

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Нестационарные контрастные структуры для обобщенного уравнения Колмогорова–Петровского–ПискуноваА. А. Быков^a, А. С. Шарло^b*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.**E-mail: ^aabkov@yandex.ru, ^bsharlo@physics.msu.ru.*

Статья поступила 10.07.2011, подписана в печать 30.11.2011

Построено решение обобщенного уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова (ОКПП), имеющее характер контрастной структуры. Контрастные структуры (КС) характеризуются наличием больших областей с малым градиентом, разделяемых узкими внутренними переходными слоями (ВПС) с большим градиентом. Показано, что в неоднородной среде ВПС перемещаются (испытывают дрейф), найдена скорость дрейфа. Проведено сравнение скорости дрейфа КС для уравнения ОКПП с более простой моделью уравнения реакции-адвекции-диффузии.

Ключевые слова: Внутренний переходный слой (ВПС), контрастная структура (КС), асимптотический метод решения.

УДК: 517.958.226. PACS: 02.60.Lj.

Введение

В работе рассматривается уравнение псевдопараболического типа, которое отличается от уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова (КПП) [1] наличием дополнительного члена, содержащего производную по времени и вторую производную по пространству. Будем называть данное уравнение обобщенным уравнением Колмогорова–Петровского–Пискунова (ОКПП). Это уравнение описывает квазистационарные процессы диффузии носителей заряда в полупроводниках в случае, когда среда обладает отрицательной дифференциальной проводимостью [2].

Концентрация носителей заряда в полупроводнике изменяется за счет переноса, размножения (диссоциации) и диффузии, причем интенсивность размножения зависит как от концентрации, так и от координат точки в пространстве. После ряда преобразований и замены переменных уравнение ОКПП может быть приведено к виду

$$(u - \mu \Delta u)_t = k \Delta u + f(u, x) \quad (1)$$

с граничными условиями $u|_{\partial\Omega} = \psi(x)$, $u(x, 0) = u_0(x)$, где Ω — ограниченная область с гладкой границей, $k > 0$, $\mu > 0$.

Уравнение ОКПП естественно рассматривать как обобщение уравнения реакции-адвекции-диффузии

$$u_t + V \nabla u = k \Delta u + f(u, x),$$

которое описывает, например, процесс генерации магнитного поля в турбулентной среде [3].

Функция $f(u, x)$, задающая плотность источников, для фиксированного значения x имеет несколько точек перемены знака $\varphi_k(x)$, причем $f(\varphi_k(x), x) = 0$, $f_u(\varphi_k, x) \neq 0$. Обычно предполагают, что $f(u, x) = f_0(u, x) \cdot \prod_{k=1}^K (u - \varphi_k(x))$, $\varphi_{i-1} < \varphi_i$, функция f_0 непрерывна, $f_0 \neq 0$. Значения $\varphi_k(x)$ будем называть уровнями насыщения, так как при $u = \varphi_k$ плот-

ность источников становится равной нулю. В настоящей работе мы рассматриваем модель, для которой $K = 3$, $f_u(\varphi_1) < 0$, $f_u(\varphi_2) > 0$, $f_u(\varphi_3) < 0$, так что значения φ_1 и φ_3 соответствуют устойчивым состояниям, φ_2 — неустойчивому. При некоторых начальных условиях уравнение (1) имеет решения типа контрастной структуры (КС), для которой характерны большие области (пятна), в которых u близко к одному из устойчивых состояний. Условно припишем пятнам КС отрицательную ($u \approx \varphi_1$) и положительную ($u \approx \varphi_3$) полярность. Между пятнами разной полярности образуется узкий слой, в пределах которого происходит переход от одного из устойчивых уровней насыщения к другому устойчивому, сопровождающийся переходом через неустойчивое состояние. Этот слой называют внутренним переходным слоем (ВПС). Мы предполагаем, что толщина ВПС много меньше диаметра области Ω . На границах Ω образуются узкие области, внутри которых концентрация изменяется от одного из уровней насыщения до значения, определяемого граничным условием (пограничные слои).

В неоднородных средах ВПС может перемещаться (дрейфовать). Дрейф ВПС определяется тремя факторами: 1) для двумерных и трехмерных задач — кривизной ВПС; 2) величиной асимметрии $F(x) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_3} f(u, x) du$;

3) при нулевой асимметрии, $F(x) = 0$, скорость дрейфа определяется градиентом функций $\varphi_k(x)$. В настоящей работе мы рассматриваем именно последний случай, когда как дрейф кривизны, так и дрейф асимметрии отсутствуют и перемещение ВПС обусловлено только градиентным дрейфом.

Известно, что одно из решений одномерного уравнения реакции-адвекции-диффузии $u_t + V u_x = k_0 u_{xx} + \gamma u \left(1 - \frac{u^2}{U(x)^2}\right)$ для однородной среды (при $U(x) = 1$)

имеет вид $u = \text{th}\left(\frac{x-x_0-Vt}{\Pi}\right)$, где $\Pi = \sqrt{\frac{2k_0}{\gamma}}$ — толщина ВПС. В дальнейшем будет показано, что решение уравнения ОКПП имеет такой же профиль. Для случая плавнонеоднородной среды, $U_x \ll U$, решение уравнения реакции-адвекции-диффузии также имеет вид движущегося фронта, $u(x, t) = g(x - Wt)$. В [4] показано, что скорость дрейфа в первом приближении равна

$$W = V - 2k_0 \frac{U_x}{U}. \quad (2)$$

Цель настоящей работы состоит в обобщении этого результата для уравнения ОКПП. Мы используем метод асимптотического разложения решения в ряд по степеням малого параметра. Так как уравнение ОКПП включает производные третьего порядка, при построении формальной асимптотики появляются «быстрые» и «медленные» функции ВПС. Асимптотика удовлетворяет задаче по невязке. В силу того что уравнение является нестационарным, при наличии зависимости уровней насыщения от координаты ВПС перемещается. Пограничные слои стационарны, не влияют на движение ВПС, описываются стандартным образом, поэтому в настоящей работе мы рассмотрим более детально движение ВПС. В работе найдена скорость дрейфа ВПС в первом приближении.

