Волны пионной и киральной плотности в (1+1)-мерной модели Намбу–Йона-Лазинио

Н. В. Губина[1], В. Ч. Жуковский[1,a], К. Г. Клименко[2,b], С. Г. Курбанов[1]

[1] *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра теоретической физики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.*
[2] *Институт физики высоких энергий и Университет «Дубна». Россия, 142281, Московская область, г. Протвино.*
E-mail: [a] zhukovsk@phys.msu.ru, [b] kklim@ihep.ru

Статья поступила 21.09.2011, подписана в печать 05.10.2011

В пределе большого числа цветов исследуется (1+1)-мерная безмассовая модель Намбу–Йона-Лазинио, описывающая систему с кварками двух ароматов, при наличии барионного μ и изотопического μ_I химпотенциалов. Рассматривается возможность образования в плотной кварковой среде пространственно неоднородных кирального и пионного конденсатов.

Ключевые слова: модель НЙЛ, химический потенциал, термодинамический потенциал, фазовая диаграмма, пространственно неоднородный конденсат, волна киральной плотности, волна пионной плотности.
УДК: 530.145. PACS: 11.10.Kk, 02.60.Pn.

Введение

В настоящей работе рассматривается обобщение модели Гросса–Невё [1] с одним типом (ароматом) кварков на случай двух различных ароматов с учетом соответствующих химических потенциалов. Лагранжиан (1+1)-мерной массивной модели с добавление четырехфермионного взаимодействия типа Намбу–Йона-Лазинио (НЙЛ), описывающей плотную кварковую среду в терминах u- и d-кварков, имеет вид

$$\mathcal{L} = \overline{q}\Big[\gamma^\rho \mathrm{i}\partial_\rho + \mu\gamma^0 + \nu\tau_3\gamma^0 - m_0\Big]q + \frac{G}{N_c}\Big[\big(\overline{q}q\big)^2 + \big(\overline{q}\mathrm{i}\gamma^5 \boldsymbol{\tau} q\big)^2\Big], \quad (1)$$

где гамма-матрицы выбраны следующим образом: $\gamma^0 = \sigma_2$, $\gamma^1 = \mathrm{i}\sigma_1$, $\gamma^5 = \gamma^0\gamma^1 = \sigma_3$, а двукомпонентые дираковские спиноры $q(x) \equiv q_{i\alpha}(x)$ являются дублетом по ароматам $(i = 1, 2)$ с соответствующими матрицами Паули τ_a $(a = 1, 2, 3)$ и N_c-плетом по цветам $(\alpha = 1, \dots, N_c)$. Химический потенциал μ отвечает за ненулевую барионную плотность кварковой среды, в то время как изоспиновый химический потенциал $\mu_I = 2\nu$ рассматривается для изучения случая ненулевой изоспиновой плотности, учитывающей асимметрию среды по изотопическому составу.

Полученная модель инвариантна относительно следующих групп симметрий. При $\mu_I = 0$ и $m_0 = 0$, кроме глобальной $SU(N_c)$-симметрии по цветовому индексу, исходный лагранжиан инвариантен относительно преобразований киральной $SU_L(2) \times SU_R(2)$ группы. Однако при $\mu_I \neq 0$ группа симметрий сводится к $U_{I_3L}(1) \times U_{I_3R}(1)$, где $I_3 = \tau_3/2$ является третьей компонентой оператора изоспина. Отметим, что исходный лагранжиан инвариантен также относительно преобразований четности.

1. Термодинамический потенциал модели

При изучении модели в процессе бозонизации вводим новые поля:

$$\sigma(x) = -2\frac{G}{N_c}(\overline{q}q), \quad \pi_a(x) = -2\frac{G}{N_c}(\overline{q}\mathrm{i}\gamma^5\tau_a q) \quad (a = 1, 2, 3).$$

После соответствующей подстановки в первом порядке разложения при больших значениях N_c получаем для эффективного действия $\mathcal{S}_{\mathrm{eff}}(\sigma, \pi_a)$ следующее выражение:

$$\mathcal{S}_{\mathrm{eff}}(\sigma, \pi_a) = -N_c \int d^2x \left[\frac{\sigma^2 + \pi_a^2}{4G}\right] + \widetilde{\mathcal{S}}_{\mathrm{eff}}. \quad (2)$$

