Класс моделей со спонтанной компактификацией типа Фройнда–Рубина и нетривиальным решением для векторного поля

Э. Р. Рахметов[a], С. И. Кейзеров[b]

Научно-исследовательский институт ядерной физики имени Д. В. Скобельцина (НИИЯФ МГУ). Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
E-mail: [a] rahmetov@theory.sinp.msu.ru, [b] errar@www-hep.sinp.msu.ru

Статья поступила 13.04.2011, подписана в печать 30.11.2011

Рассматривается теория взаимодействующих полей (гравитационного, векторного и антисимметричного тензорного поля третьего ранга), имеющих самосогласованные решения спонтанной компактификации (решения типа Фройнда–Рубина) в семимерном пространстве-времени. Изучается класс моделей, в которых возможен тот же тип компактификации и при этом имеются нетривиальные решения для векторного поля. Выделяется подкласс моделей с ненарушенной или слабо нарушенной четырехмерной лоренц-инвариантностью.

Ключевые слова: теории типа Калуцы–Клейна, спонтанная компактификация, решение Фройнда–Рубина, лоренц-инвариантность, реперный формализм, левоинвариантный репер.

УДК: 531.51. PACS: 04.50.+h.

Введение

В работе [1] показано, что в теории с одним дополнительным измерением добавление векторного поля, пятая компонента которого имеет нетривиальное (ненулевое) фоновое значение, позволяет получить нарушение киральной симметрии. Также в работе [2] демонстрируется, как нетривиальное фоновое значение векторного поля может приводить к нарушению CP-инвариантности. Аналогичные результаты справедливы и для большего числа дополнительных измерений. Подобные теории актуальны, например, в связи с попытками построения различных альтернативных сценариев нарушения лево-правой симметрии в Стандартной модели [3].

Таким образом, при построении физических теорий с нарушенной лево-правой симметрий, а также моделей, в которых CP-инвариантность нарушается в результате размерной редукции, естественным образом возникает задача отыскания решений спонтанной компактификации с нетривиальным значением векторного поля. Однако, в простейших случаях компоненты векторного поля в решениях спонтанной компактификации имеют тривиальные значения. Например, в моделях Калуцы–Клейна, бозонная часть которых состоит только из гравитационного и векторного полей (с лагранжианом — суммой эйнштейновского и максвелловского) самосогласованное решение спонтанной компактификации может быть только решением типа $X_4 \times S_1 \times S_1 \cdots S_1$ или тривиальным решением для векторного поля (где X_4 — некоторое четырехмерное пространство, а $S_1 \times S_1 \cdots S_1$ — многомерный тор). Это приводит к тому, что получаемые после редукции безмассовые векторные поля обладают лишь $U(1) \times U(1) \times \ldots \times U(1)$ симметрией. Исключением является случай двух дополнительных измерений, когда возможна спонтанная компактификация типа $X_4 \times S_2$ [4]. Чтобы получить компактификацию других типов, нужно рассматривать более сложные модели. Здесь возможны различные варианты. Во-первых, можно рассматривать лагранжианы гравитационного и векторного полей более сложные, чем сумма эйнштейновского и максвелловского, например введя неминимальное взаимодействие между этими полями. Во-вторых, вместо одного абелева векторного поля можно ввести янг-миллсовский мультиплет с некоторой группой G. В таких теориях возможно решение спонтанной компактификации типа $X_4 \times I_{N-4}$, где I — однородное пространство, тип которого зависит от G [5, 6]. В-третьих, помимо векторного поля можно рассматривать и другие дополнительные бозонные поля [6, 7].

Если в рамках третьего подхода добавить в теорию антисимметричное тензорное поле третьего ранга Q_{ABC}, то можно получить спонтанную компактификацию типа Фройнда–Рубина [4, 7] — $X_4 \times S_N$ (N — число дополнительных измерений) либо $X_4 \times S_2 \times S_{N-2}$. В первом случае решение допускает только тривиальное (равное всюду нулю) векторное поле. Второй случай более интересен тем, что компоненты векторного поля в S_2 нетривиальны, — собственно, в этом случае векторное поле также выступает в качестве поля Фройнда–Рубина, отвечающего за S_2. Очевидно, в таком варианте условие нетривиальности согласуется только с однородными, но неизотропными компактифицированными пространствами. Если же обобщить модель, введя особого вида взаимодействия между векторным полем V_A и полем Фройнда–Рубина Q_{ABC}, то становится возможным получение изотропной компактификации $X_4 \times S_N$. Один из вариантов такого обобщения мы и рассмотрим в этой работе.

