Влияние магнитного поля на кроссовер от линейной к квадратичной частотной зависимости бесфононной прыжковой проводимости неупорядоченных систем

М. А. Ормонт

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра физики полупроводников. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
E-mail: ormont@phys.msu.ru

Статья поступила 09.09.2011, подписана в печать 31.10.2011

Исследовано влияние внешнего магнитного поля на частотную зависимость бесфононной прыжковой проводимости неупорядоченных систем. Найдена зависимость низкотемпературной бесфононной проводимости от приложенного магнитного поля. Показано, что в пределе сильного магнитного поля частота перехода (кроссовера) от линейной к квадратичной частотной зависимости бесфононной проводимости логарифмически растет с величиной магнитного поля.

Ключевые слова: бесфононная (резонансная) прыжковая проводимость, прыжковая проводимость в магнитном поле.

УДК: 621.315.592. PACS: 72.20.Ee.

Введение

Сравнение стандартной теории бесфононной прыжковой проводимости [1, 2] с экспериментальными частотными зависимостями проводимости легированных полупроводников в окрестности концентрационного перехода металл–изолятор [3–7] показало наличие ряда особенностей [8–10]. В частности, в работах [3, 6] была обнаружена суперлинейность частотной зависимости проводимости в широкой области частот при низких температурах; это не согласуется с предсказываемой теорией сублинейностью частотной зависимости бесфононной проводимости при малых частотах [2]. В работе [10] было показано, что стандартный подход к расчету суперлинейности частотной зависимости прыжковой проводимости, основанный на использовании одночастичной плотности состояний с кулоновской щелью, вообще говоря, неприменим при расчете высокочастотной бесфононной проводимости (при переходах на близкие центры). Кроме того, наблюдавшийся переход (кроссовер) от линейной к квадратичной частотной зависимости проводимости [3] оказался значительно более резким, чем предсказанный теоретически [2]. Проведенное в работе [8] рассмотрение показало, что квадратичная частотная зависимость в [2] может вообще не проявляться; при не слишком высоких частотах кулоновские эффекты существенны и частотная зависимость остается близкой к линейной. С ростом частоты ω переход на падающий участок кривой $\mathrm{Re}(\sigma(\omega))$, предшествующий выходу на насыщение, происходит до того, как достигается область квадратичной зависимости [8]. Однако предсказываемая теорией [1, 2] немонотонность частотной зависимости бесфононной проводимости до сих пор не обнаружена (в экспериментах на Si:B [4], Si:P [3, 5, 6], Si:As [7]). В работе [9] было предположено, что суперлинейность и монотонность экспериментально измеренных частотных зависимостей проводимости $\mathrm{Re}(\sigma(\omega))$ может указывать на независимость оптимальной длины прыжка от частоты.

Влияние гибридизации локализованных состояний на частотную зависимость низкотемпературной бесфононной прыжковой проводимости исследовалось в работе [9] в диапазоне частот, соответствующих переходам электронов на удаленные центры локализации. Поскольку гибридизация состояний, локализованных на узлах выделенной пары, существенно слабее, чем гибридизация волновых функций состояний на рассматриваемом узле и на соседних узлах, не принадлежащих выделенной паре, расчет прыжковой проводимости на переменном токе в [9] был проведен в пренебрежении гибридизацией состояний удаленных центров резонансных пар. Было показано, что при использовании базиса локализованных функций атомного типа $\{\psi_\lambda\}$ без учета гибридизации волновых функций удаленных центров частотная зависимость бесфононной проводимости может быть суперлинейной и монотонной в широкой области частот

$$\mathrm{Re}(\sigma(\omega)) = C_1 e^2 \rho_0^2 a^5 \omega \big(C_2 e^2/\kappa a + C_3 \hbar\omega/2\big), \qquad (1)$$

где C_1, C_2, C_3 — численные коэффициенты, $C_2/C_3 \approx 0.1$, a — радиус локализации состояний, e — заряд электрона, κ — диэлектрическая проницаемость среды, ρ_0 — плотность локализованных состояний (ее можно считать постоянной). Эти особенности поведения проводимости связаны с тем, что при одноэлектронных переходах как изменение дипольного момента системы, так и число участвующих в проводимости конечных центров не зависят от частоты [9]. При этом оптимальная длина прыжка определяется параметрами системы и не зависит от частоты, поскольку с уменьшением расстояния между центрами в паре уменьшается и изменение дипольного момента системы при электронном переходе, а с увеличением расстояния между центрами происходит экспоненциальное уменьшение перекрытия волновых функций состояний, отвечающих центрам локализации. Согласно [9], оптимальная длина прыжков, вносящих основной вклад в проводимость, соответствует переходам между состояниями с энергиями, лежащими вне кулоновской щели. Соответственно в рассматриваемой области частот кулоновские эффекты, приводящие к появлению кулоновской щели, играют малую роль. В отличие от стандартной теории [2], выражение (1) описывает более резкий переход от линейной к квадратичной частотной зависимости бесфононной проводимости в окрестности частоты кроссовера $\omega_{\rm cr} = 2(C_2/C_3)e^2/\hbar\kappa a$ [9]. Для характерных значений параметров исследуемых систем $a = 10 \div 100$ Å, $\kappa = 10$ имеем $\omega_{\rm cr} \sim 1 \div 10$ ТГц, что попадает в область частот, в которой наблюдался рассматриваемый переход (см., например, [3]). Такое поведение проводимости согласуется с наблюдаемыми особенностями частотной зависимости прыжковой проводимости $\mathrm{Re}(\sigma(\omega))$ легированных полупроводников вблизи концентрационного перехода металл–изолятор.

