , живущего в пятимерном пространстве, для исследования нарушения хиральной симметрии и получения динамической массы для легких фермионов при четырехфермионном взаимодействии с компонентой калибровочного поля A_5 . В нашей работе мы исследовали похожую модель, но в размерности $2+1$. В таком случае мы получили плоскую модель с браной размерности $1+1$, т. е. нитью с пространственной размерностью 1. В данной модели мы рассмотрели генерацию массы, состоящей из компоненты калибровочного поля A_3 и 2D-конденсата фермионов. Для этого мы получили эффективный потенциал взаимодействия как функцию фермионного конденсата и постоянного поля A_3 при периодических и антипериодических условиях на фермионы. Была вычислена критическая константа связи g_c как функция радиуса компактификации и поля A_3 . Кроме того, мы рассмотрели асимптотическое поведение константы связи g при радиусе компактификации $R \rightarrow 0$, что соответствует константе связи в двумерии, и $R \rightarrow \infty$, что соответствует константе связи в трехмерии. В таком случае полученные значения конденсата, выраженные через константы для 2D- и 3D-случаев, получаются схожими с данными работы [23], с той лишь разницей, что в нашем случае используется другое обезразмеривание параметров.

1. Модель

Рассмотрим 3D-фермионную модель, содержащую два типа фермионных полей Ψ и L и калибровочное поле A_M в трехмерном пространстве. Ψ -фермионы существуют в 3D-пространстве, а L — на 2D-бране. Лагранжиан модели аналогичен лагранжиану для 5D-модели [21]

$$\mathcal{L}^{(3)} = \bar{\Psi}i\gamma^M D_M \Psi + [\bar{L}i\gamma^\mu D_\mu L + g^2(\bar{\Psi}\gamma^M L)(\bar{L}\gamma_M \Psi)]\delta(x^3), \quad (1)$$

где $M = 1, 2, 3$; $\mu = 1, 2$; $D_M = \partial_M - ieA_M$. Здесь используется метрика $(+, -, -)$ и γ -матрицы, заданные в виде

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Представим калибровочное поле как конденсат со средним значением компонент $\langle A_3 \rangle = \text{const} \neq 0$ и $\langle A_1 \rangle = \langle A_2 \rangle = 0$. Тогда лагранжиан примет вид

$$\mathcal{L}^{(3)} = \bar{\Psi}\gamma^3 eA_3 \Psi + \bar{\Psi}i\gamma^M \partial_M \Psi + [\bar{L}i\gamma^\mu \partial_\mu L + g^2(\bar{\Psi}\gamma^M L)(\bar{L}\gamma_M \Psi)]\delta(x^3). \quad (3)$$

Проведем преобразование Хаббарда–Стратоновича, введя вспомогательное поле σ_M аналогично [21]. В результате получим

$$\mathcal{L}^{(3)} = \bar{\Psi}i\gamma^M \partial_M \Psi + \bar{\Psi}\gamma^3 eA_3 \Psi + [\bar{L}i\partial L - \sigma^M \sigma_M^* + g\sigma_M \bar{\Psi}\gamma^M L + \text{h. c.}]\delta(x^3). \quad (4)$$

Далее используем приближение среднего поля, заменяя реальное поле его средним значением, тогда $\langle \sigma_\mu \rangle = 0$, $\langle \sigma_3 \rangle = \sigma_3 = -\sigma$.

Совершим хиральный поворот [24]:

$$\Psi \rightarrow \exp\left(i\frac{\pi}{4}\gamma_3\right)\Psi, \quad L \rightarrow \exp\left(i\frac{\pi}{4}\gamma_3\right)L \quad (5)$$

и, используя, что

$$\exp\left(\frac{\pi}{2}\gamma_3\right) = \gamma_3,$$

получим

$$\mathcal{L}^{(3)} = \bar{\Psi}i\partial\Psi - \bar{\Psi}eA_3\Psi - i\bar{\Psi}\partial_3\Psi + [\bar{L}i\partial L - |\sigma|^2 + (g\sigma\bar{\Psi}L + \text{h. c.})]\delta(x^3). \quad (6)$$

Компактифицируем третью размерность по кругу радиуса R и зададим дополнительный параметр — фазовое смещение α :

$$\Psi = N \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Psi_n(x_\mu) e^{\frac{ix_3}{R}(n+\alpha)}, \quad (7)$$

тогда лагранжиан будет выглядеть так:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(2)} &= \int_0^{2\pi R} dx^3 \mathcal{L}^{(3)} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{\Psi}_n i \partial \Psi_n + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{n+\alpha}{R} - eA_3 \right) \bar{\Psi}_n \Psi_n + \\ &+ \bar{L}i\partial L - |\sigma|^2 + \left(m \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{\Psi}_n L + \text{h. c.} \right), \quad (8) \end{aligned}$$

где $m = Ng\sigma$, $N = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}$ — нормировочная константа.