1. Постановка задачи

Рассмотрим одномерную задачу Коши для уравнения ОКПП

$$u_t + \varepsilon^2 V_0 u_x = \varepsilon^2 \mu_0 u_{xxt} + \varepsilon^2 k_0 u_{xx} + \gamma u \left(1 - \frac{u^2}{U(x)^2}\right) \quad (3)$$

на промежутке $x_a \leq x \leq x_b$ с начальным условием $u(x, 0) = u_0(x)$ и с граничными условиями $u(x_a, t) = u_a$, $u(x_b, t) = u_b$, причем $u_0(x)$, u_a и u_b заданы, ε — малый параметр. Предполагаем, что $u_0(x)$ — начальная функция — имеет структуру ступеньки, т.е. $u_0(x)$ близка к φ_1 в области левого пятна, к φ_3 в области правого пятна.

Рассмотрим сбалансированный случай: $\varphi_1(x) = -U(x)$, $\varphi_2(x) = 0$, $\varphi_3(x) = U(x)$.

Замена $v(x, t) = \frac{u(x, t)}{U(x)}$ приводит уравнение (3) к виду

$$v_t + \varepsilon^2 (V_0 - 2k_0 f_1(x)) v_x = \varepsilon^2 \mu_0 v_{xxt} + 2\varepsilon^2 \mu_0 v_{xt} f_1(x) + \varepsilon^2 \mu_0 v_t f_2(x) + \varepsilon^2 k_0 v_{xx} + v(\varepsilon^2 k_0 f_2(x) - \varepsilon^2 V_0 v f_1(x) + \gamma(1 - v^2)), \quad (4)$$

где $f_1(x) = \frac{U_x}{U}$, $f_2(x) = \frac{U_{xx}}{U}$. Функцию $U(x)$ предполагаем дважды непрерывно дифференцируемой. Уравнение (4) в зависимости от начальных условий имеет решения различного характера, ограниченные и неограниченные, экспоненциально растущие и медленно меняющиеся. Наша цель состоит в том, чтобы построить решение этого уравнения типа простейшей контрастной структуры (рис. 1), содержащей два пятна отрицательной (левое) и положительной (правое) полярности, разделенные ВПС. Мы предполагаем также, что вблизи границ располагаются пограничные слои.

Промежуток $\Omega = [x_a, x_b]$ разделим на пять областей:

1) $\Omega_a = [x_a, x_a + d_a]$ — область левого пограничного слоя (ПС);

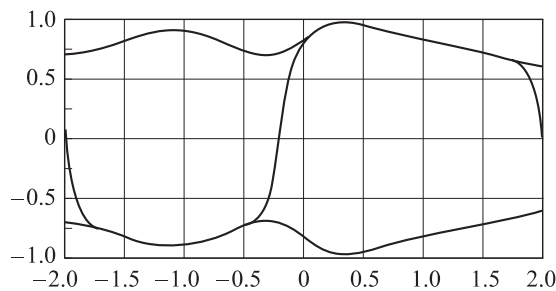


Рис. 1. Решение вида контрастной структуры

2) $\Omega_{a*} = [x_a + d_a, x^* - d^*]$ — левое пятно;

3) $\Omega_* = [x^* - d^*, x^* + d^*]$ — область ВПС;

4) $\Omega_{b*} = [x^* + d^*, x_b - d_b]$ — правое пятно;

5) $\Omega_b = [x_b - d_b, x_b]$ — область правого ПС.

Впоследствии мы покажем, что толщина ВПС равна

$\Pi = \varepsilon \sqrt{\frac{k_0}{2\gamma}}$, поэтому необходимо выбрать d_a , d_b и d^* так, чтобы были выполнены условия $d_a \gg \Pi$, $d_b \gg \Pi$, $d^* \gg \Pi$. Аналогичным условиям должна удовлетворять ширина каждого из пятен КС. Пограничные слои в окрестности точек x_a и x_b образуются при условиях $u_a \neq U(x_a)$ и $u_b \neq U(x_b)$ соответственно, которые мы предполагаем выполненными.

В области Ω_* будем искать решение уравнения (4) в виде движущегося фронта, $v(x, t) = g(\xi)$, где $\xi = x - \int_{t_0}^t W(\varepsilon, \eta) d\eta$, причем $W(\varepsilon, t) = \varepsilon^2 W_0(\varepsilon, t)$, $W_0(\varepsilon, t)$ — регулярная функция в окрестности точки $\varepsilon = 0$.

Пусть $U_x > 0$ на промежутке $x_a < x < x_b$. Далее мы покажем, что в этом случае решение типа КС существует при $W_0 < 0$. Запишем уравнение (4) в новых переменных:

$$\varepsilon^4 W_0 \mu_0 g_{\xi\xi\xi} + \varepsilon^2 (V_0 - W_0 - 2k_0 f_1(x)) g_{\xi} = \varepsilon^2 g_{\xi\xi} \left(k_0 - 2\varepsilon^2 W_0 \mu_0 f_1(x) \right) - \varepsilon^4 \mu_0 W_0 f_2(x) g_{\xi} + g \left(\gamma(1 - g^2) - \varepsilon^2 V_0 f_1(x) + \varepsilon^2 k_0 f_2(x) \right). \quad (5)$$

Так как $x = \xi + \varepsilon^2 \int_{t_0}^t W_0(\varepsilon, \eta) d\eta$, то $f_j(x) = f_j(\xi) + \varepsilon^2 \times f_{j\xi}(\xi + \varepsilon^2 \theta) \int_{t_0}^t W_0(\varepsilon, \eta) d\eta$, где $0 < \theta < 1$.