Отметим, что, согласно (1), частота кроссовера зависит от радиуса локализации примесных состояний a. Одна из возможностей изменения радиуса локализации связана с приложением к системе внешнего магнитного поля (см., например, [11]). Электрические свойства неупорядоченных систем в магнитном поле ранее интенсивно исследовались [11]; в частности, большое внимание было уделено особенностям поведения магнитосопротивления, обусловленным уменьшением перекрытия хвостов волновых функций примесей в сильном магнитном поле. Однако, судя по имеющейся литературе, для неупорядоченных систем в магнитном поле исследования особенностей поведения низкотемпературной прыжковой проводимости на переменном токе не проводились. Такие исследования могут дать дополнительную информацию об особенностях механизма переноса носителей заряда в неупорядоченных материалах. В связи с этим цель настоящей работы состояла в получении зависимости бесфононной прыжковой проводимости от величины и пространственной ориентации внешнего магнитного поля и установлении зависимости частоты кроссовера от приложенного магнитного поля.

Модель

Мы рассматриваем случай компенсированного полупроводника n-типа, считая, что концентрация случайно расположенных в пространстве примесных центров мала, так что при рассмотрении проводимости на переменном токе можно воспользоваться парным приближением, когда полный ток выражается в виде суммы вкладов парциальных токов от отдельных пар центров локализации [12]. При решении задачи о бесфононной проводимости неупорядоченной системы можно использовать полный ортонормированный набор одноэлектронных функций $\{\psi_\lambda\}$, соответствующих эффективному одночастичному гамильтониану $\widehat{H}_e$, учитывающему случайное поле (λ-представление) [12]. Полагая, что уровень Ферми находится ниже уровня протекания, т. е. попадает в область энергий, отвечающую локализованным состояниям, можно использовать усеченный базис из локализованных функций, взятых из набора $\{\psi_\lambda\}$. В случае сильной локализации функции ψ_λ близки к волновым функциям основных состояний примесей; при этом число λ отвечает номеру центра. Приближение слабого легирования и соответствующее ему неравенство $a \ll (N_d)^{-1/3}$ (N_d — концентрация легирующей примеси) дает возможность пренебречь изменением потенциала, создаваемого всеми другими центрами, на радиусе локализации a волновой функции и позволяет учитывать смещения энергий электронов классическим образом, добавляя к соответствующей энергии электрона слагаемое $-e\varphi(\boldsymbol{r}_\lambda)$; $\varphi(\boldsymbol{r}_\lambda)$ — кулоновский потенциал, создаваемый заряженными центрами в точке расположения центра с номером λ. При этом волновая функция примесного состояния остается неизменной и близкой к волновой функции, соответствующей изолированной примеси. Разброс уровней, возникающий за счет беспорядка в расположении заряженных примесей, порядка $\frac{e^2}{\kappa}N_d^{1/3}$; при этом вклад в беспорядок в положении уровней за счет квантово-механической гибридизации состояний мал в силу экспоненциальной малости интеграла перекрытия волновых функций локализованных состояний примесей. В случае легированного компенсированного полупроводника случайные кулоновские поля приводят к образованию примесной зоны [11]. Такие системы — неупорядоченные изоляторы с кулоновским взаимодействием между локализованными носителями — часто называют кулоновскими стеклами (например, слаболегированные компенсированные полупроводники, аморфные полупроводники, гранулированные материалы). Важным свойством кулоновских стекол является наличие в окрестности уровня Ферми кулоновской щели в одночастичной плотности состояний, описывающей распределение самосогласованных энергий взаимодействующих локализованных электронов в основном состоянии системы [11].

Выражение для бесфононной проводимости системы имеет вид (см., например, [12, 13])

$$\mathrm{Re}(\sigma(\omega)) = \frac{\pi e^2\omega}{V_0}\sum_{\{i,f\},\, i\neq f} |\langle i|(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})|f\rangle|^2 (n_F(\varepsilon_i) - n_F(\varepsilon_f)) \times \\ \times \delta(\Delta H_{if} - \hbar\omega), \quad (2)$$

где i, f — номера центров локализации, $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор в направлении внешнего электрического поля, $n_F(\varepsilon)$ — средние числа заполнения состояний с энергией ε;

$$\Delta H_{if} = \varepsilon_f - \varepsilon_i - \frac{e^2}{\kappa r_{if}} \quad (3)$$

— изменение энергии неупорядоченной системы при одноэлектронном переходе из начального i в конечное f состояние, r_{if} — расстояние между центрами i и f, ε_i, ε_f — самосогласованные энергии электрона, отвечающие состояниям i, f [14].