Мы изучаем теорию гравитационного, векторного и антисимметричного тензорного полей, для которой в семимерном пространстве возможны решения компактификации вида $X_4 \times S_3$. Семимерное пространство-время (три дополнительных измерения) выбрано потому, что это минимальное число измерений, при котором возникает нетривиальное решение для векторного поля. В разделе 1 кратко воспроизводится решение типа Фройнда–Рубина при наличии в теории векторного поля, введенного в лагранжиан минимальным способом. Решения спонтанной компактификации типа $X_4 \times S_3$ такой модели допускают только тривиальные значения для векторного поля. В разделе 2 мы строим более сложный лагранжиан для рассматриваемой системы полей. В качестве критериев для построения лагранжиана мы выбрали следующие: а) наличие решения спонтанной компактификации $X_4 \times S_3$; б) наличие при этом для векторного поля нетривиального фонового решения (вакуум с ненулевым векторным полем); в) решения обладали бы четырехмерной лоренц-инвариантностью. В п. 2.2 рассматривается решение, которое таковой инвариантностью не обладает.

1. Решение типа Фройнда–Рубина с тривиальным значением векторного поля

Пусть G_{AB} — метрическое (гравитационное), V_A — векторное и Q_{ABC} — антисимметричное тензорное (Фройнда–Рубина) поля в семимерном пространстве-времени с сигнатурой $(-,+,+,\dots,+)$. Индексы, обозначенные прописными латинскими буквами, пробегают значения 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7; строчными латинскими — только 5, 6, 7, а строчными греческими — только 0, 1, 2, 3. Мы также будем использовать реперный формализм; реперные индексы будут обозначаться теми же буквами, но выделяться жирным шрифтом.

Кратко рассмотрим сначала обычное решение Фройнда–Рубина при наличии массивного векторного поля. Действие

$$S = \frac{1}{2\kappa}\int\limits_{X_7} L\sqrt{G}\,d^7x,$$

где L — семимерный лагранжиан, имеющий вид

$$L = (R-2\Lambda) - \frac{1}{4}F_{AB}F^{AB} - \frac{1}{2}m_V^2 V_A V^A - \frac{1}{48}P_{ABCD}P^{ABCD}, \quad (1)$$

а R, Λ и κ — семимерные скалярная кривизна, космологическая и гравитационная константы соответственно; m_V — семимерная масса векторного поля, а $F_{AB} \equiv \partial_{[A}V_{B]}$ и $P_{ABCD} \equiv \partial_{[A}Q_{BCD]}$ — тензоры напряженности векторного и антисимметричного полей. Для удобства мы нормировали поля так, чтобы можно было вынести κ в качестве общего множителя. Выпишем уравнения движения, следующие из действия (1):

$$\frac{2\kappa}{\sqrt{|G|}}\frac{\delta S}{\delta G^{AB}} = -\frac{1}{2}G_{AB}L + R_{AB} - \frac{1}{12}P_A^{PQR}P_{BPQR} - \frac{1}{2}F_A^P F_{BP} - \frac{1}{2}m_V^2 V_A V_B = 0, \quad (2)$$

$$\frac{2\kappa}{\sqrt{|G|}}\frac{\delta S}{\delta Q_{ABC}} = \nabla_D P^{DABC} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{2\kappa}{\sqrt{|G|}}\frac{\delta S}{\delta V_A} = \nabla_D F^{DA} - m_V^2 V^A = 0. \quad (4)$$

Нетрудно убедиться, что эта система допускает решение спонтанной компактификации $X_4 \times S_3$ только если $V_A \equiv 0$.

