О конфигурациях классических полей Янга–Миллса, обладающих топологическим зарядом $k=4$

В. И. Иноземцев[1,a], П. Н. Сысоев[2,b]

[1] *Объединенный институт ядерных исследований. Россия, 141980, Московская обл., г. Дубна, ул. Жолио-Кюри, д. 6.*
[2] *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра квантовой статистики и теории поля. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.*
E-mail: [a] inozv@thsun1.jinr.ru, [b] sysoev@phys.msu.ru

Статья поступила 07.09.2011, подписана в печать 12.01.2012

Обсуждаются решения нелинейного матричного уравнении в конструкции Атьи–Хитчина–Дринфельда–Манина (АХДМ), определяющие самодуальные поля Янга–Миллса с топологическим зарядом $k=4$ для симплектических калибровочных групп. В случае групп $\mathrm{Sp}(n)$, $n>2$, может быть использован способ, примененный ранее для построения конфигураций полей с $k=3$. Для группы $SU(2)=\mathrm{Sp}(1)$ показано, что матрица АХДМ может быть построена по решениям кубического уравнения с коэффициентами, зависящими от $8k-3$ параметров.

Ключевые слова: самодуальные поля Янга–Миллса, симплектические калибровочные группы.
УДК: 530.24. PACS: 11.25.Db, 11.15.–q.

Введение

Описание всех мультиинстантонных конфигураций классических полей Янга–Миллса с данным топологическим зарядом $K=-\frac{1}{16\pi^2}\int \mathrm{Sp}(F_{\mu\nu}F^*_{\mu\nu})d^4x$, как было показано в работе Атьи, Хитчина, Дринфельда и Манина (АХДМ) [1], может быть достигнуто путем исследования чисто алгебраической нелинейной проблемы. Все решения уравнений дуальности $F_{\mu\nu}=\pm F^*_{\mu\nu}$ для произвольных компактных калибровочных групп, не имеющие (с точностью до калибровочных преобразований) сингулярных особенностей в R^4, согласно [1], допускают представление в виде

$$A_\mu(x)=N^*(x)\partial_\mu N(x), \quad N^+N=I, \tag{1}$$

где N — матрица, размеры которой определяются калибровочной группой и числом k. Для симплектических групп $\mathrm{Sp}(n)$ (в частности, для $SU(2)\equiv\mathrm{Sp}(1)$) структура этой матрицы наиболее проста [2]: N — матрица кватернионов $(n+k)\times n$, являющаяся решением линейного уравнения

$$N^+M(x)=0, \tag{2}$$

где M — матрица кватернионов $(n+k)\times k$, линейно зависящая от кватерниона $x=x_0-i\boldsymbol{\sigma x}$ ($\boldsymbol{\sigma}$ — матрицы Паули):

$$M=B-Cx. \tag{3}$$

Для любых значений x матрица M должна удовлетворять нелинейному соотношению [1]

$$M^+M=r(x), \tag{4}$$

где $r(x)$ — матрица вещественных чисел размером $k\times k$, обладающая обратной всюду в R^4, за исключением конечного числа точек $\{x_\alpha\}$. Инвариантность соотношений (2), (4) и потенциала A_μ (1) относительно линейных преобразований (3) позволяет привести M к канонической форме [3]:

$$\begin{aligned} &c_{ij}=0, \quad i\leqslant n; \quad c_{ij}=\delta_{i-n,j}, \quad i>n;\\ &B_{ij}=B_{j+n,i-n}, \quad i>n, \end{aligned} \tag{5}$$

т. е. совокупность последних k строк матрицы B является симметричной матрицей $\widetilde{B}_{lj}$, $1\leqslant l,\ j\leqslant k$. При использовании обозначения $\widetilde{q}_{ij}=B_{ij}$, $1\leqslant i\leqslant n$, соотношение (4) можно представить в виде $\frac{3k(k-1)}{2}$ нелинейных уравнений, связывающих $\widetilde{q}_{ij}$ и $\widetilde{B}_{lj}$:

$$\widetilde{B}^+\widetilde{B}+\widetilde{q}^+\widetilde{q}=r, \tag{6}$$

где r — вещественная матрица; $\widetilde{q}, \widetilde{B}$ определены с точностью до преобразований

$$\widetilde{B}\to O^+\widetilde{B}O, \quad \widetilde{q}\to\widetilde{q}O, \quad \widetilde{q}\to S\widetilde{q}. \tag{7}$$