В пределе низких температур в качестве начального состояния выберем основное состояние системы, которому отвечает набор $\{n_j^0\}$ чисел заполнения центров локализации с энергиями $\{\varepsilon_j\}$. В этом случае все состояния с энергиями $\varepsilon_j < \mu$ заняты, а с энергиями $\varepsilon_j > \mu$ — свободны (μ — уровень Ферми).

Перейдем в выражении (2) от суммирования по парам к интегрированию по энергиям и пространственным координатам центров. Поскольку в широкой области частот, включающей и низкочастотный предел, основной вклад в проводимость вносят переходы вне кулоновской щели $2\Delta < \varepsilon_f - \varepsilon_i$ [9], выражение (2) для проводимости можно записать в виде

$$\mathrm{Re}(\sigma(\omega)) \approx \pi e^2 \omega \rho_0^2 \iiint d\varepsilon_i\, d\varepsilon_f\, d\boldsymbol{r}_{if}\, |\langle i|(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})|f\rangle|^2 \times \times (n_F(\varepsilon_i) - n_F(\varepsilon_f))\, \delta(\Delta H_{if} - \hbar\omega); \quad (4)$$

при этом плотность состояний $\rho(\varepsilon)$, описывающая распределение самосогласованных одночастичных энергий взаимодействующих локализованных носителей заряда в основном состоянии системы, близка к затравочной $\rho(\varepsilon) = \rho_0$.

Влияние магнитного поля на асимптотику огибающей волновой функции локализованного состояния

Как известно, сильное магнитное поле существенно модифицирует волновые функции примесных электронов, сжимая их в поперечном направлении и трансформируя сферически симметричные поверхности постоянного значения волновой функции в сигарообразные (см., например, [15]). Волновая функция примесного состояния в случае простой зоны (двукратно вырожденной по спину) представляет собой блоховскую волновую функцию, соответствующую дну зоны, модулированную огибающей локализованной функцией водородоподобного типа. Огибающая локализованная функция водородоподобного типа в случае стационарного и однородного магнитного поля является решением уравнения Шрёдингера [11, 15-17]

$$\left[\frac{\left(\widehat{\boldsymbol{p}} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2}{2m^*} + \widehat{U}_\lambda\right]\psi_\lambda = \varepsilon_\lambda^0 \psi_\lambda, \quad (5)$$

где $\boldsymbol{A}$ — векторный потенциал; $\widehat{\boldsymbol{p}} = -i\hbar\nabla$ — оператор обобщенного импульса; m^* — скалярная эффективная масса электрона вблизи экстремума зоны проводимости; c — скорость света, $\widehat{U}_\lambda = -\frac{e^2}{\kappa|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_\lambda|} + e\varphi(\boldsymbol{r}_\lambda)$ — оператор потенциальной энергии, создаваемой центром λ и учитывающей кулоновский сдвиг, создаваемый другими заряженными центрами в точке расположения центра λ; $\boldsymbol{r}_\lambda$ — радиус-вектор, отвечающий положению центра λ. Воспользуемся симметричной калибровкой векторного потенциала магнитного поля

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}[\boldsymbol{H},\boldsymbol{r}],$$

где $\boldsymbol{H}$ — напряженность магнитного поля, $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор. Выбор симметричной калибровки векторного потенциала однородного магнитного поля обусловливается тем, что в этом случае $\operatorname{div}\boldsymbol{A} = 0$ и коммутатор оператора импульса $\widehat{\boldsymbol{p}}$ с функцией координат $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ равен нулю: $(\widehat{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{p}})\psi_\lambda = -i\hbar\psi_\lambda \operatorname{div}\boldsymbol{A} = 0$, т. е. $\widehat{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{p}}$.

Будем считать, что водородоподобный примесный центр находится в начале координат, а магнитное поле $\boldsymbol{H}$ направлено вдоль оси z. Тогда в цилиндрических координатах стационарное уравнение Шрёдингера для огибающей волновой функции (5) имеет вид [15]

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi_\lambda}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi_\lambda}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi_\lambda}{\partial z^2}\right] - -\frac{i\hbar eH}{2m^*c}\frac{\partial\psi_\lambda}{\partial\varphi} + \frac{e^2H^2\rho^2}{8m^*c^2}\psi_\lambda - \frac{e^2}{\kappa r}\psi_\lambda = = \left(\varepsilon_\lambda^0 - e\varphi(\boldsymbol{r}_\lambda)\right)\psi_\lambda. \quad (6)$$