2. Решения с нетривиальным значением векторного поля

2.1. Лоренц-инвариантное решение с нетривиальным значением векторного поля

Чтобы получить решение с $V_q \not\equiv 0$, обобщим модель, введя взаимодействие полиномиального вида между векторным и антисимметричным полями. Здесь возникает определенная техническая трудность. Добавление слагаемых третьего порядка не приводит к появлению удовлетворительных решений, а уже начиная с четвертого порядка число возможных ковариантных комбинаций исчисляется десятками. Поэтому упрощаем задачу, ограничившись взаимодействием специального вида, а именно такого, что лагранжиан можно переписать в виде

$$L = R - 2\Lambda - \frac{1}{4}\overline{F}_{AB}\overline{F}^{AB} - \frac{1}{2}m_V^2\overline{V}_A\overline{V}^A - \frac{1}{48}P_{ABCD}P^{ABCD}, \quad (5)$$

где $\overline{F}_{AB}$ и $\overline{V}_A$ — некоторые полиномиальные тензорные функции от V_A, F_{AB}, Q_{ABC} и P_{ABCD} не выше второго порядка. Наиболее общий вид этих тензоров в семимерном пространстве-времени следующий:

$$\begin{aligned}\overline{F}_{AB} = {} & F_{AB} + k_1 Q_{ABC}V^C + k_2 P_{ABCD}F^{CD} + \\ & + k_3\varepsilon_{ABCDEFG}V^C P^{DEFG} + k_4\varepsilon_{ABCDEFG}F^{CD}Q^{EFG} + \\ & + k_5\varepsilon_{ABCDEFG}Q^{CDH}P_H^{EFG} + k_6\varepsilon_{[A}^{CDEFGH}Q_{B]CD}P_{EFGH} + \\ & + k_7\varepsilon_{[A}^{CDEFGH}P_{B]CDE}Q_{FGH},\end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}\overline{V}_A = {} & V_A + k_8 F_{AB}V^B + k_9 Q_{ABC}F^{BC} + k_{10}P_{ABCD}Q^{BCD} + \\ & + k_{11}\varepsilon_{ABCDEFG}F^{BC}P^{DEFG}\end{aligned} \quad (7)$$

с некоторыми константами $k_1, \dots, k_{11}$.

Подчеркнем, что фигурирующие в лагранжине $\overline{V}_A$ и $\overline{F}_{AB}$ не являются новыми динамическими переменными теории, а представляют собой лишь удобную форму записи некоторых комбинаций полей модели (подобно тензору напряженности в калибровочной теории или тензору кривизны в теории гравитации). На это указывает, в частности, тот факт, что далее уравнения движения мы получаем, варьируя действие по V_A (без черты), а не по $\overline{V}_A$. Использование таких комбинаций позволяет не только существенно упростить выражения для лагранжиана теории, но и облегчить анализ следующих из (5) уравнений движения:

$$\frac{2\kappa}{\sqrt{|G|}}\frac{\delta S}{\delta G^{AB}} = -\frac{1}{2}G_{AB}L + R_{AB} - \frac{1}{12}P_A^{PQR}P_{BPQR} + - \frac{1}{2}\overline{F}_A^P\overline{F}_{BP} - \frac{1}{2}m_V^2\overline{V}_A\overline{V}_B - \frac{1}{2}\frac{\delta\overline{F}_{PQ}}{\delta G^{AB}}\overline{F}^{PQ} - m_V^2\frac{\delta\overline{V}_P}{\delta G^{AB}}\overline{V}^P = 0, \quad (8)$$

$$\frac{2\kappa}{\sqrt{|G|}}\frac{\delta S}{\delta Q_{ABC}} = -\frac{1}{2}\frac{\delta\overline{F}_{PQ}}{\delta Q_{ABC}}\overline{F}^{PQ} - m_V^2\frac{\delta\overline{V}_P}{\delta Q_{ABC}}\overline{V}^P + \nabla_D P^{DABC} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{2\kappa}{\sqrt{|G|}}\frac{\delta S}{\delta V_A} = \frac{1}{2}\frac{\delta\overline{F}_{PQ}}{\delta V_A}\overline{F}^{PQ} - m_V^2\frac{\delta\overline{V}_P}{\delta V_A}\overline{V}^P = 0. \quad (10)$$

Под выражениями типа $\frac{\delta \overline{F}_{PQ}}{\delta V_A}\overline{F}^{PQ}$ подразумевается производная Лагранжа, например

$$\frac{\delta \overline{F}_{PQ}}{\delta V_A}\overline{F}^{PQ} \equiv \frac{\partial \overline{F}_{PQ}}{\partial V_A}\overline{F}^{PQ} - 2\nabla_B\left(\frac{\partial \overline{F}_{PQ}}{\partial F_{BA}}\overline{F}^{PQ}\right).$$

