

Размерная редукция фермионов в модели Гросса–Невё в условиях нарушенной лоренц-инвариантности

Н. В. Губина^a, В. Ч. Жуковский^b, С. Г. Курбанов

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра теоретической физики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

E-mail: ^agubinanadya@gmail.com, ^bvlchzh@gmail.com

Статья поступила 16.11.2011, подписана в печать 23.12.2011

Изучается модель Гросса–Невё с нарушенной лоренц-инвариантностью. В двух и трех измерениях вычисляются эффективный потенциал, уравнения щели, исследуются симметричные свойства модели. В результате размерной редукции устанавливается соответствие между результатами в разном числе измерений.

Ключевые слова: Гросс–Невё, нарушение лоренц-инвариантности, эффективный потенциал, размерная редукция, компактификация.

УДК: 530.145. PACS: 11.30.Cp, 11.30.Rd, 03.70.+k.

Введение

В настоящей работе подробно изучены основные симметричные свойства и установлено соответствие между (1+1)- и (2+1)-моделями Гросса–Невё при наличии члена, нарушающего лоренц-инвариантность. Модель Гросса–Невё, впервые введенная и изученная в работе [1], — это теория с дискретной симметрией, в двух измерениях описывающая четырехфермионное взаимодействие. Она может быть получена в результате размерной редукции из более фундаментальных теорий высших размерностей (см. [2]), соответствие между трехмерной и двумерной моделями установлено в работе [3]. Двумерная модель имеет важное значение, поскольку в пределе больших N аналитически разрешима и обладает главными свойствами моделей КХД (асимптотическая свобода, размерная трансмутация, спонтанное нарушение киральной симметрии). Трехмерная модель дает представление о том, как устроен мир при наличии дополнительных измерений. Исходно она обладает $Z(2)$ -симметрией с инверсией по третьему измерению, но при введении нарушения лоренц-инвариантности, как будет показано, демонстрирует разнообразие вакуумных состояний.

Что касается нарушения лоренц-инвариантности, то уже существующие кинематические и динамические модели нарушения (см., напр., [4, 5]) после обнаружения важных данных в экспериментах с нейтрино (см. [6], [7]) переживают второе рождение. Особо отметим модели с химическим потенциалом, эффект учета которого имеет много общего с нарушением лоренц-инвариантности (см. [8–10]).

1. Двумерная модель Гросса–Невё

Лоренц-инвариантный случай

Евклидово действие модели в (1+1) измерении выглядит следующим образом:

$$S[\bar{\psi}, \psi] = \int d^2x \left[\bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\mu \psi - \frac{g}{2N} (\bar{\psi} \psi)^2 \right], \quad \psi = (\psi_1, \dots, \psi_N),$$

где g — безразмерная константа четырехфермионного спаривания, индекс аромата пробегает значения

$a = 1, \dots, N$. Действие инвариантно относительно преобразований глобальной $U(N)$ -симметрии, γ -матрицы удовлетворяют алгебре Дирака:

$$\gamma_2 = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_3 = \gamma_5 = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

где σ_i — матрицы Паули.

Действие можно линеаризовать

$$S[\bar{\psi}, \psi, \Phi] = \int d^2x \left[\bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\mu \psi - \bar{\psi} \psi \Phi + \frac{N}{2g} \Phi^2 \right]$$

введением новых бозонных полей:

$$\Phi(x) = \frac{g}{N} \bar{\psi}(x) \psi(x),$$

вакуумное ожидание которых предполагается отличным от нуля:

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle = \frac{\delta \ln Z}{\delta \Phi} + \frac{N}{g} \langle \Phi \rangle = \frac{N}{g} \Phi_0,$$

что приводит к нарушению киральной симметрии.

Эффективный потенциал V_{eff} может быть введен через поля Φ , постоянные в пределе $N \rightarrow \infty$, через определение производящего функционала

$$Z = \int D\bar{\psi} D\psi \exp(-S[\bar{\psi}, \psi, \Phi]) = \exp(-NVV_{\text{eff}}(\Phi)), \quad (1)$$

где V — двумерный объем, а эффективный потенциал

$$V_{\text{eff}}(\Phi) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2k \ln(k^2 + \Phi^2) + \frac{1}{2g} \Phi^2.$$

Минимум эффективного потенциала является решением уравнения щели $\frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial \Phi} = 0$:

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{k^2 \leq \Lambda_2} d^2k \frac{2}{k^2 + \Phi_0^2} = \frac{1}{g}.$$

Для устранения логарифмической расходимости вводится обрезание Λ_2 в двумерном импульсном пространстве. В ультрафиолетовом пределе $\Lambda_2 \gg \Phi_0$ возникает результат

$$\Phi_0 = m = \Lambda_2 \exp\left(-\frac{\pi}{g(\Lambda_2)}\right). \quad (2)$$

Вид полученного решения указывает на наличие асимптотической свободы: для фиксированного Φ_0 имеем $g(\Lambda_2) \rightarrow 0$ при $\Lambda_2 \rightarrow \infty$. Вследствие спонтанного (динамического) нарушения киральной симметрии фермионы приобретают массу $m = \Phi_0$, которая остается неизменной при вариациях величины константы связи g .