2. Спектр масс

Теперь перейдем к матричному представлению для фермионных полей Ψ

$$(\Psi)^T = (L, \Psi_0, \Psi_1, \Psi_{-1}, \Psi_2, \Psi_{-2}, \dots). \quad (9)$$

Массовая матрица запишется ($eA_3 \equiv a$) в виде

$$M = \begin{pmatrix} 0 & m^* & m^* & m^* & m^* & \dots \\ m & \frac{\alpha}{R} - a & 0 & 0 & 0 & \dots \\ m & 0 & \frac{\alpha+1}{R} - a & 0 & 0 & \dots \\ m & 0 & 0 & \frac{\alpha-1}{R} - a & 0 & \dots \\ m & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha+2}{R} - a & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Тогда эффективный лагранжиан можно записать в матричном виде

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^{(2)} = \bar{\Psi}i\partial\Psi + \bar{\Psi}M\Psi - |\sigma|^2, \quad (11)$$

а смешанную часть лагранжиана для фермионных полей в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{mixing}}^{(2)} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{n+\alpha}{R} - eA_3 \right) \bar{\Psi}_n \Psi_n + \\ &+ \left(m \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{\Psi}_n L + \text{h. c.} \right) = \bar{\Psi}M\Psi. \quad (12) \end{aligned}$$

Запишем уравнение на собственные значения

$$\det(M - \lambda I) = \left(\prod_{j=1}^{\infty} \left[\left(\lambda + a - \frac{\alpha}{R} \right)^2 - \left(\frac{j}{R} \right)^2 \right] \right) \times \\ \times \left(\lambda \left(\lambda + a - \frac{\alpha}{R} \right) - |m|^2 - 2 \left(\lambda + a - \frac{\alpha}{R} \right)^2 |m|^2 \times \right. \\ \left. \times \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{1}{\left(\lambda + a - \frac{\alpha}{R} \right)^2 - \left(\frac{l}{R} \right)^2} \right) = 0. \quad (13)$$

К нетривиальным решениям приводит равенство нулю только второй скобки.

Далее воспользуемся формулой

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y}{n^2 - y^2} = -\frac{1}{2y} + \frac{1}{2} \pi \operatorname{ctg}(\pi y) \quad (14)$$

и получим

$$\lambda \left(\lambda + a - \frac{\alpha}{R} \right) - \\ - |m|^2 \pi R \left(\lambda + a - \frac{\alpha}{R} \right) \operatorname{ctg} \left(\pi R \left(\lambda + a - \frac{\alpha}{R} \right) \right) = 0, \quad (15)$$

или

$$\lambda R = m^2 R^2 \pi \operatorname{ctg} \left(\pi R \left(\lambda + a - \frac{\alpha}{R} \right) \right). \quad (16)$$

Если считать аргумент котангенса малым параметром, то из предыдущей формулы имеем

$$\pi \lambda R = (\pi |m| R)^2 \frac{1}{\pi R \left(\lambda + a - \frac{\alpha}{R} \right)}, \quad (17)$$

откуда

$$\lambda = \frac{\alpha - aR \pm \sqrt{(aR - \alpha)^2 + 4|m|^2 R^2}}{2R} \quad (18)$$

при условии $|m| \ll 1/R$.

Из уравнения (18) видно, что генерируемая масса зависит от радиуса компактификации, параметра фазового смещения α и калибровочного поля a . Таким образом, мы можем получать различные значения массы, варьируя эти параметры. Заметим, что при условии $a = 0$ и $\alpha = 0$ следует $\lambda = \pm |m|$. Таким образом мы получили массу для легких фермионов, много меньшую массы калуца-клейновских мод для фермионов в трехмерии. Следовательно, данный результат может рассматриваться как указание на одну из возможностей обоснования проблемы иерархии масс.

3. Эффективный потенциал модели

Вернемся к формуле эффективного лагранжиана модели в матричном виде

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^{(2)} = \bar{\Psi} i \not{\partial} \Psi + \bar{\Psi} M \Psi - |\sigma|^2. \quad (19)$$

Производящий функционал нашей системы дается формулой

$$Z = \int [D\bar{\Psi}] [D\Psi] [D\sigma] [D\sigma^*] e^{i \int d^2x \mathcal{L}^{(2)}}. \quad (20)$$

Интегрируя по фермионным полям, получаем

$$Z = \int [D\sigma] [D\sigma^*] e^{-i \int d^2x V_{\text{eff}}(\sigma)}, \quad (21)$$

где эффективный потенциал определяется стандартным образом:

$$V_{\text{eff}} = |\sigma|^2 - \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \ln \det(M + I \not{k}), \quad (22)$$