Сравним эти уравнения с выписанными выше уравнениями (2)–(4). Если в (2)–(4) положить $V_A = 0$ и $F_{AB} = 0$ (второе является следствием первого), а в (8)–(10) — $m_V^2 \overline{V}_A = 0$ и $\overline{F}_{AB} = 0$ (отметим, что здесь второе уже не является следствием первого), то получившиеся уравнения будут попарно совпадать. Следовательно, при этих условиях обе системы будут иметь одинаковые решения для метрического и антисимметричного полей, в частности решение с одним и тем же типом спонтанной компактификации. Поэтому вместо системы (8)–(10) будем решать систему

$$-\frac{1}{2}G_{AB}L + R_{AB} - \frac{1}{12}P_A^{PQR}P_{BPQR} = 0, \tag{11}$$

$$\nabla_D P^{DABC} = 0, \tag{12}$$

$$m_V^2 \overline{V}_A = 0, \quad \overline{F}_{AB} = 0. \tag{13}$$

Подчеркнем, что мы использовали для $\overline{V}_A$ и $\overline{F}_{AB}$ выражения (6) и (7) исключительно для простоты, выбрав для потенциала взаимодействия полином четвертой степени по полям и их производным. Очевидно, что такой выбор не является обязательным. Можно рассматривать более сложное действие, используя любые другие функционалы от полевых переменных, которые на требуемых решениях (в части метрики и антисимметричного поля) при некоторых нетривиальных V_A обращались бы в нуль, т. е. удовлетворяли бы уравнениям (13).

Решения для G_{AB} и Q_{ABC}, удовлетворяющие уравнениям (11)–(12) и дающие желаемую компактификацию, могут быть несовместимыми с требованиями (13). Ниже мы покажем, при каких наборах констант эти системы совместны, а также имеют решения с четырехмерной лоренц-инвариантностью.

Выберем следующие анзацы для полей.

Метрический тензор:

$$G_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} \quad (\text{зависит только от } x^\mu),$$
$$G_{pq} = h_{pq} \quad (\text{зависит только от } x^q)$$

— метрика на X_4 (с постоянной скалярной кривизной K) и сфере S_3 (радиуса r) соответственно; т. е. метрика $\eta_{\alpha\beta}$ такова, что $R_{\alpha\beta} = \frac{K}{4}\eta_{\alpha\beta}$, а h_{pq} — такая, что $R_{pq} = 2r^{-2}h_{pq}$. Смешанные компоненты метрического тензора $g_{q\alpha}$ равны нулю тождественно.

Антисимметричное тензорное поле Q_{ABC}:

$$Q_{\alpha\beta\gamma} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\mu}Q^\mu \quad (\text{зависит только от } x^\mu),$$
$$Q_{abc} = \varepsilon_{abc}Q \quad (\text{зависит только от } x^q).$$

Четырехмерную дивергенцию поля Q^μ обозначим как

$$\nabla_\mu Q^\mu \equiv -\frac{1}{6}\alpha, \tag{14}$$

поскольку ниже мы покажем, что это просто константа, не зависящая от координат.

Для такого Q_{ABC} нетривиальные компоненты тензора P_{ABCD} имеют вид $P_{\alpha\beta\gamma\delta} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\alpha$, а остальные тождественно равны нулю.

Анзац для векторного поля:

$$V_\mu = 0, \quad V_a(x^Q) = V_a(x^q) \quad (\text{зависит только от координат} x^q).$$

Для этого анзаца нетривиальными являются следующие компоненты тензора F_{AB}:

$$F_{ab}(x^Q) = F_{ab}(x^q) \equiv \varepsilon_{abl}F^l(x^q)$$

Подставим эти анзацы в системы (11)–(13) и получим

$$\frac{1}{4}\{4\Lambda - K - 12r^{-2} + \alpha^2\}\eta_{\alpha\beta} = 0, \tag{15}$$

$$\frac{1}{4}\{4\Lambda - 2K - 4r^{-2} - \alpha^2\}h_{ab} = 0, \tag{16}$$

$$-\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\mu}\nabla_\mu\alpha = 0, \tag{17}$$

$$\overline{F}_{\alpha\beta} = 0, \tag{18}$$

$$\overline{F}_{a\beta} = 12k_4F_aQ_\beta = 0, \tag{19}$$

$$\overline{F}_{ab} = \varepsilon_{abl}\{F^l + (k_1Q - 24k_3\alpha)V^l\} = 0, \tag{20}$$

$$\overline{V}_\alpha = 6k_{10}\alpha Q_\alpha = 0, \tag{21}$$

$$m_V^2\overline{V}_a = m_V^2\{V_a + k_8\varepsilon_{apq}V^pF^q + (2k_9Q - 48k_{11}\alpha)F_a\} = 0. \tag{22}$$