Поскольку основное состояние водородоподобного атома в магнитном поле обладает цилиндрической симметрией [15], то все слагаемые, содержащие производные по углу $\frac{\partial\psi_\lambda}{\partial\varphi}$, обращаются в нуль:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi_\lambda}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial^2\psi_\lambda}{\partial z^2}\right] + \frac{\hbar^2\rho^2}{8m^*L_M^4}\psi_\lambda - \frac{e^2}{\kappa r}\psi_\lambda = = \left(\varepsilon_\lambda^0 - e\varphi(\boldsymbol{r}_\lambda)\right)\psi_\lambda, \quad (7)$$

где $L_M = \left(\frac{c\hbar}{eH}\right)^{1/2}$ — магнитная длина, имеющая смысл амплитуды нулевых колебаний свободного электрона на нулевом уровне Ландау; $\frac{\hbar^2\rho^2}{8m^*L_M^4}$ — магнитная потенциальная энергия. Уравнение (7) не решается аналитически [15]. Однако для описания прыжкового транспорта достаточно знать асимптотическое поведение волновых функций на расстояниях, больших радиуса локализации; поэтому в дальнейшем нас будет интересовать поведение $\psi_\lambda(\rho,z)$ при больших ρ и z.

В настоящей работе рассмотрен предел сильных магнитных полей, когда $L_M \ll a$, т. е. $\frac{\hbar^2}{2m^*L_M^2} \gg \frac{\hbar^2}{2m^*a^2}$, где $a = a_B$, a_B — боровский радиус; $\frac{\hbar^2}{2m^*L_M^2} = \frac{\hbar\Omega}{2}$ — энергия нулевого уровня Ландау; $\Omega = \frac{eH}{m^*c} = \frac{\hbar}{m^*L_M^2}$ — ларморова частота; $E_{\text{kin}} = |E_{\text{tot}}| = \frac{\hbar^2}{2m^*a^2}$; E_{kin} — кинетическая энергия и E_{tot} — полная энергия электрона в основном состоянии при отсутствии внешнего магнитного поля.

Примем во внимание неравенство $\frac{\hbar\Omega}{2} \gg \frac{\hbar^2}{2m^*a^2} = E_{\text{kin}}$, соответствующее пределу сильного магнитного поля. Напомним, что в отсутствие кулоновского слагаемого уравнение (7) описывает свободное движение электрона вдоль направления магнитного поля (оси z) с энергией $\frac{(\hbar k_z)^2}{2m^*}$; при этом поперечное движение электрона соответствует дискретному эквидистантному спектру энергий $\varepsilon_n = \hbar\Omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$, где k_z — вещественное волновое число, n — номер уровня Ландау. Волновая функция, отвечающая состоянию с $n = 0$, имеет вид

$$\psi_{n=0}(\rho,z) = \psi_0(\rho)\cdot\frac{1}{\sqrt{L_z}}\exp(ik_z z), \quad (8a)$$

$$\psi_0(\rho) = \frac{1}{L_M\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\rho^2}{4L_M^2}\right), \quad (8b)$$

где $\psi_0(\rho)$ — радиальная волновая функция электрона на нулевом уровне Ландау, L_z — линейный размер системы по оси z.

Энергией взаимодействия магнитного момента электрона с магнитным полем $\pm\mu_e H$ мы изначально пренебрегли, поскольку она мала по сравнению с энергией дна нулевой подзоны Ландау ($n = 0$)

$$\frac{\hbar\Omega}{2} \gg \mu_e H = \hbar\Omega|\sigma_z|\frac{m^*}{m_0},$$

где $\pm$ соответствуют двум проекциям спина электрона на направление магнитного поля $\sigma_z = \pm\frac{1}{2}$, $\mu_e = \frac{e\hbar}{2m_0c}$ — магнетон Бора, m_0 — масса свободного электрона, $\frac{m^*}{m_0} \ll 1$.

В работах [18, 19] показано, что огибающая ψ_λ волновой функции основного состояния электрона водородоподобного атома, находящегося в начале координат, в сильном магнитном поле имеет вид

$$\psi_\lambda(\rho, z) = \psi_0(\rho)\, F(z). \tag{9}$$

Таким образом, включение кулоновского поля примесного центра в задачу о движении электрона в постоянном и однородном магнитном поле обусловливает локализацию носителя заряда на примесном центре [18, 19].

Для расчета бесфононной проводимости в сильном магнитном поле получим асимптотический вид огибающей ψ_λ волновой функции основного состояния электрона водородоподобного атома как функцию магнитного поля.