Вклад кварковых полей в эффективное действие определяется членом $\widetilde{\mathcal{S}}_{\mathrm{eff}}$ в выражении (2) и явно записывается так:

$$\exp(\mathrm{i}\widetilde{\mathcal{S}}_{\mathrm{eff}}) = N' \int [d\overline{q}][dq] \times$$
$$\times \exp\left(\mathrm{i}\int\Big\{\overline{q}\big[\gamma^\rho \mathrm{i}\partial_\rho + \mu\gamma^0 + \nu\tau_3\gamma^0 - \sigma - m_0 - \mathrm{i}\gamma^5\pi_a\tau_a\big]q\Big\}d^2x\right).$$

Величины вакуумного среднего $\langle\sigma(x)\rangle$ и $\langle\pi_a(x)\rangle$ сконструированных бозонных полей, определяемые в соответствии с условиями экстремума эффективного действия в плотной среде, где $\mu \neq 0$, $\mu_I \neq 0$, могут иметь нетривиальную зависимость от x. В частности, в данной статье мы используем анзац, который может быть назван волной пионной плотности:

$$\langle\sigma(x)\rangle + m_0 = M, \qquad \langle\pi_3(x)\rangle = 0,$$
$$\langle\pi_1(x)\rangle + i\langle\pi_2(x)\rangle = \Delta e^{2ibx}, \quad \langle\pi_1(x)\rangle - i\langle\pi_2(x)\rangle = \Delta e^{-2ibx}, \quad (3)$$

где M, b, Δ постоянны и являются координатами точки глобального минимума термодинамического потенциала (ТДП) $\Omega(M, b, \Delta)$, который определяется через эффективное действие известным образом:

$$\Omega(M, b, \Delta)\int d^2x = -\frac{1}{N_c}\mathcal{S}_{\mathrm{eff}}\{\sigma(x), \pi_a(x)\}\big|_{\sigma(x)=\langle\sigma(x)\rangle,\, \pi_a(x)=\langle\pi_a(x)\rangle}.$$

При вычислениях с учетом выбранного нами анзаца необходимо совершить поворот:

$$q = (\psi_u,\ \psi_d)^T \to \chi = (\chi_u,\ \chi_d)^T =$$

$$= (\psi_u\ e^{ibx},\ \psi_d\ e^{-ibx})^T = e^{i\tau_3 bx} q. \qquad (4)$$

С учетом преобразований (4) ТДП приобретает вид

$$\Omega(M,b,\Delta) = \frac{(M-m_0)^2+\Delta^2}{4G} + \frac{i}{(2\pi)^2}\int d^2p\ \ln\det D, \quad (5)$$

где $D = (\not{p} - M + \mu\gamma_0 + \nu\tau_3\gamma_0 + \tau_3\gamma_1 b - i\Delta\tau_1\gamma_5)$. Корни уравнения $\det D = 0$, найденные аналитически, $\eta^{(i)} = p_0^{(i)} + \mu$ $(i = \overline{1,4})$, дают спектр модели, после чего выражение для термодинамического потенциала приводится к следующему виду:

$$\Omega(M,b,\Delta) = \frac{(M-m_0)^2+\Delta^2}{4G} - \qquad (6)$$
$$-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dp_1 \left\{|\eta^{(1)}-\mu| + |\eta^{(2)}-\mu| + |\eta^{(3)}-\mu| + |\eta^{(4)}-\mu|\right\}.$$

Для устранения ультрафиолетовой расходимости в последнем выражении можно воспользоваться традиционной для моделей типа ГН и НЙЛ регуляризацей с помощью введения обрезания по импульсам Λ (более детально процедура перенормировки массивной модели типа ГН дана, например, в [2, 3]):

$$\Omega(M,b,\Delta) = \lim_{\Lambda\to\infty}\left\{\Omega_{\text{reg}}(M,b,\Delta)\big|_{G\to G(\Lambda)} + \frac{\Lambda^2}{\pi}\right\}. \qquad (7)$$

Однако полученный таким образом ТДП демонстрирует нефизичную зависимость от волнового вектора b при нулевой амплитуде Δ и неограниченность по нему снизу. Подлинным термодинамическим потенциалом системы $\Omega^{\text{phys}}(M,b,\Delta)$ является следующая, полученная после дополнительного вычитания величина [4]:

$$\Omega^{\text{phys}}(M,b,\Delta) = \Omega(M,b,\Delta) - \Omega(M,b,0) + \Omega(M,0,0). \quad (8)$$

Причина обнаруженной нефизичности регуляризации выражения (6) кроется в использовании *регуляризации с симметричным обрезанием по импульсам* (7), что подробно обсуждается в нашей предыдущей работе [5], а также в работах [6, 7].