Рассмотрим сначала уравнения (15), (16) и (17). Из (17) следует, что α от координат не зависит. А пара уравнений (15), (16) приводит к выражениям

$$\alpha^2 = 4r^{-2} - \frac{1}{2}K, \quad \Lambda = 2r^{-2} + \frac{3}{8}K. \tag{23}$$

Теперь рассмотрим уравнения (18-20) и (21,22). Отметим, что четырехмерный вектор Q^μ явным образом нарушает инвариантность решения относительно четырехмерных преобразований Лоренца. Поэтому, чтобы решение могло выглядеть физически осмысленным, это поле либо должно быть очень слабым (что не так, потому что пропорциональная его дивергенции величина α имеет порядок r^{-1}), либо константы взаимодействия с ним должны быть очень малыми. В частности, если все константы в выражениях (6) и (7) для $\overline{V}_A$ и $\overline{F}_{AB}$ при слагаемых, в которых фигурирует непосредственно Q_{ABC} (а не P_{ABCD}), то лагранжиан и решения уравнений движения инвариантны относительно преобразований вида

$$Q_{ABC} \to Q_{ABC} + \partial_{[A}\xi_{BC]},$$

а нарушение лоренц-инвариантности становится ненаблюдаемым (поскольку с вектором Q^μ ничто не взаимодействует). Поэтому в дальнейшем будем полагать $k_1 = k_4 = k_5 = k_6 = k_7 = k_9 = k_{10} = 0$.

При этих константах мы можем переписать нетривиальные уравнения в следующем виде:

$$F^l = 24k_3\alpha V^l, \tag{24}$$

$$m_V^2\{1 - 1152k_3k_{11}\alpha^2\} = 0. \tag{25}$$

Из (25) следует, что либо $m_V^2 = 0$, либо

$$1152k_3k_{11}\alpha^2 = 1.$$

Как видим, при этом $k_3 \neq 0$ и $k_{11} \neq 0$. Выберем на сфере репер $g_{\boldsymbol{q}}^a$ такой, что

$$\partial_{[\boldsymbol{p}}\partial_{\boldsymbol{q}]} = -2r^{-1}\varepsilon_{\boldsymbol{pq}}{}^{\boldsymbol{l}}\partial_{\boldsymbol{l}}, \quad \partial_{\boldsymbol{p}} \equiv g_{\boldsymbol{p}}^a\partial_a \tag{26}$$

(так называемый левоинвариантный репер) и перепишем уравнение (24) в виде

$$\varepsilon^{abc}\partial_b V_c + 2r^{-1}V^a = 24k_3\alpha V^a. \qquad (27)$$

Подействовав на правую и левую части этого уравнения оператором ∂_a, получим с учетом (26) и того, что $24k_3\alpha \neq 0$,

$$\partial_a V^a = 0. \qquad (28)$$

С другой стороны, уравнение (27) можно переписать в виде

$$\partial_{[a}V_{b]} + 2r^{-1}\varepsilon_{abc}V^c = (24k_3\alpha - k_1 Q)\varepsilon_{abc}V^c.$$

Подействовав на это уравнение оператором ∂^a, получим

$$\partial^a\partial_a V_b - \partial^a\partial_b V_a + 2r^{-1}\varepsilon_{abc}\partial^a V^c = (24k_3\alpha - k_1 Q)\varepsilon_{abc}\partial^a V^c. \qquad (29)$$

Поскольку в репере (26) $\partial^a\partial_a V_b = \Delta V_b$, где Δ — оператор Лапласа на сфере, действующий на скаляры V_b, а также $\partial^a\partial_b V_a = \partial_{[a}\partial_{b]}V^a + \partial_b\partial_a V^a = -2r^{-1}\varepsilon_{abc}\partial^c V^a + \partial_b\partial_a V^a$, то (29) принимает вид

$$\Delta V_b - \partial_b\partial_a V^a = 24k_3\alpha\varepsilon_{abc}\partial^a V^c. \qquad (30)$$