Здесь O — произвольная вещественная ортогональная матрица, $S\in\mathrm{Sp}(n)$. В описанной выше конструкции АХДМ поле $A_\mu(x)$, соответствующее произвольной мультиинстантонной конфигурации, можно построить по матрице B посредством стандартных операций линейной алгебры. Для приложений в квантовой теории (вычисления пропагаторов скалярных и фермионных полей в присутствии инстантонов [3, 4], детерминантов линейных операторов, возникающих при оценках функциональных интегралов [5]) необходимо найти решения системы (6), позволяющие определить явную зависимость $N_\mu(x)$, $A_\mu(x)$ от параметров конфигураций k-инстантонов.

Общее решение (6) для произвольных k (содержащее $8k-3$ физических параметров для $SU(2)$) до настоящего времени не построено [2]. Наиболее простыми частными решениями являются $5k$-параметрический анзац т'Хоофта, для которого $\widetilde{B},\widetilde{q}$ — диагональная и вещественная матрицы соответственно, и его расширение посредством конформных преобразований [6] до многообразия размерности $(5k+4)$. Известно также общее решение при $k=3$ и асимптотическое разложение для произвольных k, применимое в пределе больших расстояний между инстантонами [3].

В настоящей работе показано, каким образом можно построить общее решение (6) в случае $k=4$. При этом наибольшие трудности возникают для группы $SU(2)$; при $n \geqslant 2$ для нахождения решений (6) может быть использован способ [3], предложенный для анализа (6) в случае $k=3$. Указывается также сравнительно простой набор матриц $\{\widetilde{B}, \widetilde{q}\}$ для произвольных $k \geqslant 2$, зависящих от $(4k+3)$ параметров и не входящих в анзац т'Хоофта.

Определение матриц $\boldsymbol{B}$, $\widetilde{q}$

Условие вещественности матрицы $\widetilde{B}^{+}\widetilde{B}+\widetilde{q}^{+}\widetilde{q}$ можно записать в следующей форме:

$$\sum_{s=1}^{n}([\boldsymbol{Q}_{si}, \boldsymbol{Q}_{sj}]-q_{si}\boldsymbol{Q}_{sj}+q_{sj}\boldsymbol{Q}_{si})+\sum_{l=1}^{k}[\boldsymbol{B}_{li}, \boldsymbol{B}_{lj}]-\{b, \boldsymbol{B}\}_{ij}=0, \quad 1 \leqslant i<j \leqslant k, \tag{8}$$

где введены обозначения $\widetilde{q}=q-i\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{Q}$, $\widetilde{B}=b-i\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{B}$; q, $\boldsymbol{Q}$, b, $\boldsymbol{B}$ — вещественные матрицы, $\{b, \boldsymbol{B}\} = b\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}b$. Преобразованиями (7) матрица b всегда может быть приведена к диагональному виду, а q, $\boldsymbol{Q}$ — к квазитреугольному:

$$b_{ij}=b_i\delta_{ij}, \quad q_{si}=0, \quad s>k+1-i, \quad \boldsymbol{Q}_{si}=0, \quad s \geqslant k+1-i. \tag{9}$$

При рассмотрении решений (8) для группы $SU(2)$ будем опускать первый индекс у элементов матриц q, $\boldsymbol{Q}$, полагая $q_{1i}=q_i$, $\boldsymbol{Q}_{1i}=\boldsymbol{Q}_i$ (отметим, что, согласно (9), $\boldsymbol{Q}_k=0$).