или

$$V_{\text{eff}} = |\sigma|^2 - \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{2} \ln \det(M^2 + I k^2). \quad (23)$$

Отсюда с помощью формулы (13) найдем

$$V_{\text{eff}} = |\sigma|^2 - \int_0^{\Lambda} \frac{dk k}{4\pi} \times \\ \times \ln \left[(k \operatorname{sh}(\pi k R) + m^2 \pi R \operatorname{ch}(\pi k R))^2 + \right. \\ \left. + (k^2 - m^4 \pi^2 R^2) \sin^2(\pi(\alpha - aR)) \right]. \quad (24)$$

Запишем уравнение щели, $\frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial \sigma} = 0$:

$$1 - \int_0^{\Lambda} \frac{dk k}{4\pi} \times \\ \times \frac{\left(k \operatorname{sh}(\pi k R) + \frac{g^2 \sigma^2}{2} \operatorname{ch}(\pi k R) \right) g^2 \operatorname{ch}(\pi k R) - \frac{g^4 \sigma^4}{2} \sin^2(\pi A)}{\left(k \operatorname{sh}(\pi k R) + \frac{g^2 \sigma^2}{2} \operatorname{ch}(\pi k R) \right)^2 + \left(k^2 - \frac{g^4 \sigma^4}{4} \right) \sin^2(\pi A)} = \\ = 0, \quad (25)$$

где $A = \alpha - aR$. График поведения эффективного потенциала при $\alpha = 0$ изображен на рис. 1. Как видно,

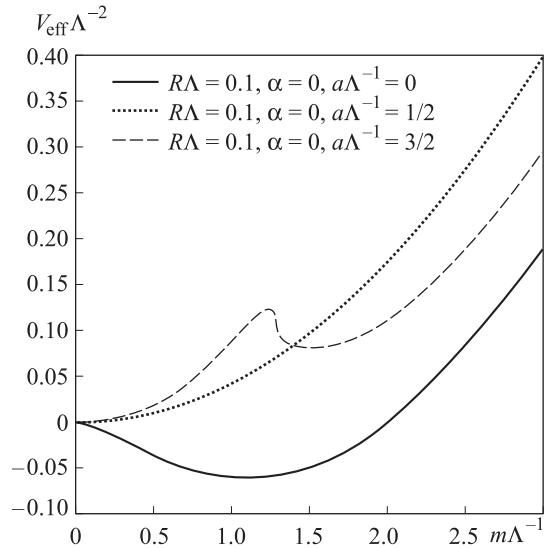


Рис. 1. Зависимость эффективного потенциала от $m \Lambda^{-1}$ при нулевом значении параметра фазового смещения α . Эффективный потенциал имеет ненулевой экстремум ($m R \simeq 0.1$) при значениях поля $a = 0$, два экстремума при $a = 3/2$ и равный нулю экстремум при $a = 1/2$

эффективный потенциал имеет экстремум ($m R \simeq 0.1$) при значениях поля $a = 0$, два экстремума при $a = 3/2$ и экстремум в нуле при $a = 1/2$.

4. Критическая константа связи

Вычислим критическую константу связи, которая определяется из условия $|\sigma| = 0$:

$$1 - \int_{\xi}^{\Lambda} \frac{dk}{4\pi} \frac{g_c^2 \operatorname{sh}(\pi k R) \operatorname{ch}(\pi k R)}{\operatorname{sh}^2(\pi k R) + \sin^2(\pi A)} = 0, \quad (26)$$

где введено обрезание ξ , поскольку интеграл расходится на нижнем пределе при $A \rightarrow 0$. Вычисляя получившийся интеграл, получаем

$$g_c^2 \Lambda = \frac{8\pi^2 R \Lambda}{\ln \left[\frac{\operatorname{ch}(2\pi R \Lambda) - \cos(2\pi R a - 2\pi \alpha)}{\operatorname{ch}(2\pi R \xi) - \cos(2\pi R a - 2\pi \alpha)} \right]}. \quad (27)$$

При $R \Lambda \rightarrow \infty$ имеем

$$g_c^2 \rightarrow \frac{4\pi}{\Lambda}, \quad (28)$$

что соответствует поведению критической константы в 3D-пространстве [23]. Переходя для удобства временно к безразмерным переменным

$$R \Lambda \rightarrow R, \quad g_c^2 \Lambda \rightarrow g^2, \quad \frac{\xi}{\Lambda} \rightarrow \xi, \quad (29)$$

получим

$$g_c^2 = \frac{8\pi^2 R}{\ln \left[\frac{\operatorname{ch}(2\pi R) - \cos(2\pi R a / \Lambda - 2\pi \alpha)}{\operatorname{ch}(2\pi R \xi) - \cos(2\pi R a / \Lambda - 2\pi \alpha)} \right]}. \quad (30)$$

На рис. 2 и 3, *a* изображена зависимость критической константы связи при различных значениях параметра обрезания ξ . На рис. 2, *a* при значении $a\Lambda^{-1} = 1$ критическая константа связи ведет себя как затухающая осциллирующая функция, стремящаяся асимптотически к критической константе связи при $a\Lambda^{-1} = 0$. На рис. 2, *б* при достаточно малом значении параметра обрезания $\xi = 0.001$ график критической константы связи получается негладким и на нем имеются особенности — острия. При более реальном значении

этого параметра $\xi = 0.1$ график оказывается похожим на поведение константы в пятимерии [22]. На рис. 3, *б* параметр обрезания выбран равным нулю и его роль здесь выполняет параметр смещения α .