Подставив (9) в уравнение (7) и выполнив затем усреднение по поперечному движению (путем умножения получившегося уравнения на функцию $\psi_0(\rho)$ и интегрирования $\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty} \rho\, d\rho\, d\varphi \ldots$), получаем уравнение для функции $F(z)$

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*}\frac{\partial^2 F(z)}{\partial z^2} + U(z)F(z) = \widetilde{\varepsilon}^0_\lambda F(z), \tag{10}$$

где

$$U(z) = -\frac{e^2}{\kappa}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty} \frac{\psi_0^2}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\rho\, d\rho\, d\varphi,$$

$$\widetilde{\varepsilon}^0_\lambda = \varepsilon^0_\lambda - e\varphi(\boldsymbol{r}_\lambda) - \frac{\hbar^2}{2m^* L_M^2}.$$

Согласно [15, 18, 19], в области потенциальной ямы $z \in [-z_1, z_1]$ можно пренебречь $\widetilde{\varepsilon}^0_\lambda$ по сравнению с $U(z)$, а функцию $F(z)$ приближенно считать постоянной, т. е. $F(z) \approx C$; при этом на больших расстояниях $F(z) \approx C\exp(\mp\alpha z)$ (где $\alpha = \sqrt{\frac{2m^*}{\hbar^2}\left|\widetilde{\varepsilon}^0_\lambda\right|}$ — обратный радиус затухания волновой функции; знаки $\mp$ отвечают $z > 0$ и $z < 0$ соответственно). Тогда уравнение (10) принимает вид

$$\frac{\partial^2 F(z)}{\partial z^2} = \frac{2m^*}{\hbar^2}\left(U(z) - \widetilde{\varepsilon}^0_\lambda\right)F(z) \approx \frac{2m^*}{\hbar^2}U(z)F(z). \tag{11}$$

Будем считать, что ширина потенциальной ямы много меньше обратного радиуса затухания волновой функции $z_1 \ll \alpha^{-1}$, т. е. уровень в яме мелкий. Тогда, раскладывая $F(z)$ в ряд по $\alpha z \ll 1$ с точностью до линейного слагаемого, имеем $F(z) \approx C(1 \mp \alpha z)$, $\frac{\partial F}{\partial z} = \mp C\alpha$ ($|z| \ll \alpha^{-1}$); интегрирование (11) по z на сегменте $[-z_1, z_1]$ дает

$$-2C\alpha = \frac{2m^*}{\hbar^2}C\int\limits_{-z_1}^{z_1} U(z)\, dz. \tag{12}$$

Подставляя выражение для обратного радиуса затухания α в (12), получаем энергию продольного движения $\widetilde{\varepsilon}^0_\lambda$, относящуюся к нулевому уровню Ландау

$$\left|\widetilde{\varepsilon}^0_\lambda\right| = \frac{m^*}{2\hbar^2}\left[\int\limits_{-z_1}^{z_1} U(z)\, dz\right]^2. \tag{13}$$

Поскольку основной вклад в $U(z)$ дает интегрирование по области $\rho \leqslant L_M$, то при $z > L_M$ имеем

$$U(z) \approx -\frac{e^2}{\kappa|z|}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty}\psi_0^2\rho\, d\rho\, d\varphi = -\frac{e^2}{\kappa|z|}. \tag{14}$$

Подставляя выражение (14) в (13), получаем [15]

$$\left|\widetilde{\varepsilon}^0_\lambda\right| = \frac{m^*}{2\hbar^2}\left[\int\limits_{-z_1}^{z_1} U(|z|)\, dz\right]^2 = \frac{2m^*}{\hbar^2}\left[\int\limits_{0}^{z_1} U(z)\, dz\right]^2. \tag{15a}$$

Поскольку, согласно (14), $U(z) \approx -\frac{e^2}{\kappa|z|}$ при $z > L_M$, то в (15a) следует «обрезать» снизу интеграл в точке $z = L_M$; это эквивалентно рассмотрению задачи на сегменте $z \in [L_M, z_1]$

$$\left|\widetilde{\varepsilon}^0_\lambda\right| = \frac{2m^*}{\hbar^2}\left[\int\limits_{0}^{z_1} U(z)\, dz\right]^2 \approx \frac{2m^*}{\hbar^2}\left[\int\limits_{L_M}^{z_1} U(z)\, dz\right]^2 = \frac{2m^* e^4}{\hbar^2\kappa^2}\ln^2\left(\frac{z_1}{L_M}\right). \tag{15b}$$

В пределе сильного магнитного поля отношение $\frac{z_1}{L_M}$ велико. Выражение (15b) можно переписать в виде [11]

$$\widetilde{\varepsilon}^0_\lambda = E_{\text{tot}}\ln^2\left(\frac{z_1}{L_M}\right)^2 = E_{\text{tot}}\ln^2\left(\frac{H}{H_0}\right), \tag{16}$$

где H_0 — величина магнитного поля, при котором магнитная длина $L_M = \left(\frac{c\hbar}{eH}\right)^{1/2}$ совпадает с боровским радиусом $a = \frac{\hbar^2\kappa}{m^* e^2}$; а $E_{\text{tot}} = -\frac{m^* e^4}{2\hbar^2\kappa^2} = -\frac{\hbar^2}{2m^* a^2}$; $\left(\frac{z_1}{L_M}\right)^2 = \frac{H}{H_0}$ при $z_1 = a$.