Эффективный потенциал приобретает вид, изображенный на рис. 1 и задающийся формулой

$$V_{\text{eff}}(\Phi) = \frac{\Phi^2}{4\pi} \left(\ln \frac{\Phi^2}{\Phi_0^2} - 1 \right). \quad (3)$$

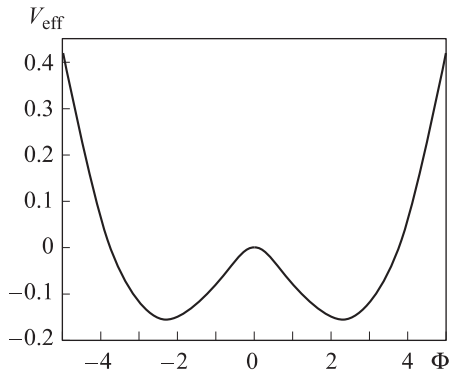


Рис. 1. График эффективного потенциала двумерной модели Гросса–Невё в случае ненарушенной лоренц-симметрии

Модель с нарушенной лоренц-инвариантностью

Двумерное евклидово действие модели с учетом члена, нарушающего лоренц-инвариантность запишется в следующем виде:

$$S[\bar{\psi}, \psi] = \int d^2x \left[\bar{\psi}(\gamma_\mu \partial_\mu - \gamma_\mu b_\mu \gamma_3) \psi - \frac{g}{2N} (\bar{\psi} \psi)^2 \right],$$

где $\mu = 1, 2$ и b_μ — постоянный вектор.

Линеаризация и интегрирование действия по фермионным степеням свободы приведет к выражению для производящего функционала в форме интеграла по полю Φ

$$Z = \int d\Phi \text{Det}(i\gamma_\mu k_\mu - \Phi - \gamma_\mu b_\mu \gamma_3) e^{-(NV/2g)\Phi^2}.$$

Следуя определению эффективного потенциала (1) и переходя в пространство Минковского с заменой $k_1 = k^1$, $k_2 = ik^0$, $b_1 = -ib^1$, $b_2 = b^0$, получим следующее выражение:

$$V_{\text{eff}} = -\frac{i}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk^0 \times \int_{-\infty}^{+\infty} dk^1 \ln \left(\Phi^2 + (k^1 + b^0)^2 - (k^0 + b^1)^2 \right) + \frac{\Phi^2}{2g} =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int dk^1 \left(\left| b^1 - \sqrt{\Phi^2 + (k^1 + b^0)^2} \right| + \left| b^1 + \sqrt{\Phi^2 + (k^1 + b^0)^2} \right| \right) + \frac{\Phi^2}{2g}.$$

После введения параметра обрезания Λ и интегрирования в симметричных пределах, находим уравнение щели

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-\Lambda/2}^{\Lambda/2} \frac{dk^1}{\sqrt{\Phi^2 + (k^1 + b^0)^2}} \times \left(\frac{\sqrt{\Phi^2 + (k^1 + b^0)^2} - |b^1|}{\left| |b^1| - \sqrt{\Phi^2 + (k^1 + b^0)^2} \right|} + 1 \right) + \frac{1}{g} = 0. \quad (4)$$

Интервал интегрирования по переменной k^1 следует из (4):

1) если $b^1 > \sqrt{\Phi^2 + (k^1 + b^0)^2}$, вклад в интеграл (4) равен нулю;

2) если $b^1 < \sqrt{\Phi^2 + (k^1 + b^0)^2}$, то в пределе $\Lambda \gg b^0$, $\Lambda \gg b^1$ имеем

$$\ln \frac{|b^1| - \sqrt{(b^1)^2 - \Phi^2}}{\sqrt{(\Lambda/2)^2 + \Phi^2} - \Lambda/2} - \frac{\pi}{g} = 0. \quad (5)$$

В этом приближении эффективный потенциал задается выражением

$$V_{\text{eff}} = \frac{\Phi^2}{2g} - \frac{1}{2\pi} \left(|b^1| \sqrt{(b^1)^2 - \Phi^2} + \frac{\Lambda^2}{4} + \frac{\Phi^2}{2} + (b^0)^2 + \Phi^2 \ln \left(|b^1| \sqrt{(b^1)^2 - \Phi^2} \right) - \Phi^2 \ln \frac{\Phi^2}{\Lambda} \right). \quad (6)$$

Разрешая уравнение (5) относительно Φ , получим

$$\bar{\Phi}^2 = 2|b^1|\Lambda \exp\left(-\frac{\pi}{g}\right) - \Lambda^2 \exp\left(-\frac{2\pi}{g}\right) = 2b^1\Phi_0 - \Phi_0^2, \quad (7)$$

где Φ_0 — решение (2) уравнения щели в лоренц-инвариантном случае.