5. Динамическое поле a

Теперь рассмотрим случай, когда a — динамическая переменная. Тогда экстремум эффективного потенциала дается уравнением щели $\frac{\partial V_{eff}}{\partial a} = 0$ для поля a :

$$\int_0^{\Lambda} \frac{dk}{4\pi} \sin(2\pi(\alpha - aR)) \pi R (k^2 - m^4 \pi^2 R^2) \times \\ \times [(k \operatorname{sh}(\pi k R) + m^2 \pi R \operatorname{ch}(\pi k R))^2 + \\ + (k^2 - m^4 \pi^2 R^2) \sin^2(\pi(\alpha - aR))]^{-1} = 0, \quad (31)$$

откуда находим, что экстремум имеет место при $\sin(2\pi(\alpha - aR)) = 0$, или

$$\alpha - aR = \frac{n}{2}, \quad (32)$$

где n — целые числа. Тогда $a = \frac{2\alpha - n}{2R}$, что эквивалентно решению $a = \frac{\alpha}{R}$ при четных $n = 2k$ и $a = \frac{2\alpha - 1}{2R}$ при нечетных $n = 2k + 1$. В частности, при периодических граничных условиях ($\alpha = 0$) $a = 0$ и $a = -\frac{1}{2R}$, при антипериодических ($\alpha = \frac{1}{2}$) $a = 0$ и $a = \frac{1}{2R}$.

При четных значениях n , $\cos(2\pi R a - 2\pi \alpha) = 1$, критическая константа связи выглядит так:

$$g_c^2 = \frac{8\pi^2 R}{\ln \left[\frac{\operatorname{ch}(2\pi R) - 1}{\operatorname{ch}(2\pi R \xi) - 1} \right]}. \quad (33)$$

При нечетных значениях n , $\cos(2\pi R a - 2\pi \alpha) = -1$, критическая константа связи выглядит так:

$$g_c^2 = \frac{8\pi^2 R}{\ln \left[\frac{\operatorname{ch}(2\pi R) + 1}{\operatorname{ch}(2\pi R \xi) + 1} \right]}. \quad (34)$$

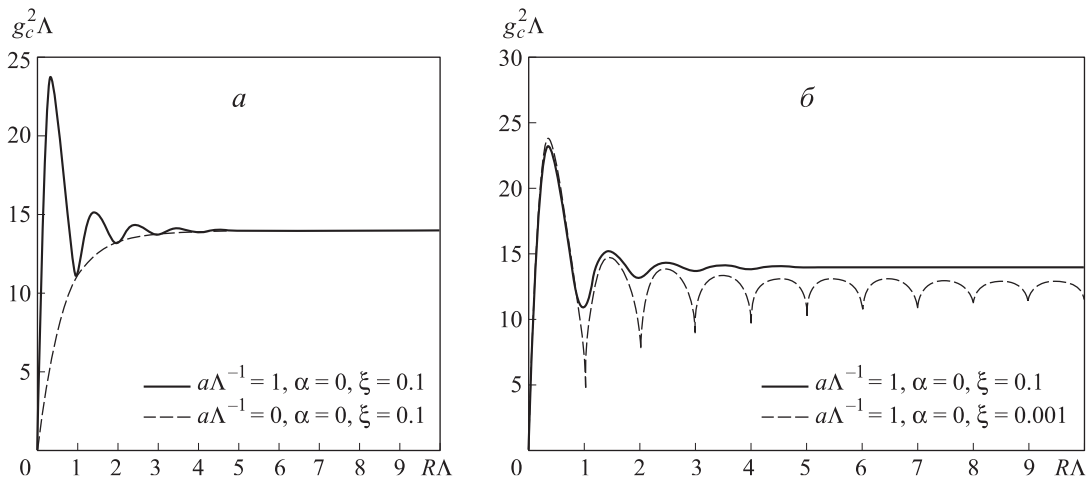


Рис. 2. Зависимость $g_c^2 \Lambda$ от $R \Lambda$: *a* — при различных параметрах поля a . При значении $a\Lambda^{-1} = 1$ критическая константа связи ведет себя как затухающая осциллирующая функция, стремящаяся при $R \Lambda \rightarrow \infty$ к асимптотической кривой, соответствующей критической константе связи при $a\Lambda^{-1} = 0$; *б* — при различных параметрах нижнего обрезания интеграла ξ . При достаточно малом значении параметра нижнего обрезания ($\xi = 0.001$) график критической константы связи получается негладким и на нем имеются особенности — острия