Поскольку векторы $\{\boldsymbol{B}_{ij}\}$ образуют набор, входящий в систему (8) линейно, выделим из матриц $\boldsymbol{B}$ диагональные части

$$\boldsymbol{B}_{ij}=\boldsymbol{Y}_i\delta_{ij}+\boldsymbol{X}_{ij}, \quad \boldsymbol{X}_{ii}=0. \tag{10}$$

Величины $\{\boldsymbol{Y}_i, b_i\}$ присутствуют в (8) лишь в виде разностей $\boldsymbol{Y}_i-\boldsymbol{Y}_j$, b_i-b_j. Вводя обозначение

$$\boldsymbol{Z}_i=\boldsymbol{Y}_i-\boldsymbol{Y}_k, \quad z_i=b_i-b_k, \quad i=1,\ldots,k-1, \tag{11}$$

представим систему (8) при $k=4$ для группы $SU(2)$ в виде

$$\begin{aligned}
&q_4\boldsymbol{Q}_1+[\boldsymbol{Z}_1, \boldsymbol{X}_{14}]-z_1\boldsymbol{X}_{14}+\boldsymbol{W}_1=0,\\
&q_4\boldsymbol{Q}_2+[\boldsymbol{Z}_2, \boldsymbol{X}_{24}]-z_2\boldsymbol{X}_{24}+\boldsymbol{W}_2=0,\\
&q_4\boldsymbol{Q}_3+[\boldsymbol{Z}_3, \boldsymbol{X}_{34}]-z_3\boldsymbol{X}_{34}+\boldsymbol{W}_3=0,
\end{aligned} \tag{8a}$$

$$\begin{aligned}
&[\boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_3]-q_1\boldsymbol{Q}_3+q_3\boldsymbol{Q}_1+\\
&\qquad+[\boldsymbol{Z}_1-\boldsymbol{Z}_3, \boldsymbol{X}_{13}]-(z_1-z_3)\boldsymbol{X}_{13}^{+}\boldsymbol{T}_{13}=0,\\
&[\boldsymbol{Q}_2, \boldsymbol{Q}_3]-q_2\boldsymbol{Q}_3+q_3\boldsymbol{Q}_2+\\
&\qquad+[\boldsymbol{Z}_2-\boldsymbol{Z}_3, \boldsymbol{X}_{23}]-(z_2-z_3)\boldsymbol{X}_{23}^{+}\boldsymbol{T}_{23}=0,\\
&[\boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_2]-q_1\boldsymbol{Q}_2+q_2\boldsymbol{Q}_1+\\
&\qquad+[\boldsymbol{Z}_1-\boldsymbol{Z}_2, \boldsymbol{X}_{12}]-(z_1-z_2)\boldsymbol{X}_{12}^{+}\boldsymbol{T}_{12}=0,
\end{aligned} \tag{8b}$$

где

$$\boldsymbol{W}_i=\sum_{l=1}^{3}[\boldsymbol{X}_{li}, \boldsymbol{X}_{l4}], \quad i=1,2,3, \quad \boldsymbol{T}_{ij}=\sum_{l=1}^{4}[\boldsymbol{X}_{li}, \boldsymbol{X}_{lj}].$$

Подсистема (8b) при $\boldsymbol{Q}_3=0$ соответствует случаю $k=3$; ее решение может быть легко найдено, если в качестве девяти неизвестных величин выбрать $\boldsymbol{Q}_1$, $\boldsymbol{Q}_2$, q_i, $i=1,2,3$ [3]. При $k=4$ число элементов матриц q, $\boldsymbol{Q}$, b, $\boldsymbol{B}$, подлежащих определению посредством (8a), (8b) через остальные, составляет 18. Выбор девяти из них очевиден: согласно (8a),

$$\boldsymbol{Q}_i=q_4^{-1}([\boldsymbol{X}_{i4}, \boldsymbol{Z}_i]+z_i\boldsymbol{X}_{i4}-\boldsymbol{W}_i), \quad i=1,2,3. \tag{12}$$

Основную трудность представляет выделение такого набора остальных 9 элементов, для которого степень алгебраических уравнений подсистемы (8b) с учетом соотношений (12) является минимальной. Заметим, что включение в этот набор любого из элементов матрицы X приводит к уравнениям выше 5-й степени, поэтому его следует составить из $\boldsymbol{Z}_i$, z_i, q_i.