Для оценки множителя под знаком логарифма в (16) значение z_1 можно принять равным боровскому радиусу: $z_1 \approx a$. Действительно, в области потенциальной ямы $z \in [-z_1, z_1]$ имеем $\left|\widetilde{\varepsilon}^0_\lambda\right| \ll |U(z)|$; соответственно, оценивая граничное значение z_1, полагаем $\widetilde{\varepsilon}^0_\lambda \sim U(z_1)$. В силу слабой логарифмической зависимости энергии $\widetilde{\varepsilon}^0_\lambda$ (16) от z_1 имеем $\widetilde{\varepsilon}^0_\lambda \sim E_{\text{tot}}$, т. е. $E_{\text{tot}} \sim U(z_1)$, откуда следует, что $z_1 \sim a$.

Таким образом, асимптотика огибающей ψ_λ волновой функции основного состояния электрона водородоподобного атома в сильном магнитном поле имеет вид

$$\psi_\lambda(\boldsymbol{r}) = \psi_\lambda(\rho, z) = \psi_0(\rho)F(z) = \frac{1}{L_M\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\rho^2}{4L_M^2}\right)C\exp(\mp\alpha z), \tag{17}$$

при этом обратная длина затухания α волновой функции, соответствующей состоянию с энергией продольного движения $\widetilde{\varepsilon}^0_\lambda$ (16), равна

$$\alpha = \frac{\ln(H/H_0)}{a}. \tag{18}$$

В случае, когда центр локализации находится не в начале координат, волновая функция основного состояния электрона включает фазовый множитель [20]

$$\psi_{\lambda'}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_{\lambda'}) = e^{-i\chi_{\lambda'}}\psi_\lambda(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_{\lambda'}), \tag{19}$$

где $\chi_{\lambda'} = \frac{e}{2\hbar c}[\boldsymbol{H}, \boldsymbol{r}_{\lambda'}]\boldsymbol{r}$.

Оценка нормировочного множителя в выражении для волновой функции (17) дает $C \sim \sqrt{\alpha}$. Действительно, пространственная область, на границе которой волновая функция уменьшается в e раз, определяется уравнением $\frac{\rho^2}{4L_M^2} + \alpha|z| = 1$ (при этом $z \in [-\alpha^{-1}, \alpha^{-1}]$). Тогда из условия нормировки $1 = \int |\psi_\lambda(\boldsymbol{r})|^2\, d\boldsymbol{r} \approx \int\limits_{-\alpha^{-1}}^{\alpha^{-1}} |\psi_\lambda(0)|^2 \pi\rho^2\, dz$, где $\rho^2 = 4L_M^2(1-\alpha|z|)$, следует $C \sim \sqrt{\alpha}$.

Бесфононная проводимость в магнитном поле

Интегралы по энергии, фигурирующие в выражении (4), равны

$$\iint d\varepsilon_i\, d\varepsilon_f\, (n_F(\varepsilon_i) - n_F(\varepsilon_f))\, \delta\left(\varepsilon_f - \varepsilon_i - \frac{e^2}{\kappa r_{if}} - \hbar\omega\right) = = \frac{e^2}{\kappa r_{if}} + \hbar\omega. \quad (20)$$

Действительно, при $\varepsilon_i < \mu$, $\varepsilon_f = \varepsilon_i + \frac{e^2}{\kappa r_{if}} + \hbar\omega > \mu$, т. е. при выполнении неравенств

$$\mu - \hbar\omega - \frac{e^2}{\kappa r_{if}} < \varepsilon_i < \mu \quad (21)$$

разность чисел заполнения отлична от нуля и равна единице, $n_F(\varepsilon_i) - n_F(\varepsilon_f) = 1$.

Таким образом, выражение для бесфононной проводимости принимает вид

$$\mathrm{Re}(\sigma(\omega)) \approx \pi e^2 \omega \rho_0^2 \int \left(\frac{e^2}{\kappa r_{if}} + \hbar\omega\right) |\langle i|(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r})|f\rangle|^2\, d\boldsymbol{r}_{if}, \quad (22)$$

где

$$\langle i|(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r})|f\rangle = \int \psi_i(\boldsymbol{r})(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r})\, e^{-i\chi_i} \psi_i(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_f)\, d\boldsymbol{r}. \quad (23)$$

Произведение волновых функций в подынтегральном выражении для матричного элемента (23) имеет вид

$$\psi_i(\boldsymbol{r})\psi_i(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_f) \sim \exp\left(-\frac{(x^2+y^2)}{4L_M^2}\right) \times \times \exp\left(-\frac{(x-x_f)^2 + (y-y_f)^2}{4L_M^2}\right) \exp(-\alpha|z|)\exp(-\alpha|z - z_f|) \times \times \exp\left(-\frac{i}{2L_M^2}(yx_f - y_f x)\right), \quad (24a)$$