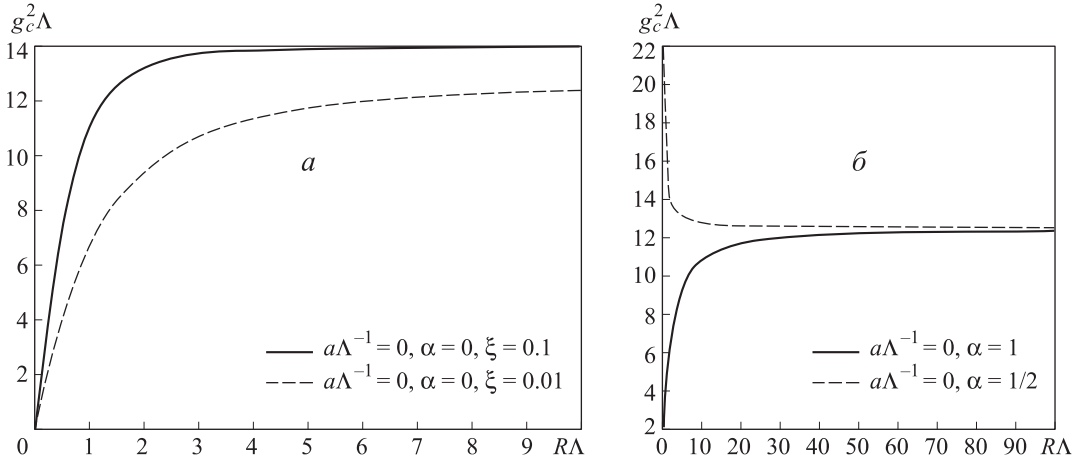


Рис. 3. Поведение $g_c^2 \Lambda$: а — при различных параметрах обрезания ξ и $a = 0, \alpha = 0$; б) — при значении параметра обрезания $\xi = 0$ и различных граничных условиях: периодических ($\alpha = 1$) и антипериодических ($\alpha = \frac{1}{2}$)

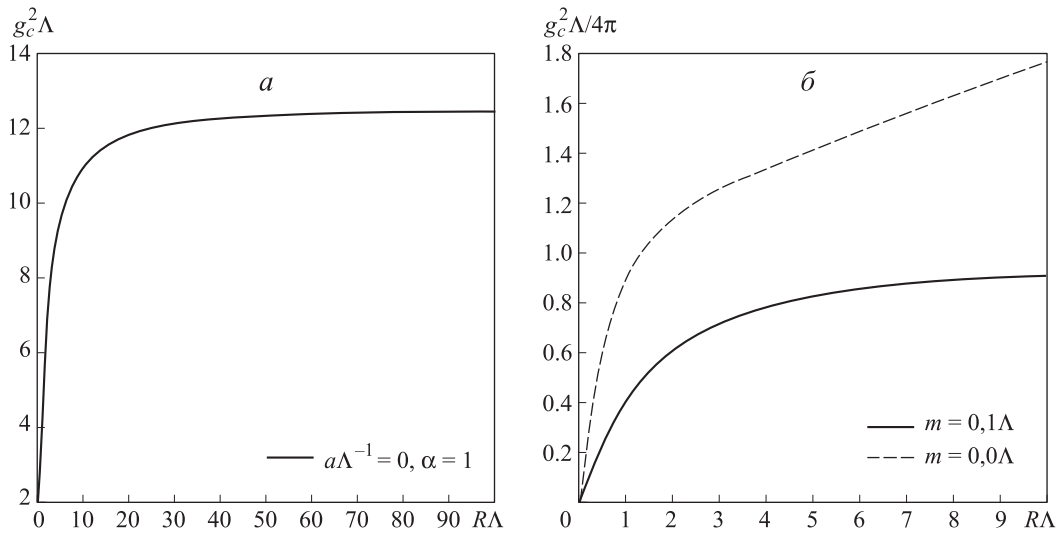


Рис. 4. Поведение $g_c^2 \Lambda$ при значении поля $a = \frac{\alpha}{R}$, при котором эффективный потенциал модели имеет экстремум (а), и поведение $g_c^2 \Lambda$ при различных параметрах $m \Lambda$ (б). Выбирая различные значения для $m \Lambda$ и радиус компактификации, можно получить соответствующее значение критической константы модели, а следовательно, и разные массы, что может решить проблему иерархии масс

Оценим генерируемую массу при этих критических значениях поля a .