Покажем, что набор $\{\boldsymbol{Z}_1, \boldsymbol{Z}_2, z_1, z_2, q_1\}$ может быть определен посредством решения алгебраического уравнения 3-й степени. Действительно, поскольку $\boldsymbol{Q}_3$ не содержит элементов набора, первые два уравнения (8b) с учетом (12) линейны относительно $\boldsymbol{Z}_1$, $\boldsymbol{Z}_2$ и обладают одинаковой структурой:

$$[\boldsymbol{Q}_3[\boldsymbol{Z}_\gamma, \boldsymbol{b}_\gamma]]+[\boldsymbol{c}_\gamma, \boldsymbol{Z}_\gamma]=\boldsymbol{Q}_3 q_\gamma+\boldsymbol{d}_\gamma z_\gamma+\boldsymbol{e}_\gamma, \quad \gamma=1,2, \tag{13}$$

где

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{b}_\gamma&=q_4^{-1}\boldsymbol{X}_{\gamma 4},\\
\boldsymbol{c}_\gamma&=q_3 q_4^{-1}\boldsymbol{X}_{\gamma 4}-\boldsymbol{X}_{\gamma 3},\\
\boldsymbol{d}_\gamma&=\boldsymbol{X}_{\gamma 3}-q_3 q_4^{-1}\boldsymbol{X}_{\gamma 4}+q_4^{-1}[\boldsymbol{Q}_3\boldsymbol{X}_{\gamma 4}],\\
\boldsymbol{e}_\gamma&=-\boldsymbol{T}_{\gamma 3}+[\boldsymbol{Z}_3\boldsymbol{X}_{\gamma 3}]+q_3 q_4^{-1}\boldsymbol{W}_\gamma-q_4^{-1}[\boldsymbol{Q}_3\boldsymbol{W}_\gamma].
\end{aligned}$$

Решение уравнения $[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{b}\boldsymbol{z}]]+[\boldsymbol{c}\boldsymbol{z}]=\boldsymbol{d}$ может быть записано в виде

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})&=\left[(\boldsymbol{ab})^2+\boldsymbol{c}^2\right]^{-1}\times\\
&\times\Big\{\boldsymbol{d}(\boldsymbol{ab})-[\boldsymbol{cd}]+\big\{\boldsymbol{c}\big(\boldsymbol{cd}\times\boldsymbol{c}^2+\boldsymbol{ad}\times\boldsymbol{cb}\times\boldsymbol{ab}+\\
&+\boldsymbol{cd}\times(\boldsymbol{abc})-\boldsymbol{cb}\times(\boldsymbol{acd})\big)+\big(\boldsymbol{b}(\boldsymbol{ab})-[\boldsymbol{cb}]\big)\times\\
&\times\big(\boldsymbol{ac}\times\boldsymbol{cd}+\boldsymbol{ad}\times(\boldsymbol{ab})^2-\boldsymbol{ab}\times(\boldsymbol{acd})\big)\big\}\times\\
&\times\big(\boldsymbol{c}^2\times\boldsymbol{ab}-\boldsymbol{ac}\times\boldsymbol{bc}+\boldsymbol{ab}\times(\boldsymbol{abc})\big)^{-1}\Big\}.
\end{aligned}$$

Для простоты здесь и далее используется обозначение $(abc)=\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{bc}]$.

Таким образом, зависимость векторов $\boldsymbol{Z}_1$, $\boldsymbol{Z}_2$ от остальных величин набора z_1, z_2, q_1 линейна:

$$\boldsymbol{Z}_\gamma=\boldsymbol{L}_\gamma z_\gamma+\boldsymbol{M}_\gamma+\boldsymbol{N}_\gamma q_1, \quad \gamma=1,2, \tag{13a}$$

где

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{L}_\gamma=\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Q}_3, \boldsymbol{b}_\gamma, \boldsymbol{c}_\gamma, \boldsymbol{d}_\gamma),\\
&\boldsymbol{N}_1=\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Q}_3, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{Q}_3), \quad \boldsymbol{N}_2=0,\\
&\boldsymbol{M}_1=\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Q}_3, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{e}_1), \quad \boldsymbol{M}_2=\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Q}_3, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{Q}_3 q_2).
\end{aligned}$$