Фазовая структура модели с лагранжианом (1) при $m_0 = 0$ хорошо изучена для множества частных случаев: например, в [8] рассмотрено образование только однородных конденсатов, в [5] обсуждались условия существования фазы с волнами киральной плотности. Для решения вопроса о структуре основного состояния из всех возможных форм пространственно неоднородных решений (киральные кристаллы, спирали и т. д.; см., например, [9–11]) в настоящей работе выбраны конденсаты в виде волны киральной плотности (ВКП) (см. ниже) и пионной плотности (3) (ВПП).

2. Фазы ВКП и ВПП в безмассовом случае ($m_0 = 0$)

Фазовая структура в однородном случае ($b = 0$). Изучение фазового портрета рассматриваемой модели для случая однородных конденсатов начнем с выражения (5), положив $b = 0$, тогда

$$\eta^{(1),(2),(3),(4)} = \pm\mathcal{E}^{\pm}_{\Delta},$$
$$\mathcal{E}^{\pm}_{\Delta} = \sqrt{(\mathcal{E}^{\pm})^2+\Delta^2}, \quad \mathcal{E}^{\pm} = E \pm \nu, \quad E = \sqrt{p_1^2+M^2}.$$

После применения схемы (7) получаем ренорминвариантное выражение для ТДП

$$\Omega(M,\Delta) = V_0\left(\sqrt{M^2+\Delta^2}\right) -$$
$$-\int\limits_0^{\infty}\frac{dp_1}{\pi}\left\{\mathcal{E}^{+}{}_{\Delta} + \mathcal{E}^{-}{}_{\Delta} - 2\sqrt{p_1^2+M^2+\Delta^2}\right\} -$$
$$-\int\limits_0^{\infty}\frac{dp_1}{\pi}\left\{(\mu-\mathcal{E}^{+}{}_{\Delta})\theta(\mu-\mathcal{E}^{+}{}_{\Delta}) + (\mu-\mathcal{E}^{-}{}_{\Delta})\theta(\mu-\mathcal{E}^{-}{}_{\Delta})\right\},$$

где

$$V_0(M) \equiv \lim_{\Lambda\to\infty}\left\{\frac{M^2}{4G(\Lambda)} - \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\Lambda} dp_1\sqrt{p_1^2+M^2} + \frac{\Lambda^2}{\pi}\right\} =$$
$$= \frac{M^2}{2\pi}\left[\ln\left(\frac{M^2}{M_0^2}\right) - 1\right],$$

а M_0 — свободный параметр, равный динамической массе кварков в вакууме. Результаты численного исследования полученного выражения для случая однородного кирального конденсата демонстрирует фазовая диаграмма, представленная на рис. 1 (более детальное исследование см. в [8]).

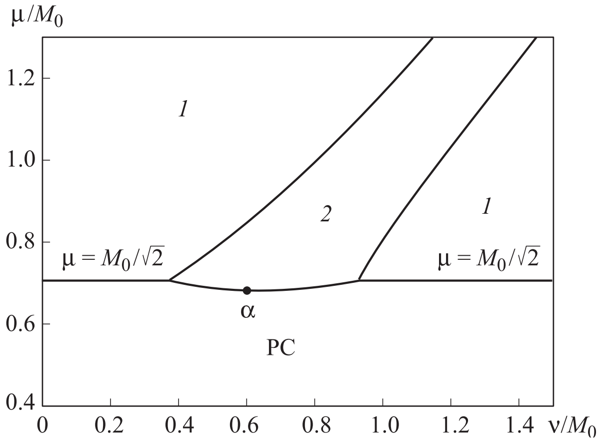

Рис. 1. Фазовый портрет для случая пространственно однородных конденсатов: *1* — симметричная фаза с безмассовыми кварками, *2* — фаза с массивными кварками, PC — фаза заряженной пионной конденсации; α – самая нижняя точка фазы *2* с соответствующим значением $\mu_\alpha \approx 0.69 M_0$ и $\nu_\alpha \approx 0.6 M_0$

Рассмотрение фазы ВКП. В этом случае форма ТДП исследуется, в отличие от (3), с помощью анзаца другого вида, а именно

$$\sigma(x) = M\cos(2bx),$$
$$\pi_3(x) = M\sin(2bx), \quad \pi_1(x) = \Delta, \quad \pi_2(x) = 0.$$