Для четных значений n имеем $a - \frac{\alpha}{R} = 0$ и получаем

$$\lambda R = \pi |mR|^2 \operatorname{ctg}(\pi R \lambda). \quad (35)$$

Нас интересуют легкие фермионы с массами $\lambda \ll \frac{1}{R}$, в этом случае

$$\lambda R = \frac{|mR|^2}{\lambda R}, \quad (36)$$

или $\lambda = |m|$.

Для нечетных значений n имеем $a - \frac{\alpha}{R} = -\frac{1}{2R}$ и получаем

$$\lambda R = \pi |mR|^2 \operatorname{ctg} \left(\pi \left(R \lambda - \frac{1}{2} \right) \right). \quad (37)$$

Для $(\pi (R \lambda - \frac{1}{2})) \ll 1$ получим

$$\lambda R = \frac{|mR|^2}{\lambda R - \frac{1}{2}}, \quad (38)$$

или

$$\lambda R = \frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{16} + |mR|^2} \approx \frac{1}{2} + O(|mR|^2). \quad (39)$$

Таким образом, $\lambda \approx \frac{1}{2R} = a$. Тем самым мы получаем массу меньшую, чем калуца-клейновские моды $\lambda_n = \frac{n}{R}$.

6. Асимптотическое поведение константы связи

Вернемся к уравнению щели (25), положив $A = 0$ и выразив все через m ($\sigma = \frac{m}{g} \sqrt{2\pi R}$):

$$1 - \int_0^\Lambda \frac{k dk}{4\pi} \frac{g^2 \operatorname{ch}(\pi k R)}{k \operatorname{sh}(\pi k R) + m^2 \pi R \operatorname{ch}(\pi k R)} = 0. \quad (40)$$

Когда R мало, т.е. $mR \ll 1$, и в то же время $\Lambda R \gg 1$ (т.е. считаем, что $\frac{g^2}{\pi R} = \operatorname{const} = g_2$ — константа связи в двумерии), k дает основной вклад при $k \sim m$. Этот

случай соответствует компактификации $3D \rightarrow 2D$. Следовательно $\text{ch}(\pi kR) \approx 1 + \frac{(\pi kR)^2}{2}$ и $\text{sh}(\pi kR) \approx \pi kR$, тогда

$$1 - \int_0^\Lambda \frac{k dk}{4\pi} \frac{g^2 \left(1 + \frac{(\pi kR)^2}{2}\right)}{k^2 \pi R + \pi R m^2 \left(1 + \frac{(\pi kR)^2}{2}\right)} = 0, \quad (41)$$

откуда

$$g^2 = \frac{8\pi(\pi R + m^2 \pi^3 R^3)}{\ln\left(\frac{\Lambda^2 + \Lambda^2 m^2 \pi^2 R^2}{2m^2} + 1\right)}. \quad (42)$$

Поскольку $mR \ll 1$, получим

$$\frac{g^2}{4\pi R} = g_2 = \frac{2\pi}{\ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right)}, \quad (43)$$

или

$$m = \Lambda e^{-\pi/g_2}, \quad (44)$$

что согласуется с результатом [23]

$$m = \frac{2}{\beta} e^{-\pi/g} \quad (45)$$

для двумеризованной модели с точностью до очевидной замены обозначений. Сравнивая эффективный потенциал задачи [23]

$$V_{\text{eff}} = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2k \log(k^2 + \phi^2) + \frac{1}{2g} \phi^2 \quad (46)$$

с нашим результатом, с очевидностью находим, что $\frac{2}{\beta}$ выбрано как параметр обрезания интеграла (что соответствует Λ в нашей модели), g в модели [23] равно $\frac{g^2}{4\pi R}$ нашей модели, а ϕ равно $\frac{m}{2}$ нашей модели.

График зависимости $g^2 \Lambda$ от $R\Lambda$ при различных значениях параметра m/Λ показан на рис. 4, б. В пределе больших $R\Lambda$ верхняя кривая стремится к бесконечности, а нижняя стремится к 4π . Из графика видно, что при малом радиусе компактификации ($R < 1$) значение констант связи при разных m различно, тогда как при $R \rightarrow \infty$ критическая константа связи стремится к своему асимптотическому значению (28). Если рассмотреть константу связи, лежащую немного выше критической ($m = 0.1\Lambda$), то при малых значениях R мы можем получить различные малые значения констант связи и, следовательно, различные малые массы. Таким образом, можно объяснить иерархию масс разных поколений частиц. Зависимость константы связи от малого радиуса компактификации также дается формулой (43).