Согласно (12), в такой же форме могут быть представлены и векторы

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{Q}_\gamma=\boldsymbol{P}_\gamma z_\gamma+\boldsymbol{R}_\gamma+\boldsymbol{S}_\gamma q_1,\\
&\boldsymbol{P}_\gamma=q_4^{-1}(\boldsymbol{X}_{\gamma 4}+[\boldsymbol{X}_{\gamma 4}, \boldsymbol{L}_\gamma]),\\
&\boldsymbol{S}_\gamma=q_4^{-1}[\boldsymbol{X}_{\gamma 4}, \boldsymbol{N}_\gamma],\\
&\boldsymbol{R}_\gamma=q_4^{-1}([\boldsymbol{X}_{\gamma 4}, \boldsymbol{M}_\gamma]-\boldsymbol{W}_\gamma).
\end{aligned} \tag{12a}$$

Подстановка (12а), (13а) в последнее из уравнений (8b) позволяет определить систему уравнений второго порядка для z_1, z_2, q_1:

$$\boldsymbol{\lambda}_1 z_1 z_2 + \boldsymbol{\mu}_1 q_1 z_2 = \boldsymbol{\lambda}_2 z_1 + \boldsymbol{\mu}_2 q_1 + \boldsymbol{s} z_2 + \boldsymbol{t}, \qquad (8c)$$

где

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\lambda}_1 &= [\boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{P}_2],\\
\boldsymbol{\lambda}_2 &= [\boldsymbol{X}_{12}\boldsymbol{L}_1] + \boldsymbol{X}_{12} - q_2\boldsymbol{P}_1 + [\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{P}_1],\\
\boldsymbol{\mu}_1 &= [\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{P}_2] - \boldsymbol{P}_2,\\
\boldsymbol{\mu}_2 &= [\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{S}_1] + \boldsymbol{R}_2 + [\boldsymbol{X}_{12}\boldsymbol{N}_1] - q_2\boldsymbol{S}_1,\\
\boldsymbol{s} &= [\boldsymbol{L}_2\boldsymbol{X}_{12}] + [\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{R}_1] - \boldsymbol{X}_{12},\\
\boldsymbol{t} &= [\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{R}_1] + [\boldsymbol{M}_2 - \boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{X}_{12}] - q_2\boldsymbol{R}_1 - \boldsymbol{T}_{12}.
\end{aligned}$$

Можно показать, что вследствие (8c) z_2 является решением кубического уравнения

$$z_2^3(s\lambda_1\mu_1) + z_2^2[(t\lambda_1\mu_1) + (s\mu_2\lambda_1) + (s\mu_1\lambda_2)] + \\ + z_2[(s\lambda_2\mu_2) + (t\mu_2\lambda_1) + (t\mu_1\lambda_2)] + (t\lambda_2\mu_2) = 0. \qquad (15)$$

Отметим, что по крайней мере одно из решений (15) является вещественным. Остальные элементы набора z_1, q_1 связаны с z_2 соотношениями

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{[\boldsymbol{\lambda}_1\boldsymbol{\mu}_1]\big(z_2^2[\boldsymbol{s}\boldsymbol{\mu}_1] + z_2([\boldsymbol{t}\boldsymbol{\mu}_1] + [\boldsymbol{\mu}_2\boldsymbol{s}]) + [\boldsymbol{\mu}_2\boldsymbol{t}]\big)}{[\boldsymbol{\lambda}_1\boldsymbol{\mu}_1]\big(z_2^2[\boldsymbol{\lambda}_1\boldsymbol{\mu}_1] + z_2([\boldsymbol{\mu}_2\boldsymbol{\lambda}_1] + [\boldsymbol{\mu}_1\boldsymbol{\lambda}_2]) + [\boldsymbol{\lambda}_2\boldsymbol{\mu}_2]\big)},\\
q_1 &= \frac{[\boldsymbol{\lambda}_1\boldsymbol{\mu}_1]\big(z_2^2[\boldsymbol{\lambda}_1\boldsymbol{s}] + z_2([\boldsymbol{\lambda}_1\boldsymbol{t}] + [\boldsymbol{s}\boldsymbol{\lambda}_2]) + [\boldsymbol{t}\boldsymbol{\lambda}_2]\big)}{[\boldsymbol{\lambda}_1\boldsymbol{\mu}_1](z_2^2[\boldsymbol{\lambda}_1\boldsymbol{\mu}_1] + z_2([\boldsymbol{\mu}_2\boldsymbol{\lambda}_1] + [\boldsymbol{\mu}_1\boldsymbol{\lambda}_2]) + [\boldsymbol{\lambda}_2\boldsymbol{\mu}_2])}.
\end{aligned} \qquad (16)$$