Построим формальную асимптотику решения уравнения (5) в виде ряда по степеням ε . Например, $W_0(\varepsilon, t) = W_{00}(t) + \varepsilon W_{01}(t) + \dots$. Можно показать (но это выходит за рамки настоящей работы), что выражение для W_{00} для уравнения (5) совпадает с таковым для более простого уравнения

$$\varepsilon^4 \mu_0 W_0 g_{\xi\xi\xi} + \varepsilon^2 (V_0 - W_0 - 2k_0 f_1(\xi)) g_{\xi} = \varepsilon^2 k_0 g_{\xi\xi} + \gamma g(1 - g^2), \quad (6)$$

которое получится из (5) после опускания слагаемых $\varepsilon^4 W_0 \mu_0 f_1(\xi) g_{\xi\xi}$, $\varepsilon^2 V_0 f_1(\xi) g$, $\varepsilon^4 \mu_0 W_0 f_2(\xi) g_{\xi}$, $\varepsilon^2 f_{\xi}(\xi + \varepsilon^2 \theta W_0 t) \varepsilon^2 W_0 t$, каждое из которых является величиной порядка не меньше чем ε^2 относительно других отличных от нуля слагаемых. Выражения W_{01} для (5) и (6) уже, вообще говоря, различаются.

Пусть φ_i , $i = 1, 2, 3$, — корни уравнения $F(g) = 0$, где $F(g) = \gamma g(1 - g^2)$. В данном случае $\varphi_1 = -1$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 1$.

Уравнение (6) должно быть выполнено в области Ω_* , причем необходимо обеспечить условия сопряжения решения (6) в точках $x^* - d^*$ и $x^* + d^*$ с решением того же уравнения в областях левого и правого пятен соответственно. Мы предполагаем, что длина промежутка $x_b - x_a$ настолько велика, что внутри него можно выделить область пятна Ω_{a^*} , ширина которой $x^* - x_a - d_a - d^* \gg \Pi$. Поэтому в областях левого и правого пятен вместо решения (6) на ограниченном промежутке $\tilde{\Omega}_*$ мы построим решение того же уравнения на всей числовой оси с условиями замыкания к нижнему и верхнему уровням насыщения соответственно: $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} g = \varphi_1$, $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} g = \varphi_3$.

Система, состоящая из уравнения (6), граничных условий и условий сшивания, для заданного значения x^* имеет решение при определенном значении параметра W_0 . Наша цель состоит в том, чтобы найти это значение и определить таким образом скорость градиентного дрейфа ВПС, расположенного в точке с заданным значением x^* .

2. Построение формальной асимптотики

2.1. Асимптотические ряды и условия сшивания

Будем писать в (6) x вместо ξ и построим разложение решения уравнения

$$\varepsilon^4 \mu_0 W_0 g_{xxx} + \varepsilon^2 (V_0 - W_0 - 2k_0 f_1(x)) g_x = \varepsilon^2 k_0 g_{xx} + \gamma g(1 - g^2) \quad (7)$$

в ряд по степеням параметра ε , используя методику пограничных функций [5, 6], которые (следуя терминологии авторов этого метода) будем называть Π -функциями. Метод сингулярного разложения решения уравнения (7) в ряд по степеням малого параметра основан на представлении решения в окрестности переходного слоя в виде суммы регулярного решения и Π -функции, которая зависит от растянутой переменной. Коэффициент растяжения следует найти из задачи на собственные значения для линеаризованного в окрестности стационарного состояния дифференциального оператора задачи.

В отличие от упомянутых классических работ в нашем случае имеются три корня характеристического уравнения, причем два корня порядка ε^{-1} и еще один корень порядка ε^{-2} . Кроме обычных Π -функций решение будет включать также быстрые функции переходного слоя, которые для краткости будем называть Θ -функциями.

Пусть x^* — заданная величина, причем $g(x^*) = \varphi_2(x^*)$. Значение величины W , определяющей скорость движения центра ВПС, будем искать в виде ряда по степеням ε : $W(\varepsilon) = W_0 + \varepsilon W_1 + \varepsilon^2 W_2 + \dots$.

Найдем характеристические показатели линеаризованного уравнения (7) в окрестности корней уравнения $F(g) = 0$. Пусть $g(x) = \pm(1 \mp \nu s(x))$, где $|\nu| \ll 1$. Собрав главные члены разложения левой части (7) по степеням ν , придем к уравнению третьего порядка $\varepsilon^4 W_0 \mu_0 s_{xxx} - \varepsilon^2 k_0 s_{xx} + \varepsilon^2 (V_0 - W_0) s_x + 2\gamma s = 0$. Корни соответствующего характеристического уравнения

$\varepsilon^4 W_0 \mu_0 \lambda^3 - \varepsilon^2 k_0 \lambda^2 + \varepsilon^2 (V_0 - W_0) \lambda + 2\gamma s = 0$ можно представить в виде рядов Лорана по степеням ε :

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{2\gamma}{k_0}} \varepsilon^{-1} + \Lambda_{1,2}(\varepsilon), \quad (8)$$

$$\lambda_3 = \frac{k_0}{W_0 \mu_0} \varepsilon^{-2} - \frac{2\gamma W_0 \mu_0 + k_0 (V_0 - W_0)}{k_0^2} + \Lambda_3(\varepsilon), \quad (9)$$

где $\Lambda_j(\varepsilon)$, $j = 1, 2, 3$, — регулярные функции в окрестности точки $\varepsilon = 0$, причем $\Lambda_j(0) = 0$.