При $R \rightarrow \infty$ имеем $\text{sh}(\pi kR) \rightarrow \frac{1}{2}e^{\pi kR}$ и $\text{ch}(\pi kR) \rightarrow \frac{1}{2}e^{\pi kR}$, т. е. это величины одного порядка, тогда можно воспользоваться логарифмическим приближением. Действительно, сделаем замену $\pi kR \rightarrow x$:

$$\int \frac{\pi \Lambda R}{m^2 \pi^2 R^2} \frac{d \text{sh}(x) x}{x \text{sh}(x) + m^2 \pi^2 R^2 \text{ch}(x)} = \frac{4\pi^2 R}{g^2}, \quad (47)$$

откуда при условии $R \rightarrow \infty$ (будем считать, что $g = \text{const}$ и $m^2 R = \text{const} = M_3$) получим

$$g^2 = \frac{4\pi}{\Lambda - m^2 R \pi}, \quad (48)$$

или

$$m^2 R = M_3 = \frac{\Lambda}{\pi} - \frac{4}{g^2}, \quad (49)$$

т. е.

$$M_3 = 4 \left(\frac{1}{g_c^2} - \frac{1}{g^2} \right), \quad (50)$$

что также согласуется с результатом [23] для трехмерного предела.

7. Связь параметра обрезания ξ с конденсатом m

В полученном результате для критической константы связи положим $\alpha = 0$, тогда

$$g_c^2 = \frac{8\pi^2 R}{\ln \frac{\text{ch}(2\pi R) - \cos(2\pi R \frac{\xi}{\Lambda})}{\text{ch}(2\pi R \frac{\xi}{\Lambda}) - \cos(2\pi R \frac{a}{\Lambda})}}. \quad (51)$$

После преобразования этого выражения получим

$$g_c^2 = \frac{8\pi^2 R}{\ln \left(\frac{\text{ch}(2\pi R) - \cos(2\pi R \frac{\xi}{\Lambda})}{\text{ch}(2\pi R \frac{\xi}{\Lambda}) - \cos(2\pi R \frac{a}{\Lambda})} + 1 \right)}. \quad (52)$$

При $R \rightarrow 0$

$$g_c^2 = \frac{8\pi^2 R}{\ln \left(\frac{\Lambda^2 + \xi^2}{\xi^2 + a^2} + 1 \right)}. \quad (53)$$

Устремляя $\xi \rightarrow 0$ (рассматриваем инфракрасный предел) и проводя сравнение с выражением для асимптотики константы связи, получим $a^2 \sim 2m^2$. Откуда видно, что поле a в выражении для критической константы связи играет роль конденсата m в выражении для обычной константы связи. Если же положить $a \rightarrow 0$, то получим $\xi^2 \sim 2m^2$, откуда следует, что роль параметра обрезания в обычной константе связи играет конденсат m .

При $R \rightarrow \infty$

$$g_c^2 = \frac{4\pi}{\Lambda - \xi}. \quad (54)$$

Поскольку ξ — малый параметр инфракрасного обрезания, то он мал по сравнению с Λ , и тогда в пределе $R \rightarrow \infty$

$$g_c^2 = \frac{4\pi}{\Lambda}, \quad (55)$$

что согласуется с результатом (28).

Заключение

В настоящей работе мы изучили процесс динамического образования массы фермионов в 3D-модели с одним дополнительным измерением при взаимодействии двух типов фермионов, живущих в трехмерии и на 2D-бране, с учетом воздействия калибровочного поля A_3 .

Если поле A_3 рассматривать как внешний параметр, то динамическая масса оказывается осциллирующей функцией (при $a \neq 0$) с амплитудой, уменьшающейся с ростом радиуса компактификации. При этом динамическая масса становится независимой от калибровочного поля при большом радиусе компактификации и стремится к постоянному значению (см. рис. 2).

Если же рассматривать калибровочное поле A_3 как динамическую переменную, то экстремальное значение калибровочной переменной приводит к тривиальному

значению константы связи (рис. 4, а). Следует отметить, что при условии (32) генерируемая масса (18) получается порядка $\lambda \sim \frac{1}{2R}$ при $n = 1$, что равно калибровочной константе при антипериодических граничных условиях $a = \frac{\alpha}{R}$, $\alpha = \frac{1}{2}$. Тем самым мы получаем массу меньшую, чем массы калуца-клейновских мод $\lambda_n = \frac{n}{R}$.

Если рассмотреть график константы связи (28), лежащий немного выше критической величины ($m = 0.1\Lambda$), то при изменении R в области малых значений мы можем получить различные малые значения констант связи, а следовательно, и различные малые массы. Таким образом можно объяснить иерархию масс разных поколений частиц. При этом зависимость константы связи от малого радиуса компактификации дается формулой (43).

Авторы выражают благодарность А. В. Борисову и А. Е. Лобанову за ценные замечания и участие в плодотворной дискуссии при проведении исследования.