Формулы (12)–(16) дают общее решение задачи об определении всех матриц B для группы $\mathrm{Sp}(1) \equiv SU(2)$ при $k=4$, позволяя найти элементы $\boldsymbol{Q}_i$, $\boldsymbol{Z}_1$, $\boldsymbol{Z}_2$, z_1, z_2, q_1 по произвольно заданным 29 параметрам $\boldsymbol{X}_{ij}$, $\boldsymbol{Z}_3$, z_3, $\boldsymbol{Y}_4$, y_4, q_2, q_3, q_4. Для групп $\mathrm{Sp}(n)$, $n \geqslant 2$, структура уравнений (8а) остается неизменной (достаточно лишь изменить обозначения: $q_4 \to q_{14}$, $\boldsymbol{Q}_i \to \boldsymbol{Q}_{1i}$); в левой части (8b) появляются дополнительные слагаемые (например, для $\mathrm{Sp}(2)$ — $q_{23}\boldsymbol{Q}_{21}$, $q_{23}\boldsymbol{Q}_{22}$, и $[\boldsymbol{Q}_{21}\boldsymbol{Q}_{22}] - q_{21}\boldsymbol{Q}_{22} + q_{22}\boldsymbol{Q}_{21}$ соответственно в первом, втором и третьем уравнениях (8b)). Вся система (8а), (8b) может быть решена тем же способом, что и в случае $k=3$: из (8а) определяются $\boldsymbol{Q}_{1i}$, после чего из (8b) могут быть найдены элементы $\boldsymbol{Q}_{21}$, $\boldsymbol{Q}_{22}$, q_{21}, q_{22}, q_{23}.

Заключение

Построим для произвольных k сравнительно простое $(4k+3)$-параметрическое множество матриц $\{\widetilde{B}, \widetilde{q}\}$ для группы $SU(2)$, не входящее в анзац т'Хоофта. С этой целью запишем систему (8) в виде

$$\begin{aligned}
\left\{B^{(1)}, B^{(2)}\right\} - \left\{b, B^{(3)}\right\} &= -\left(Q^{(1)}Q^{(2)}\right) + \left(qQ^{(3)}\right),\\
\left\{B^{(3)}, B^{(1)}\right\} - \left\{b, B^{(2)}\right\} &= -\left(Q^{(3)}Q^{(1)}\right) + \left(qQ^{(2)}\right),\\
\left\{B^{(2)}, B^{(3)}\right\} - \left\{b, B^{(1)}\right\} &= -\left(Q^{(2)}Q^{(3)}\right) + \left(qQ^{(1)}\right),
\end{aligned} \qquad (17)$$

где $B^{\{\gamma\}}$, $Q^{\{\gamma\}}$, $\gamma = 1,2,3$ — компоненты векторов $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{Q}$; (qQ) — антисимметричные матрицы, составленные из элементов q_i, Q_i: $(qQ)_{ij} = q_iQ_j - q_jQ_i$. При условии $Q^{(1)} = Q^{(2)} = Q^{(3)} = 0$ решением (17) является анзац т'Хоофта:

$$\left\{B^{(\gamma)}\right\}_{ij} = b_i^{(\gamma)}\delta_{ij}, \quad b_{ij} = b_i\delta_{ij}. \qquad (18)$$