При условии $W_0 < 0$ имеются два отрицательных корня и один положительный, поэтому линеаризованное уравнение имеет два экспоненциально убывающих и одно экспоненциально растущее решение.

Решение (7) будем искать в виде суммы регулярной функции, медленной Π -функции переходного слоя и быстрой Θ -функции переходного слоя:

$$g(x) = \bar{g}(x, \varepsilon) + \Pi(\tau, \varepsilon) + \Theta(\tau_1, \varepsilon) + \Omega(\zeta, \varepsilon). \quad (10)$$

Так как пограничные области стационарны и не влияют на движение фронта, находятся стандартным образом из уравнения второго порядка, то опустим их из рассмотрения. В силу того что постоянные множители $\sqrt{\frac{2\gamma}{k_0}}$ в (8) и $\frac{k_0}{W_0 \mu_0}$ в (9) незначительны, в соответствии с общими принципами метода Π -функций [4] выберем медленную растянутую переменную в виде $\tau = \frac{x - x^*}{\varepsilon}$ (из (8)), быструю переменную в виде $\tau_1 = \frac{x - x^*}{\varepsilon^2}$ (из (9)).

На промежутке $\Omega_*^{(-)} = (x^* - d^*, x^*)$ ограниченное решение не включает быструю Θ -функцию, поэтому

$$g^{(-)}(x, \varepsilon) = \bar{g}^{(-)}(x, \varepsilon) + \Pi^{(-)}(\tau, \varepsilon), \quad (11)$$

причем $g^{(-)}(x) \rightarrow \varphi_1$ при $x \rightarrow -\infty$. Решение уравнения (7) на промежутке $\Omega_*^{(+)} = (x^*, x^* + d^*)$ включает как медленную, так и быструю функции переходного слоя, так что

$$g^{(+)}(x, \varepsilon) = \bar{g}^{(+)}(x, \varepsilon) + \Pi^{(+)}(\tau, \varepsilon) + \Theta^{(+)}(\tau_1, \varepsilon). \quad (12)$$

Регулярные функции $\bar{g}^{(\pm)}(x, \varepsilon)$ и функции переходного слоя представляются в свою очередь рядами по степеням малого параметра ε :

$$\bar{g}^{(\pm)}(x, \varepsilon) = \bar{g}_0^{(\pm)}(x) + \varepsilon \bar{g}_1^{(\pm)}(x) + \varepsilon^2 \bar{g}_2^{(\pm)}(x) + \dots, \quad (13)$$

$$\Pi^{(\pm)}(\tau, \varepsilon) = \Pi_0^{(\pm)}(\tau) + \varepsilon \Pi_1^{(\pm)}(\tau) + \varepsilon^2 \Pi_2^{(\pm)}(\tau) + \dots, \quad (14)$$

$$\Theta^{(+)}(\tau_1, \varepsilon) = \Theta_0^{(+)}(\tau_1) + \varepsilon \Theta_1^{(+)}(\tau_1) + \varepsilon^2 \Theta_2^{(+)}(\tau_1) + \dots \quad (15)$$

Так как рассматриваемое уравнение является уравнением третьего порядка, то в точке x^* нужношить функции (11) и (12), а также их производные до второго порядка включительно:

$$g^{(-)}(x^*) = \varphi_2(x^*), \quad g^{(+)}(x^*) = \varphi_2(x^*),$$

$$g^{(-)'}(x^*) = g^{(+)'}(x^*), \quad g^{(-)''}(x^*) = g^{(+)''}(x^*).$$

Подставим выражения (13), (14) в условия сшивания и соберем слагаемые с одинаковыми степенями ε :

$$\bar{g}_0^{(\pm)}(x_0) + \Pi_0^{(\pm)}(0) + \Theta_0^{(\pm)}(0) = \varphi_2(x_0), \quad (16)$$

$$\bar{g}_1^{(-)}(x_0) + \Pi_1^{(-)}(0) = \bar{g}_1^{(+)}(x_0) + \Pi_1^{(+)}(0) + \Theta_1^{(+)}(0), \quad (17)$$

$$\bar{g}_2^{(-)}(x_0) + \Pi_2^{(-)}(0) = \bar{g}_2^{(+)}(x_0) + \Pi_2^{(+)}(0) + \Theta_2^{(+)}(0), \quad (18)$$

$$\Theta_0^{(+)}(0) = 0, \quad \Pi_0^{(-)}(0) = \Pi_0^{(+)}(0) + \Theta_1^{(+)}(0), \quad (19)$$

$$\bar{g}_0^{(-)}(x_0) + \Pi_1^{(-)}(0) = \bar{g}_0^{(+)}(x_0) + \Pi_1^{(+)}(0) + \Theta_2^{(+)}(0), \quad (20)$$

$$\bar{g}_1^{(-)}(x_0) + \Pi_2^{(-)}(0) = \bar{g}_1^{(+)}(x_0) + \Pi_2^{(+)}(0) + \Theta_3^{(+)}(0), \quad (21)$$

$$\Theta_0^{(+)}(0) = 0, \quad \Theta_1^{(+)}(0) = 0,$$

$$\Pi_0^{(-)}(0) = \Pi_0^{(+)}(0) + \Theta_2^{(+)}(0), \quad (22)$$

$$\Pi_1^{(-)}(0) = \Pi_1^{(+)}(0) + \Theta_3^{(+)}(0), \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \bar{g}_0^{(-)}(x_0) + \Pi_2^{(-)}(0) &= \\ &= \bar{g}_0^{(+)}(x_0) + \Pi_2^{(+)}(0) + \Theta_4^{(+)}(0), \end{aligned} \quad (24)$$

где $\Theta_0^{(-)} = 0$.