Другим окажется и вид кирального поворота: $q_w = \exp(i\gamma^5\tau_3 bx)q$. Детали вычислений, которые мы опустим, даны в работе [5]. Итоговый ТДП запишется в форме

$$\Omega^{\text{phys}}(M,b,\Delta) = V_0\left(\sqrt{M^2+\Delta^2}\right) -$$

$$-\lim_{\Lambda\to\infty}\left\{\int\limits_0^\Lambda \frac{dp_1}{\pi}\left[E^+{}_\Delta + E^-{}_\Delta - 2\sqrt{p_1^2+M^2+\Delta^2}\right]\right\} -$$

$$-\int\limits_0^\infty \frac{dp_1}{\pi}\left\{(\mu - E^+{}_\Delta)\theta(\mu - E^+{}_\Delta) + (\mu - E^-{}_\Delta)\theta(\mu - E^-{}_\Delta)\right\} +$$

$$+\frac{(b+\nu)^2}{\pi},$$

где использованы $\theta(x)$-функция Хевисайда и спектр модели:

$$E_\Delta^\pm = \sqrt{(E^\pm)^2+\Delta^2}, \quad E^\pm = E \pm (b+\nu), \quad E = \sqrt{p_1^2+M^2}.$$

Как видно из фазового портрета, изображенного на рис. 2, при выборе данного анзаца возможно образование двух фаз КВП (CDW_1 и CDW_2) и однородной пионной фазы (PC). Оказывается, что фазы КВП являются более предпочтительными, чем однородная киральная фаза и даже чем вакуумная фаза.

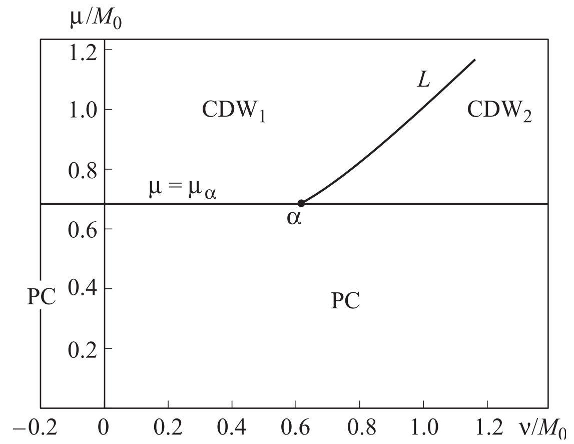

Рис. 2. Фазовый портрет модели с волной киральной плотности. Для фазы CDW_1 (CDW_2) $b>0$ ($b<0$). Кривая L ($b=0$) отвечает однородной фазе с нарушенной киральной симметрией. Та же фаза (PC) имеет место и на интервале $0<\mu<\mu_\alpha\approx 0.69M_0$ на оси μ; α — критическая точка раздела фаз с координатами $\mu = 0.69M_0$, $\nu_\alpha \approx 0.6M_0$

Фаза с пионной волной плотности. Из фазовой диаграммы на рис. 3, полученной при исследовании ТДП (8), и уравнений щели для переменных M, Δ и b при поиске решений в виде волн пионной плотности (3) видно, что существует критическая точка μ_α, такая, что если $\mu<\mu_\alpha$, то имеет место только однородный пионный конденсат, а в случае, когда $\mu>\mu_\alpha$, материя находится в виде ВПП, за исключением тонкой полоски фазы нормальной кварковой материи вблизи линии $\mu=\nu$. Полоска эта имеет ширину всего $0.03M_0$ и заканчивается в критической точке α, где $\mu=\mu_\alpha=0.69M_0$, $\nu=0.6M_0$.