где x_f, y_f, z_f — декартовы координаты конечного (f) центра; исходный (i) центр соответствует началу координат. Выражение (24a) можно записать в виде

$$\psi_i(\boldsymbol{r})\, \psi_i(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_f) \sim \exp\left(-\frac{(x_f^2 + y_f^2)}{4L_M^2}\right) \exp(-\alpha|z_f|) \times \times \exp\left(-\frac{i}{2L_M^2}(yx_f - y_f x)\right), \quad (24b)$$

где

$$\exp(-\alpha|z|)\exp(-\alpha|z - z_f|) = \exp(-\alpha|z_f|)$$

при

$$z \in [0, z_f], \quad z_f > 0, \quad \text{или} \quad z \in [z_f, 0], \quad z_f < 0,$$

$$\exp\left(-\frac{(x^2+y^2)}{4L_M^2}\right) \exp\left(-\frac{(x-x_f)^2 + (y-y_f)^2}{4L_M^2}\right) \approx \approx \exp\left(-\frac{(x_f^2 + y_f^2)}{4L_M^2}\right).$$

Согласно (24b), в области магнитных полей, для которых $L_M \ll \alpha^{-1}$, перекрытие волновых функций, отвечающих центрам локализации i и f, существенно уменьшается при смещении центра f в направлении, перпендикулярном магнитному полю. При этом основной вклад в матричный элемент (23) будет вносить интегрирование по области, представляющей собой цилиндр, ось которого проходит через примесные центры, а площадь поперечного сечения порядка L_M^2. Поскольку магнитная длина L_M мала, можно считать, что для электронных переходов вдоль направления магнитного поля ($x_f, y_f \sim 0$) фазовый множитель равен $\exp\left(-\frac{i}{2L_M^2}(yx_f - y_f x)\right) \approx 1$. Тогда выражение (23) принимает вид

$$\langle i|(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r})|f\rangle \sim \frac{C^2}{L_M^2} \exp(-\alpha|z_f|) \int\limits_0^{z_f} z\cos\xi\, L_M^2\, dz \sim \sim C^2 \exp(-\alpha|z_f|)\, z_f^2\, \cos\xi, \quad (25)$$

где $\exp(-\alpha|z|)\exp(-\alpha|z - z_f|) = \exp(-\alpha|z_f|)$, $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}) \approx \approx z\cos\xi$, ξ — угол между направлениями магнитного и электрического полей. Основной вклад в бесфононную проводимость дают электронные переходы вдоль магнитного поля; это обусловлено анизотропией перекрытия волновых функций локализованных состояний.

Подставляя выражение для матричного элемента (25) в (22), получаем

$$\mathrm{Re}(\sigma(\omega)) \sim e^2\omega\rho_0^2 C^4 \cos^2\xi \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^2}{\kappa|z_f|} + \hbar\omega\right) \times \times \exp(-2\alpha|z_f|)\, z_f^4 L_M^2\, dz_f; \quad (26a)$$

в силу четности подынтегрального выражения (26a) принимает вид

$$\mathrm{Re}(\sigma(\omega)) \sim e^2\omega\rho_0^2 \alpha^2 L_M^2 \cos^2\xi \int\limits_0^{\infty} \left(\frac{e^2}{\kappa z_f} + \hbar\omega\right) \times \times \exp(-2\alpha z_f) z_f^4\, dz_f, \quad (26b)$$

где $C \sim \sqrt{\alpha}$. Интегрирование (26b) дает

$$\mathrm{Re}(\sigma(\omega)) \sim e^2\omega\rho_0^2 \frac{L_M^2}{\alpha^3} \cos^2\xi \left(\frac{e^2}{\kappa}\alpha + 2\hbar\omega\right). \quad (27)$$

Подставляя в (27) явные выражения для магнитной длины L_M и обратной длины затухания волновой функции α (18), получаем следующее выражение для бесфононной проводимости, описывающее электронный прыжковый транспорт по примесной зоне:

$$\mathrm{Re}(\sigma(\omega)) \sim e^2\omega\rho_0^2 \frac{c\hbar}{eH} \frac{a^3}{\ln^3(H/H_0)} \cos^2\xi \times \\ \times \left(\frac{e^2}{\kappa a}\ln(H/H_0) + 2\hbar\omega\right). \quad (28)$$

Для характерных значений концентрации легирующей примеси $N_d \sim 2 \cdot 10^{18}$ см$^{-3}$ оценка ширины примесной зоны дает $\Delta E_{ib} \sim \frac{e^2}{\kappa} N_d^{1/3} \sim 20$ мэВ ($\kappa = 10$); это соответствует частоте $\omega_M = \frac{\Delta E_{ib}}{\hbar} \sim 30$ ТГц, ограничивающей сверху область применимости соотношений (1) и (28).