2.2. Нулевое приближение

В соответствии с методом [5] для определения коэффициентов рядов (11) и (12) подставим (13)–(15) в (7) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε отдельно по каждой из переменных x , τ , τ_1 .

Регулярное решение в нулевом приближении найдем из уравнения $F(\bar{g}_0, x) = 0$. Отрезок $x_a \leq x \leq x_b$ можно разбить на произвольное число интервалов, на каждом из которых $\bar{g}_0 = \varphi_1$ или $\bar{g}_0 = \varphi_3$, а на границах этих интервалов указанная функция имеет разрыв. Для построения решения в виде простейшей КС с двумя пятнами, разделенными одним ВПС, расположенным в точке x^* , положим $\bar{g}_0^{(-)}(x) = \varphi_1(x)$, $\bar{g}_0^{(+)}(x) = \varphi_3(x)$. Найдем быстрые П-функции ВПС с учетом условий сшивания в нулевом приближении:

$$\mu_0 W_0 \Theta_{0\tau_1\tau_1}^{(+)} = k_0 \Theta_{0\tau_1\tau_1}^{(+)},$$

$$\Theta_0^{(+)}(+\infty) = 0, \quad \Theta_0^{(+)}(0) = 0, \quad \Theta_0^{(+)}(0) = 0.$$

С учетом граничных условий $\Theta_0^{(+)}(\tau_1) = 0$. Выражения для медленных П-функций нулевого приближения найдем из краевых задач:

$$k_0 \Pi_{0\tau\tau}^{(-)} + F(\varphi_1(x_0) + \Pi_0^{(-)}, x_0) = 0,$$

$$\varphi_1(x_0) + \Pi_0^{(-)}(0) = \varphi_2(x_0), \quad \Pi_0^{(-)}(-\infty) = 0,$$

$$k_0 \Pi_{0\tau\tau}^{(+)} + F(\varphi_3(x_0) + \Pi_0^{(+)}, x_0) = 0,$$

$$\varphi_3(x_0) + \Pi_0^{(+)}(0) = \varphi_2(x_0), \quad \Pi_0^{(+)}(+\infty) = 0.$$

Решение имеет вид

$$\Pi_0^{(-)}(\tau) = 1 - \text{th} \frac{\tau}{\delta}, \quad \Pi_0^{(+)}(\tau) = -1 + \text{th} \frac{\tau}{\delta}, \quad (25)$$

где $\delta = \sqrt{\frac{k_0}{2\gamma}}$ — толщина переходного слоя в растянутой переменной. Далее будет показано, что $\Theta_1^{(+)} = 0$, $\Theta_2^{(+)} = 0$, поэтому $\varphi_1(x^*) + \Pi_0^{(-)}(0) = \varphi_3(x^*) + \Pi_0^{(+)}(0) + \Theta_0^{(+)}(0)$, $\Pi_0^{(-)}(0) = \Pi_0^{(+)}(0) + \Theta_1^{(+)}(0)$, $\Pi_{0\tau\tau}^{(-)}(0) = \Pi_{0\tau\tau}^{(+)}(0) + \Theta_2^{(+)}(0)$, так что условия сшивания (16), (19), (22) выполняются автоматически.

2.3. Первое приближение

Собирая коэффициенты при ε , учитывая, что $\bar{g}_0^{(-)}(x) = \varphi_1(x)$, $\bar{g}_0^{(+)}(x) = \varphi_3(x)$, получим задачу

$F'_g(\bar{g}_0^{(\pm)}(x), x) \bar{g}_1^{(\pm)}(x) = 0$, поэтому регулярные функции первого приближения равны нулю: $\bar{g}_1^{(\pm)}(x) = 0$.

Уравнение для быстрой П-функции в первом приближении: $\mu_0 W_0 \Theta_{1\tau_1\tau_1}^{(+)} = k_0 \Theta_{1\tau_1\tau_1}^{(+)}$. Теперь из условий сшивания (19), (22) получим, что быстрая функция ВПС в первом приближении также равна нулю: $\Theta_1^{(+)}(\tau_1) = 0$.

Найдем медленные П-функции ВПС в первом приближении. Обозначим $A = \mu_0 W_0$, $B(x) = V_0 - W_0 - 2k_0 f_1(x)$. Функции первого приближения слева от центральной точки ВПС можно найти из системы

$$\begin{aligned} k_0 \Pi_{1\tau\tau}^{(-)} &= A \Pi_{0\tau\tau\tau}^{(-)} + B(x_0) \Pi_{0\tau}^{(-)} - \\ &- \gamma \Pi_1^{(-)} \left(1 - 3(\varphi_1(x_0) + \Pi_0^{(-)})^2 \right), \end{aligned} \quad (26)$$

$$\Pi_1^{(-)}(0) = 0, \quad \Pi_1^{(-)}(-\infty) = 0, \quad (27)$$

а справа от центральной точки $\Pi_1^{(+)}$ определяем из

$$\begin{aligned} k_0 \Pi_{1\tau\tau}^{(+)} &= A \Pi_{0\tau\tau\tau}^{(+)} + B(x_0) \Pi_{0\tau}^{(+)} - \\ &- \gamma \Pi_1^{(+)} \left(1 - 3(\varphi_3(x_0) + \Pi_0^{(+)}(\tau))^2 \right), \end{aligned} \quad (28)$$

$$\Pi_1^{(+)}(0) = 0, \quad \Pi_1^{(+)}(\infty) = 0. \quad (29)$$

Пусть

$$\Psi(\tau, b \| \Phi, h) = -\frac{1}{k_0} \Phi(\tau) \int_0^\tau \Phi^{-2}(\eta) \int_\eta^b \Phi(\sigma) h(\sigma) d\sigma d\eta. \quad (30)$$