Рассмотрим систему (17) в случае, когда $k-1$ элемент $Q^{(1)}$ отличен от нуля (k-й элемент всегда можно обратить в нуль преобразованием (7)). Первые два уравнения (17) при этом можно представить в виде условия обращения в нуль коммутатора комплексных матриц $L = B^{(1)} - ib$, $M = B^{(2)} - iB^{(3)}$:

$$\{L, M\} = 0. \qquad (19)$$

Простейшим решением (19) является

$$M = \alpha I + \beta L, \qquad (20)$$

где $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, $\beta = \beta_1 + i\beta_2$ — произвольные комплексные числа, I — единичная матрица $(k \times k)$. Поскольку матрица I всегда может быть выбрана диагональной, решение последнего из уравнений (17) с учетом (20) позволяет непосредственно определить $B^{\{\gamma\}}$:

$$\begin{aligned}
B_{ij}^{(1)} &= \begin{cases} b_i^{(1)}, & i = j,\\ (1+\beta\beta^*)^{-1}\frac{(Q_i^{(1)}q_j - Q_j^{(1)}q_i)}{b_i - b_j}, & i \neq j, \end{cases}\\
B_{ij}^{(2)} &= (\alpha_1 + \beta_2 b_i)\delta_{ij} + \beta_1 B_{ij}^{(1)},\\
B_{ij}^{(3)} &= (-\alpha_2 + \beta_1 b_i)\delta_{ij} - \beta_2 B_{ij}^{(1)},
\end{aligned} \qquad (21)$$

Посредством обращения матрицы кватернионов $\widetilde{M} = b - x_0 I - i\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{x}I)$ можно построить решение матричного уравнения (2), зависящее от $(4k+3)$ параметров b_j, $B_j^{(1)}$, q_j, $Q_j^{(1)}$ $(j = 1, \ldots, k,\ Q_k^{(1)} = 0)$, α_1, α_2, β_1, β_2. Физическая интерпретация этих параметров, однако, не столь проста, как для анзаца т'Хоофта (18); использование (12)–(16), (21) для оценки квантовых эффектов точных k-инстантонных конфигураций с отличными от нуля параметрами «групповой ориентации» инстантонов $\boldsymbol{Q}_j$ требует привлечения численных методов.

Список литературы

1. *Atiyah M.P., Hitchin N.J., Drinfeld V.G.* et al. // Phys. Lett. 1978. **65A**. P. 185.
2. *Corrigan E.* // Phys. Rep. 1979. **49**. P. 95.
3. *Christ N., Weinberg E.J., Stanton N.K.* // Phys. Rev. 1976. **D18**. P. 2013.
4. *Brown L. S., Carlitz R.D., Creamer D.B.* et al. // Phys. Rev. 1978. **D17**. P. 1583.
5. *Berg B., Lusher M.* // Nucl. Phys. 1979. **Bi60**, P. 281; *Belavin A.A., Pateev V.A., Schwarz A.S.* et al. // Phys. Lett. 1979. **83B**. P. 317.
6. *Jackiw R., Nohl C., Rebbi C.* // Phys. Rev. 1979. **D15**. P. 1642.

About configuration of classical Yang–Mills fields with topological charge $k = 4$

V. I. Inozemtsev[1,a], **P. N. Sysoev**[2,b]

[1] *Laboratory of Theoretical Physics, Joint Institute for Nuclear Research, Dubna 141980, Moscow Region, Russia.*
[2] *Department of Quantum Statistics and Field Theory, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.*
E-mail: [a] *inozv@thsun1.jinr.ru,* [b] *sysoev@phys.msu.ru.*

The solutions of nonlinear matrix equation, which determine self-dual Yang–Mills fields with topological charge $k = 4$ in the construction of Atiyah, Hitchin,. Drinfeld and Manin (AHDM) are discussed for symplectic gauge groups. In the case of $\mathrm{Sp}(n)$, $n > 2$, one can use the method proposed earlier for constructing solutions with $k = 3$. For $SU(2) = \mathrm{Sp}(1)$ it is shown that the AHDM matrix can be constructed from the solutions of a cubic equation with coefficients depending on $8k - 3$ parameters.

Keywords: self-dual Yang–Mills fields, symplectic gauge groups.
PACS: 11.25.Db, 11.15.–q.
Received 7 September 2011.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 1(2012).

Сведения об авторах

1. Сысоев Павел Николаевич — инженер; e-mail: sysoev@phys.msu.ru.
2. Иноземцев Владимир Иванович — докт. физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник; тел.: (496) 216-32-72, e-mail: inozv@theor.jinr.ru.