Выразив из (27) величину $\varepsilon_{abc}\partial^a V^c$ и подставив ее в (30), перепишем это уравнение в виде

$$\{\Delta + 24k_3\alpha(24k_3\alpha - 2r^{-1})\}V_b = \partial_b\partial_a V^a,$$

или с учетом (28)

$$\{\Delta + 24k_3\alpha(24k_3\alpha - 2r^{-1})\}V_b = 0. \qquad (31)$$

Система из уравнений (31) и (28) эквивалентна исходному уравнению (27). Уравнение (31) имеет всюду регулярные решения при

$$24k_3\alpha(24k_3\alpha - 2r^{-1}) = n(n+2)r^{-2}, \qquad (32)$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$ При $n = 0$ решениями являются постоянные V_b. Условие (32) при этом означает, что

$$24k_3\alpha = 2r^{-1}, \quad \text{если} \quad n = 0. \qquad (33)$$

В итоге при $k_4 = 0$ и $m^2_{\overline{V}} \neq 0$ должно быть (33) и $V_a = g^q_a V_q$, где g^q_a — левоинвариантный репер на сфере, а V_q — постоянные.

Итак, в семимерном пространстве-времени модель с лагранжианом (6), где $\overline{V}_A$ и $\overline{F}_{AB}$ имеют вид

$$\overline{F}_{AB} = F_{AB} + k_2 P_{ABCD}F^{CD} + k_3\varepsilon_{ABCDEFG}V^C P^{DEFG},$$
$$\overline{V}_A = V_A + k_8 F_{AB}V^B + k_{11}\varepsilon_{ABCDEFG}F^{BC}P^{DEFG}$$

с произвольными константами k_2 и k_3, допускает решения со спонтанной компактификацией типа Фройнда–Рубина вида $X_4 \times S_3$ с нетривиальным вакуумным значением векторного поля V_A, обладающие лоренц-инвариантностью.

2.2. Решение со слабо нарушенной лоренц-инвариантностью

В предыдущем подразделе мы рассмотрели решение, инвариантное относительно четырехмерных лоренцевых преобразований. Теперь рассмотрим другой случай, когда на константы k_1, k_4, k_5, k_6, k_7, k_9, k_{10} не накладывается условие равенства нулю. В этом случае четырехмерная лоренц-инвариантность может нарушаться.

Уравнение (19) при $k_4 \neq 0$ перестает быть тривиальным, из него теперь следует

$$F_a = 0.$$

Это уравнение имеет решения вида

$$V_a = \partial_a\chi,$$

где χ — произвольная функция всех координат. Далее из уравнения (24) можно заключить, что $F^l = (24k_3\alpha - k_1 Q)V^l$, т. е.

$$k_1 Q = 24k_3\alpha. \qquad (34)$$

Из уравнения (25) теперь видно, что решение возможно лишь при

$$m_{\overline{V}} = 0.$$

Обратим внимание, что для данного типа решения существенно, что константы k_1 и k_4 не равны нулю. При этом величина k_4 может быть сколь угодно малой, не изменяя самого решения, а вот величина k_1 по формуле (34) связана с k_3 и фоновыми значениями Q и α, причем последняя величина приближенно равна $2r^{-1}$ (см. (23)). Величина же Q всегда встречается в комбинации $k_1 Q$, которая, как видим, имеет порядок $48k_3 r^{-1}$.

Заключение

В настоящей работе мы ограничились тензорами $\overline{F}_{AB}$, квадратично зависящими от V_A, F_{AB}, Q_{ABC} и P_{ABCD}, и убедились, что в семимерном пространстве-времени теория с лагранжианом (5) имеет самосогласованные решения со спонтанной компактификацией. Эти решения унаследовали все основные черты спонтанной компактификации Фройнда–Рубина теории с лагранжианом (1), но при этом имеют нетривиальные векторные поля, которые могут не просто быть константами не равными нулю, но и сложным образом зависеть от дополнительных координат. В рассматриваемой теории векторное поле не является калибровочным, т. е. лагранжиан неинвариантен относительно фазовых преобразований $V_A \to V_A + \partial_A\xi$. Мы ограничились вариантом, при котором лагранжиан инвариантен относительно преобразований $Q_{ABC} \to Q_{ABC} + \partial_{[A}\xi_{BC]}$. В таком случае с фоновым значением Q^μ, нарушающим четырехмерную лоренц-инвариантность, ни одно другое наблюдаемое поле явно не взаимодействует. Взаимодействие осуществляется только с $P_{\alpha\beta\gamma\delta} = \alpha\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$, т. е. с не зависящим от координат скаляром α. Это позволило нам получить решение с четырехмерной лоренц-инвариантностью.