Тогда решение задачи (26) и (28) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \Pi_1^{(-)}(\tau) &= \\ &= \Psi\left(\tau, -\infty \| (\varphi_1(x_0) + \Pi_0^{(-)})_\tau, A \Pi_{0\tau\tau\tau}^{(-)} + B(x_0) \Pi_{0\tau}^{(-)}\right), \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \Pi_1^{(+)}(\tau) &= \\ &= \Psi\left(\tau, +\infty \| (\varphi_3(x_0) + \Pi_0^{(+)}(\tau))_\tau, A \Pi_{0\tau\tau\tau}^{(+)} + B(x_0) \Pi_{0\tau}^{(+)}\right). \end{aligned} \quad (32)$$

2.4. Второе приближение

Во втором приближении для регулярных компонент решения найдем $\bar{g}_2^{(\pm)}(x) = 0$.

В силу граничных условий и $\Theta_0^{(+)}(\tau_1) = 0$, $\Theta_1^{(+)}(\tau_1) = 0$, получим, что $\Theta_2^{(+)}(\tau_1) = 0$. Медленные функции ВПС второго приближения находятся из системы

$$k_0 \Pi_{2\tau\tau}^{(\pm)} + \Pi_2^{(\pm)}(\tau) F'_g(\bar{g}_0^{(-)}(x_0) + \Pi_0^{(\pm)}, x_0) = h_2(\tau),$$

$$\Pi_2^{(\pm)}(0) = 0, \quad \Pi_2^{(\pm)}(\pm\infty) = 0,$$

причем функция в правой части выражается через уже известные величины:

$$\begin{aligned} h_2^{(\pm)}(\tau) &= \mu_0 W_0 \Pi_{1\tau\tau\tau}^{(\pm)} + \mu_0 W_1 \Pi_{0\tau\tau\tau}^{(\pm)} + \\ &+ (V_0 - W_0 - 2k_0 f(x_0)) \Pi_{1\tau}^{(\pm)} - W_1 \Pi_{0\tau}^{(\pm)}, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\Pi_2^{(\pm)}(\tau) = -\frac{1}{k_0} \Phi^{(\pm)}(\tau) \int_0^\tau (\Phi^{(\pm)}(\eta))^{-2} \times$$

$$\times \int_{\eta}^{\pm\infty} \Phi^{(\pm)}(\sigma) h_2^{(\pm)}(\sigma) d\sigma d\eta, \quad (34)$$

где $\Phi^{(\pm)}(\tau) = (\bar{g}_0^{(\pm)}(x_0) + \Pi_0^{(\pm)})_{\tau}$.

После того как найдена быстрая Π -функция второго приближения, найдем скорость дрейфа из первого приближения. В силу гладкости $\Pi_1^{(\pm)}(\tau)$ применим условия сшивания первых производных в точке x^* :

$$\varphi'_1(x_0) + \Pi_{1\tau}^{(-)}(0) = \varphi'_3(x_0) + \Pi_{1\tau}^{(+)}(0) + \Theta_{2\tau_1}^{(+)}(0). \quad (35)$$

В рассматриваемой задаче $\varphi'_1(x_0) = \varphi'_3(x_0) = 0$, $\Theta_{2\tau_1}^{(+)}(\tau_1) = 0$. Продифференцируем (31) и (32), подставим в (35):

$$\begin{aligned} \Pi_{1\tau}^{(-)}(0) &= -\frac{1}{k_0\Phi^{(-)}(0)} \int_0^{-\infty} \Phi^{(-)}(\tau) h^{(-)}(\tau) d\tau, \\ \Pi_{1\tau}^{(+)}(0) &= -\frac{1}{k_0\Phi^{(+)}(0)} \int_0^{\infty} \Phi^{(+)}(\tau) h^{(+)}(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

где $\Phi^{(\pm)}(\tau) = (\bar{g}_0^{(\pm)}(x_0) + \Pi_0^{(\pm)})_{\tau}$, $h^{(\pm)}(\tau) = A\Pi_{0\tau\tau\tau}^{(\pm)} + B(x_0)\Pi_0^{(\pm)}$.

Так как функции нулевого приближения $\Pi_0^{(\pm)}(\tau)$ находятся в явном виде (25), то можно найти интегралы в замкнутой форме