Список литературы

1. Kaluza Th. // d. Preuss. Akad. d. Wiss. Sitzungaber. 1921. P. 966.
2. Klein O. // Zeitsch. f. Phys. 1926. **37**. P. 895.
3. Arkani-Hamed N., Dimopoulos S., Dvali G.R. // Phys. Lett. 1998. **B429**. P. 263.
4. Randall L., Sundrum R. // Phys. Rev. Lett. 1999. **83**. P. 3370.
5. Zhukovsky V.Ch., Klimenko K.G., Khudyakov V.V., Ebert D. // JETP Lett. 2001. **73**. P. 121.
6. Zhukovsky V.Ch., Klimenko K.G., Khudyakov V.V. // Theor. Math. Phys. 2000. **124**. P. 1132.
7. Sundrum R. // arXiv:hep-th/0508134v2 17 Nov 2005.
8. Zhukovsky K.V., Eminov P.A. // Phys. Lett. B. 1995. **359**. P. 155.
9. Жуковский К.В., Эминов П.А. // Ядерная физика. 1996. **59**. С. 1265.
10. Жуковский В.Ч., Разумовский А.С., Жуковский К.В. // Изв. вузов (Поволжский регион). 2003. **2**. С. 80.
11. Zhukovsky V.Ch., Razumovsky A.S., Zhukovsky K.V. // arXiv:hep-th/0402070.
12. Novoselov K.S., Geim A.K., Morozov S.V. et al. // Nature. 2005. **438**. P. 197.
13. Castro Neto A.H., Guinea F., Peres N.M.R. et al. // arXiv:0709.1163v2.
14. Nambu Y., Jona-Lasinio G. // Phys. Rev. 1961. **122**. P. 345.
15. Klimenko K.G. // Z. Phys. 1988. **C37**. P. 457.
16. Rosenstein B., Warr B. J., Park S.H. // Phys. Rev. 1989. **D39**. P. 3088.
17. Gross D., Neveu A. // Phys. Rev. 1974. **D10**. P. 3235.
18. Caldas H., Rudnei O. Ramos // Phys. Rev. 2009. **B80**. P. 115428.
19. Drut J.E., Dam Thanh Son // Phys. Rev. 2008. **B77**. P. 075115.
20. Caldas H. // Nucl. Phys. 2009. **B807**. P. 651.
21. Abe H., Miguchi H., Muta T. // Mod. Phys. Lett. 2000. **A15**. P. 445.
22. Ebert D., Zhukovsky V.Ch., Tyukov A.V. // Mod. Phys. Lett. 2010. **A25**. P. 2933.
23. Bietenholz W., Gfeller A., Wiese U.-J. // JHEP. 2003. **0310**. P. 018.
24. Волобуев И.П., Кадышевский В.Г., Матеев М.Д., Мир-Касимов Р.М. // Теор. и мат. физ. 1979. **40**. С. 3.
25. Juan F. de, Cortijo A., Vozmediano M.A.H. // Phys. Rev. 2007. **B76**. P. 165409.
26. Vozmediano M.A.H., Katsnelson M.I., Guinea F. // Physics Reports. 2010. **496**. P. 109.
27. Gonzalez J., Guinea F., Vozmediano M.A.H. // Nucl. Phys. 1993. **B406**. P. 771.
28. Aharonov Y., Bohm D. // Phys. Rev. 1959. **115**. P. 485.
29. Gamayun A.V., Gorbar E.V. // Phys. Lett. 2005. **B610**. P. 74.
30. Ferrer E.J., Incera V. de la. // arXiv:hep-ph/0408229v1 20 Aug 2004.
31. Hosotani Y. // Phys. Lett. 1983. **B 126**. P. 309.

Fermion mass generation with Kaluza–Klein fermions and under the influence of gauge field in the 2+1 dimensional model

V. Ch. Zhukovsky^{1,a}, E. A. Stepanov¹

Department of Theoretical Physics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.

E-mail: ^a zhukovsk@phys.msu.ru.

In this article generation of mass on two dimensional brane in three dimensional model with four-fermion interaction including external gauge field A_3 was considered. In the framework of this model the generated mass proves to be lighter than Kaluza–Klein modes, thus indicating to a possibility of solving the mass hierarchy problem. Dependence of the effective potential and the coupling constant on such characteristics of the model as compactification radius, gauge field and phase shift parameter was also obtained.

Keywords: chiral condensate, Kaluza–Klein model, compactification, hierarchy of mass problem.

PACS: 11.30.Qc, 11.30.Rd, 12.38.Mh, 12.39.–x, 21.65.–f.

Received 28 July 2011.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 1(2012).

Сведения об авторах

1. Жуковский Владимир Чеславович — докт. физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939-31-77, e-mail: zhukovsk@phys.msu.ru.
2. Степанов Евгений Андреевич — аспирант; тел.: (495) 939-31-77, e-mail: stepanov@physics.msu.ru.