Обсуждение результатов

Полученное выражение для бесфононной проводимости (28) предсказывает суперлинейное и монотонное поведение частотной зависимости низкотемпературной проводимости неупорядоченных систем в широкой области частот. Это связано с тем, что оптимальное расстояние между центрами в парах, вносящих основной вклад в бесфононную прыжковую проводимость по примесной зоне, не зависит от частоты.

Выражение (28) описывает переход от линейной к квадратичной частотной зависимости в окрестности частоты кроссовера $\omega_{\rm cr}$, определяемой равенством энергий $\frac{e^2}{\kappa}\alpha = 2\hbar\omega_{\rm cr}$. С учетом выражения для обратной длины затухания волновой функции α (18), имеем логарифмическую зависимость частоты кроссовера $\omega_{\rm cr}$ от величины магнитного поля

$$\omega_{\rm cr} = \frac{1}{2\hbar} \cdot \frac{e^2}{\kappa a} \ln(H/H_0); \quad (29)$$

логарифмический рост частоты кроссовера $\omega_{\rm cr}$ с величиной магнитного поля определяется соответствующим ростом обратной длины затухания α волновой функции (17).

Геометрический фактор $\cos^2\xi$ в выражении для проводимости (28) связан с анизотропией перекрытия волновых функций локализованных состояний и определяется углом ξ между направлениями магнитного и электрического полей. Анизотропия перекрытия обусловливает определяющий вклад в бесфононную прыжковую проводимость электронных переходов вдоль магнитного поля. Соответственно в этом случае поглощение энергии электромагнитного поля пропорционально квадрату проекции амплитуды напряженности электрического поля на направление магнитного поля.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 09-02-00561а).

Список литературы

1. *Mott N.F.* // Philos. Mag. 1970. **22**. P. 7.
2. *Шкловский Б.И., Эфрос А.Л.* // ЖЭТФ. 1981. **81**. С. 406.
3. *Hering M., Scheffler M., Dressel M.* et al. // Phys. Rev. 2007. **B75**. P. 205203.
4. *Lee M., Stutzmann M.L.* // Phys. Rev. Lett. 2001. **87**. P. 056402.
5. *Helgren E., Armitage N.P., Gruner G.* // Phys. Rev. 2004. **B69**. P. 014201.
6. *Ritz E., Dressel M.* // Phys. Stat. Sol. 2008. **C 5**. P. 703.
7. *Deri R.J., Castner T.G.* // Phys. Rev. Lett. 1986. **57**. P. 134.
8. *Звягин И.П., Ормонт М.А.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2008. № 4. С. 44.
9. *Ормонт М.А.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2011. № 2. С. 57.
10. *Ормонт М.А.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2010. № 2. С. 46.
11. *Шкловский Б.И., Эфрос А.Л.* Электронные свойства легированных полупроводников. М., 1979.
12. *Бонч-Бруевич В.Л., Звягин И.П., Кайпер Р.* и др. Электронная теория неупорядоченных полупроводников. М., 1981.
13. *Zvyagin I.P.* // Charge Transport in Disordered Solids with Applications in Electronics / Ed. by S. Baranovski. Chichester, 2006. P. 339.
14. *Efros A.L., Shklovskii B.I.* // Electron-Electron Interactions in Disordered Systems / Ed. by A. L. Efros, M. Pollak. Amsterdam, 1985. P. 409.
15. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М., 1989.
16. *Kohn W., Luttinger J.M.* // Phys. Rev. 1955. **98**. P. 915.
17. *Ансельм А.И.* Введение в теорию полупроводников. М., 1978.
18. *Elliott R.J., Loudon R.J.* // J. Phys. Chem. Sol. 1960. **15**. P. 196.
19. *Hasegawa H., Howard R.E.* // J. Phys. Chem. Sol. 1961. **21**. P. 179.
20. *Holstein T.* // Phys. Rev. 1961. **124**. P. 1329.

Influence of the magnetic field on the crossover from linear to quadratic frequency dependence of the phononless conductivity of disordered systems

M. A. Ormont

Department of Semiconductor Physics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.
E-mail: ormont@phys.msu.ru.

In the present work the influence of the external magnetic field on the frequency dependence of the phononless hopping conductivity of disordered systems is studied. The dependence of the low-temperature phononless conductivity on applied magnetic field is obtained. It is shown that, in the limit of strong magnetic field the frequency of the crossover from linear to quadratic frequency dependence of the phononless conductivity increases logarithmically with the magnetic field.

Keywords: phononless (resonance) hopping AC conductivity, hopping AC conductivity in magnetic field.
PACS: 72.20.Ee.
Received 9 September 2011.
English version: *Moscow University Physics Bulletin* 1(2012).

Сведения об авторе
Ормонт Михаил Александрович — канд. физ.-мат. наук, доцент; тел.: (495) 939-41-18, e-mail: ormont@phys.msu.ru.