$$\begin{aligned} \int_0^{-\infty} \Pi_{0\tau}^{(-)}\Pi_{0\tau\tau\tau}^{(-)} d\tau - \int_0^{\infty} \Pi_{0\tau}^{(+)}\Pi_{0\tau\tau\tau}^{(+)} d\tau &= \frac{4\gamma}{15k_0} \sqrt{\frac{2\gamma}{k_0}}, \\ \int_0^{-\infty} \Pi_{0\tau}^{(+)}\Pi_{0\tau}^{(+)} d\tau - \int_0^{\infty} \Pi_{0\tau}^{(+)}\Pi_{0\tau}^{(+)} d\tau &= -\frac{2}{3} \sqrt{\frac{2\gamma}{k_0}}. \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в (35), решим получившееся уравнение и найдем явное выражение для скорости дрейфа в нулевом приближении. Учитывая, что $\Phi(0) = \sqrt{\frac{\gamma}{2k_0}}$, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_0} \sqrt{\frac{2k_0}{\gamma}} \left(\mu_0 W_0 \frac{4\gamma}{15k_0} \sqrt{\frac{2\gamma}{k_0}} + \right. \\ \left. + (V_0 - W_0 - 2k_0 f_1(x_0)) \left(-\frac{2}{3} \sqrt{\frac{2\gamma}{k_0}} \right) \right) = 0, \\ \mu_0 W_0 \frac{4\gamma}{15k_0} \sqrt{\frac{2\gamma}{k_0}} + (V_0 - W_0 - 2k_0 f_1(x_0)) \left(-\frac{2}{3} \sqrt{\frac{2\gamma}{k_0}} \right) = 0, \\ \mu_0 W_0 \frac{2\gamma}{5k_0} - (V_0 - W_0 - 2k_0 f_1(x_0)) = 0. \end{aligned}$$

Выразим W_0 :

$$W_0 = \frac{V_0 - 2k_0 f_1(x^*)}{\mu_0 \frac{2\gamma}{5k_0} + 1}. \quad (36)$$

Заметим, что если функция $U(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $x_a \leq x \leq x_b$, то множество значений правой части (36) определяет также и множество значений W_0 , при которых существует КС указанного вида (с одним ВПС). Из физических со-

ображений [1] следует, что $\mu_0 > 0$, поэтому скорость дрейфа ВПС для уравнения ОКПП меньше, чем для уравнения диффузии (2). Например, если $\mu_0 \frac{2\gamma}{5k_0} = 1$, то скорость дрейфа ВПС для уравнения ОКПП будет в два раза меньше, чем для уравнения диффузии. Так как скорость переноса V_0 можно выбрать равной нулю, то получим, что $W < 0$, т.е. ВПС будет двигаться в сторону, противоположную градиенту $U(x)$. Уравнение движения ВПС $x^* = x^*(t)$ в первом приближении имеет

вид $\left(\mu_0 \frac{2\gamma}{5k_0} + 1 \right) \int_{x_0}^{x^*} \frac{dy}{V_0 - 2k_0 \varepsilon^2 f_1(y)} = t - t_0$. Легко убедиться

в том, что $\Pi_{1\tau\tau}^{(\pm)} = -\frac{1}{k_0} h_1^{(\pm)}(0)$, поэтому условие (23) сшивания вторых производных функций $\Pi_1^{(\pm)}$ при выполнении условия (36) выполняется автоматически.

Аналогично W_1 можно найти из условия (21) сшивания первых производных медленных Π -функций. Условие (24) сшивания вторых производных медленных Π -функций выполняется автоматически (легко убедиться, что $\Theta_3^{(+)}(\tau_1) = \Theta_4^{(+)}(\tau_1) = 0$).

2.5. Простейшие конфигурации КС

Рассмотрим две основные конфигурации неоднородной среды на конечном промежутке. Для простоты положим $V_0 = 0$.

1. Пусть $U(x) = U_a$ при $x < x_a$, $U(x) = U_b$ при $x > x_b$, $U(x) = U_a \left(\frac{U_b}{U_a} \right)^{\frac{(x-x_a)/(x_b-x_a)}{1}}$ при $x_a < x < x_b$. Тогда $f_1(x) = (\ln U_b - \ln U_a)/(x_b - x_a)$ при $x_a < x < x_b$, и уравнение движения ВПС в нулевом приближении имеет вид

$$\left(\mu_0 \frac{2\gamma}{5k_0} + 1 \right) \frac{x_* - x_0}{-2k_0 \varepsilon^2 f_1} = t - t_0, \quad (37)$$

поэтому ВПС преодолевает весь неоднородный промежуток $x_a < x < x_b$ за конечное время, равное $\left(\mu_0 \frac{2\gamma}{5k_0} + 1 \right) \frac{x_b - x_a}{-2k_0 \varepsilon^2 f_1}$.

2. Пусть $U(x) = U_a$ при $x < x_a$, $U(x) = U_b$ при $x > x_b$, $U(x) = U_a + (U_b - U_a)(x - x_a)^2/(x_b - x_a)^2$ при $x_a < x < x_b$. Тогда $f_1(x) = \frac{2(U_b - U_a)(x - x_a)}{U_a(x_b - x_a)^2 + (U_b - U_a)(x - x_a)^2} = \frac{2ap}{C^2 + ap^2}$, $p = x - x_a$ при $x_a < x < x_b$, и уравнение движения ВПС имеет вид

$$\begin{aligned} \left(\mu_0 \frac{2\gamma}{5k_0} + 1 \right) \frac{1}{-4ak_0 \varepsilon^2} \times \\ \times \left(C^2 \ln \left(\frac{x^* - x_a}{x_0 - x_a} \right) + a \frac{(x^* - x_a)^2 - (x_0 - x_a)^2}{2} \right) = t - t_0, \end{aligned} \quad (38)$$

поэтому ВПС преодолевает весь неоднородный промежуток $x_a < x < x_b$ за бесконечное время.