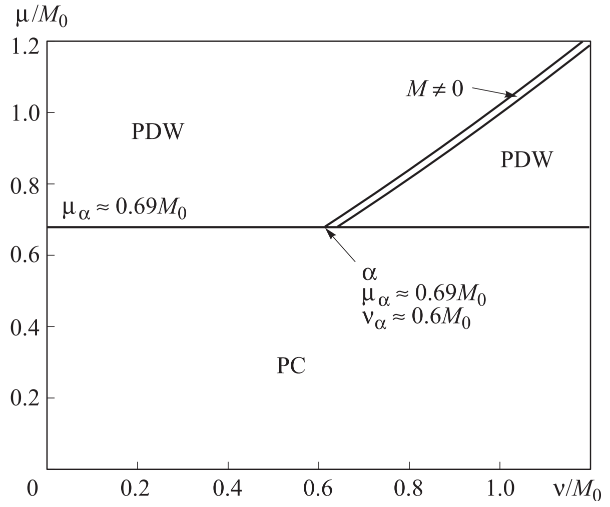

Рис. 3. Фазовый портрет модели с волной пионной плотности. PC — фаза однородного пионного конденсата ($\mu<\mu_\alpha$), PDW — неоднородная фаза с волной пионной плотности (при $\mu>\mu_\alpha$). Область рисунка, обозначенная как $M\neq 0$, соответствует однородной кирально несимметричной фазе. Ширина этой области $\sim 0.03M_0$; α — критическая точка раздела фаз

Заключение

В настоящей статье для безмассового случая (1+1)-мерной модели НЙЛ в присутствии химических потенциалов двух типов и при нулевой температуре было установлено, что для значений барионного химпотенциала $\mu<\mu_c$ и произвольных ненулевых значений μ_I образуется только фаза заряженного пионного конденсата. Пространственно неоднородные формы кирального и пионного конденсатов в виде волн плотности заданного вида образуются при значении μ выше критического. При этом результаты численных вычислений не позволяют отдать предпочтение какой-либо из фаз: КВП либо ВПП, так как в разных областях пространства появление их равновероятно. В связи с этим представляется важным изучение вопроса о существовании скрытой симметрии в модели, о выделенности в связи с этим двумерного случая и расширении числа измерений.

Список литературы

1. *Gross D.J., Neveu A.* // Phys. Rev. D. 1974. **10**. P. 3235.
2. *Barducci A., Casalbuoni R., Modugno M., Pettini G.* // Phys. Rev. D. 1995. **51**. P. 3042.
3. *Жуковский В.Ч., Клименко К.Г., Хунжуа Т.Г.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2010. № 1. С. 23.
4. *Mu C.f., He L.y., Liu Y.x.* // Phys. Rev. D. 2010. **82**. P. 056006.
5. *Ebert D., Gubina N.V., Klimenko K.G.* et al. // Phys. Rev. D. 2011. **84**. P. 025004.
6. *Nakano E., Tatsumi T.* // Phys. Rev. D. 2005. **71**. P. 114006.
7. *Nickel D.* // Phys. Rev. D. 2009. **80**. P. 074025.
8. *Ebert D., Klimenko K.G.* // arXiv: 0902.1861.
9. *Carignano S., Nickel D., Buballa M.* // Phys. Rev. D. 2010. **82**. P. 054009.
10. *Basar G., Dunne G.V., Thies M.* // Phys. Rev. D. 2009. **79**. P. 105012.
11. *Basar G., Dunne G.V.* // JHEP. 2011. **1101**. P. 127. arXiv:1007.1962;

Pion and chiral density waves in (1+1)-dimensional Nambu–Jona-Lasinio model

N. V. Gubina[1], **V. Ch. Zhukovsky**[1,a], **K. G. Klimenko**[2,b], **S. G. Kurbanov**[1]

[1] *Department of Theoretical Physics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.*
[2] *Institute of High-Energy Physics, Russian Academy of Sciences, and University «Dubna» (Protvino Branch), Protvino 142281, Moscow Region, Russia.*
E-mail: [a] *zhukovsk@phys.msu.ru,* [b] *kklim@ihep.ru.*

Phase structure of massless NJL_2 model with a quark number chemical potentials μ and an isospin chemical potentials μ_I and the formation possibility of chiral density wave (CDW) and pion density wave (PDW) condensates are investigated in the limit of a large number of colors ($N_c \to \infty$).

Keywords: NJL-model, chemical potential, thermodynamic potential, phase diagram, spatially inhomogeneous condensate, chiral density wave, pion density wave.
PACS: 11.10.Kk, 02.60.Pn.
Received 21 September 2011.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 1(2012).

Сведения об авторах

1. Губина Надежда Валерьевна — аспирантка; тел.: (495) 939-31-77, e-mail: gubinanadya@gmail.com.
2. Жуковский Владимир Чеславович — докт. физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939-31-77, e-mail: zhukovsk@phys.msu.ru.
3. Клименко Константин Григорьевич — докт. физ.-мат. наук, гл. науч. сотрудник, профессор; e-mail: kklim@ihep.ru.
4. Курбанов Сердар Гельдимуратович — аспирант; тел.: (495) 939-31-77, e-mail: serdarkurbanov@gmail.com.