В более общем случае, когда константы k_1, k_4, k_5, k_6, k_7, k_9 и k_{10} не равны нулю, теория становится неинвариантной относительно четырехмерных лоренцевых преобразований. Это может проявляться во взаимодействии (наблюдаемых) легких мод возмущений всех полей непосредственно с фоновым полем Q^μ. Поскольку величина Q^μ связана с α по формуле (14), а та в свою очередь (см. (23)) имеет порядок r^{-1}, то такое взаимодействие не давало бы сильного нарушения только в случае очень малых перечисленных констант. Малые колебания всех полей над полученными (фоновыми) решениями можно разложить по некоторому базису, зависящему от дополнительных координат, и трактовать полученные моды как эффективные четырехмерные поля. Параметры и константы взаимодействий этих полей, очевидно, будут зависеть от первоначальных констант теории, в частности от k_1 и k_4. Поэтому, для того чтобы теория была физически интересной, хотя бы некоторые из этих констант не должны быть слишком малыми. Таким образом, при $k_4 \neq 0$, по-видимому, должно либо наблюдаться сильное нарушение лоренц-инвариантности, либо константы взаимодействий наблюдаемых четырехмерных полей должны быть очень малы.

Авторы благодарны профессору Э. Э. Боосу, доктору физ.-мат. наук И. П. Волобуеву и кандидату физ.-мат. наук М. Н. Смолякову за полезные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-4142.2010.2) и Министерства образования и науки РФ (ГК № 02.740.11.0244).

Список литературы

1. *Salvio A., Shaposhnikov M.* // arXiv:0707.2455v1 [hep-th]. 17 July 2007.
2. *Thirring W.* // Acta Phys. Austriaca Suppl. 1972. **9**. P. 256.
3. *Емельянов В.М.* Стандартная модель и ее расширения. М., 2007.
4. *DeWolfe O., Freedman D.Z., Gubser S.S.* et al. // arXiv:hep-th/0105047v1.
5. *Cremmer E., Scherk J.* // Nucl. Phys. B. 1977. **118**, N 1/2. P. 61.
6. *Волобуев И.П., Кубышин Ю.А.* Дифференциальная геометрия и алгебры Ли и их приложения в теории поля. М., 1998.
7. *Freund P.G., Rubin M.A.* // Phys. Lett. B. 1980. **97**. P. 233.

A class of models with a spontaneous compactification of Freund–Rubin type and nontrivial solution for the vector field

E. R. Rakhmetov[a], **S. I. Keizerov**[b]

D. V. Skobeltsyn Institute of Nuclear Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.
E-mail: [a]rahmetov@theory.sinp.msu.ru, [b]errar@www-hep.sinp.msu.ru.

A theory of interacting gravity, vector and antisymmetric third-rank tensor field with a spontaneous compactification solution of Freund–Rubin type in seven-dimensional space-time is presented. A class of models is studied, which admit the same type of compactification and, at the same time, possess nontrivial solutions for the vector field. A class of models is isolated, in which the four-dimensional Lorentz-invariance is either unbroken or weakly broken.

Key words: Kaluza–Klein theories, spontaneous compactification, Freund–Rubin solution, Lorentz invariance, reference frame formalism, left-invariant frame.
PACS: 04.50.+h.
Received 13 April 2011.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 2(2012).

Сведения об авторах

1. Рахметов Эдуард Рустямович — мл. науч. сотрудник; тел.: (495) 939-58-81, e-mail: rahmetov@theory.sinp.msu.ru.
2. Кейзеров Сергей Иванович — мл. науч. сотрудник; тел.: (495) 939-58-81, e-mail: errar@www-hep.sinp.msu.ru.