3. Численное решение уравнения ОКПП

Численное моделирование уравнения (3) подтверждает формулу (36) для скорости дрейфа ВПС. Зададим функцию $U(x) = U_a$, $x < x_a$, $U(x) = U_b$, $x > x_b$, $0 < U_a < U_b$, $U(x)$ дифференцируема и возрастает на промежутке $[x_a, x_b]$, причем $U_1(x) = -U(x)$, $U_2(x) = 0$, $U_3(x) = U(x)$. Рассмотрим задачу Коши для уравнения (3) с граничными условиями $u(x, t) \rightarrow -U_a$ при

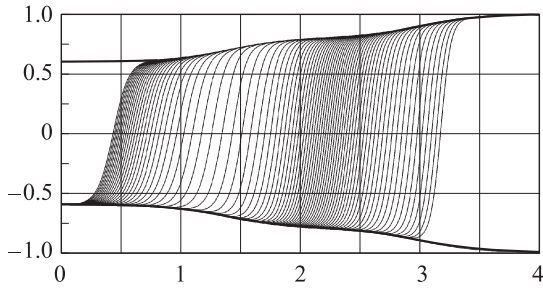


Рис. 2. Дрейф ВПС для уравнения КПП в неоднородной среде

$x \rightarrow -\infty$, $u(x, t) \rightarrow U_b$ при $x \rightarrow +\infty$, $u(x, 0) = U_1(x)$, $x < x_0$, $u(x, 0) = U_3(x)$, $x > x_0$, значение x_0 выберем так, чтобы ВПС сформировался в области правее неоднородного участка. В соответствии с нашими выводами ВПС будет перемещаться справа налево, причем скорость дрейфа пропорциональна U_x/U . На рис. 2 показаны графики функции $u(x, t_k)$ для нескольких последовательных моментов времени $t_k = t_0 + k\Delta t$. Видно, что скорость дрейфа (пропорциональная расстоянию между соседними кривыми по горизонтали) действительно увеличивается в областях с большим градиентом $U_j(x)$, о чем свидетельствует увеличение расстояния между $u(x, t_{k-1})$ и $u(x, t_k)$. Измерение скорости дрейфа показывает соответствие формуле (36). Этот вывод верен только в том случае, когда U_x мало меняется на отрезке, протяженность которого равна толщине ВПС. На рис. 3 показано перемещение ВПС в среде, в которой функция $U(x)$ не является монотонной. В окрестности середины промежутка (x_a, x_b) имеется область (x_1, x_2) , в которой $U_x < 0$. В соответствии с формулой (36), $W < 0$ на промежутках (x_a, x_1) и (x_2, x_b) и $W > 0$ на промежутке (x_1, x_2) . Следовательно, точка x_2 будет точкой устойчивого равновесного положения ВПС, точка x_1 будет точкой неустойчивого равновесного положения ВПС. Если начальные условия таковы, что ВПС образуется правее точки x_2 , как на рис. 3, то ВПС не сможет пересечь точку x_2 перемены знака U_x , но рис. 3 показывает, что наличие достаточно узкой области $U_x < 0$ не может остановить дрейфующий ВПС, так как ширина этого участка сравнима с толщиной ВПС. Более точный анализ показывает, что в окрестности точек $U_x = 0$, в которых скорость дрейфа в первом

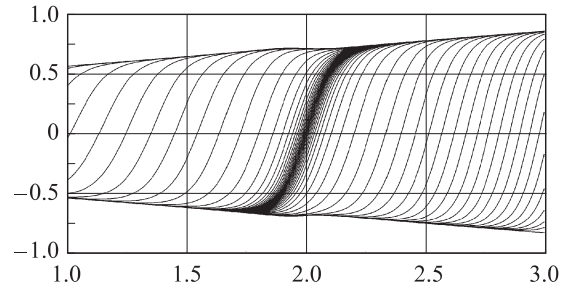


Рис. 3. Дрейф ВПС в неоднородной среде с переменной знака U_x

приближении равна нулю, направление дрейфа ВПС требует вычисления скорости дрейфа во втором порядке, но этот вопрос выходит за рамки настоящей статьи.

Заключение

В работе с помощью метода погранфункций построено формальное разложение решения уравнения ОКПП вида КС в ряд по малому параметру, найдены скорость дрейфа для решения уравнения ОКПП в виде фронта и необходимое условие существования решения такого вида, вычислено нулевое приближение для координаты точки перехода.

Авторы выражают благодарность В. Ф. Бутузову, Н. Н. Нефедову, А. Г. Никитину за обсуждение результатов и ценные замечания.

Список литературы

1. Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М., 2007.
2. Корпусов М.О., Свешников А.Г. // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2005. **45**, № 2. С. 272.
3. Зельдович Я.Б., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д. Магнитные поля в астрофизике. М.; Ижевск, 2006.
4. Быков А.А., Попов В.Ю. // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1999. **309**, № 2. С. 280.
5. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н. // Фундам. и прикл. матем. 1998. **4**, № 3. С. 799.
6. Божевольнов Ю.В., Нефедов Н.Н. // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2010. **50**, № 2. С. 276.

Nonstationary contrast structures for the extended Kolmogorov–Petrovskii–Piskunov equation

A. A. Bykov^a, A. S. Sharlo^b

Department of Mathematics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.

E-mail: ^aabkov@yandex.ru, ^bsharlo@physics.msu.ru.

It is shown that the extended Kolmogorov–Petrovskii–Piskunov (EKPP) equation has a contrast structure like solution with wide areas with the small field gradient which are separated by narrow internal transition layers (ITL) with the large field gradient. The velocity of drift of this equation is compared with the reaction–advection–diffusion one.

Key words: internal transition layer (ITL), contrast structure (CS), asymptotic method of the decision.

PACS: 02.60.Lj.

Received 10 July 2011.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 2(2012).

Сведения об авторах

1. Быков Алексей Александрович — докт. физ.-мат. наук, профессор; e-mail: abkov@yandex.ru.
2. Шарло Алена Станиславовна — аспирант; e-mail: sharlo@physics.msu.ru.