Изучение свойств эффективного потенциала двумерной модели Гросса–Невё в случае нарушенной лоренц-инвариантности дает следующие результаты.

1. При любом b^1 уравнение щели $\frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial \Phi} = 0$ имеет тривиальное решение $\bar{\Phi} = 0$.

2. Из уравнения (5) и (7) находим

$$\sqrt{(b^1)^2 - \bar{\Phi}^2} = \Phi_0 - b^1,$$

откуда получено ограничение на величину компоненты b^1 вектора, нарушающего лоренц-инвариантность:

$$|b^1| < \Phi_0.$$

Это условие нарушения киральной симметрии в модели и возникновения массы фермионов. Рассмотрим вид эффективного потенциала (6) в пределе больших Λ (взято значение $\Lambda = 1000$) как функции $V_{\text{eff}} = V_{\text{eff}}(b^1)$, параметр b^0 положен равным нулю. При $b^1 = 10$ график напоминает вид эффективного потенциала для лоренц-инвариантного случая (3) при $b^1 = 0$, приведенный на рис. 1. Он имеет два симметричных глобальных

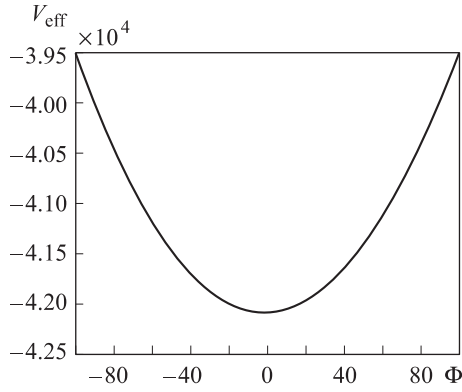


Рис. 2. График эффективного потенциала двумерной модели Гросса–Невё с нарушением лоренц-симметрии для значения параметра нарушения $b^1 = 120$, при котором наблюдается восстановление киральной симметрии

минимума при $\bar{\Phi} = \pm\Phi_0$, вычисляемых по формуле (7). Это нарушение киральной симметрии, согласно результатам статьи, имеет место, поскольку $b^1 < \Phi_0$. На рис. 2 график потенциала построен для значения параметра $b^1 = 120$, превосходящего критическое значение, т.е. $b^1 > \Phi_0$. Как следствие график имеет глобальный минимум в нуле, и киральная симметрия восстановлена.

2. Трехмерная модель Гросса–Невё

Эффективный потенциал

Действие для (2+1)-мерной модели Гросса–Невё после введения члена, нарушающего лоренц-инвариантность, выглядит следующим образом:

$$S[\bar{\Psi}, \Psi] = \int d^3x \left[\bar{\Psi} \gamma_j (\partial_j - ib_j) \Psi + \bar{\Psi} m \Psi - \frac{G}{2N} (\bar{\Psi} \Psi)^2 \right],$$

Здесь $b = (b_1; b_2; b_3)$ и $j = 1, 2, 3$, первое измерение пространственное, второе — временное, третье — дополнительное пространственное измерение; γ -матрицы выбраны выше.

После введения аксиального поля $\Phi(x)$ в прямой аналогии с тем, как это было сделано в случае двух измерений, в пределе больших N получим выражение для действия в приближении среднего поля

$$S[\bar{\Psi}, \Psi, \Phi] = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \left[\bar{\Psi}(-k) (i\gamma_j (k_j - b_j) - \tilde{\Phi}) \Psi(k) \right] + \frac{N}{2G} V \Phi^2 - NV \cdot \Phi \frac{m}{G_c}, \quad (8)$$

где V — трехмерный объем и

$$\frac{1}{G_c} = \frac{4}{(2\pi)^3} \int_0^\Lambda \frac{dE \cdot d^2p}{E^2 + p^2} = \frac{2}{(2\pi)^3} \int_0^\Lambda \frac{d^3k}{k^2} = \frac{\Lambda}{\pi^2}.$$

Последнее слагаемое в интеграле (8) возникло как результат перенормировки действия в однопетлевом приближении. Похожая процедура также была сделана в работе [11]. Вакуумное ожидание $\langle \bar{\Psi} \Psi \rangle = \frac{N}{G} (\Phi_0 - m)$ при $\Phi_0 \neq m$ становится ненулевым, и $Z(2)$ -симметрия нарушается. Вводя эффективный потенциал V_{eff} в со-

гласии с (1) и интегрируя континуальный интеграл по $\bar{\Psi}$ и Ψ , получаем выражение для V_{eff} :

$$V_{\text{eff}} = \frac{\Phi^2}{2G} - \frac{m\Phi}{G_c} - \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \ln \left((k - b)^2 + \tilde{\Phi}^2 \right), \quad (9)$$

где $\tilde{\Phi} = \Phi - m$.

Фермионный конденсат отсутствует и, как следствие $Z(2)$ -симметрия не нарушена, если эффективный потенциал имеет единственный минимум — в точке $\Phi_0 = m$; в противном случае симметрия будет нарушена.

Лоренц-инвариантный случай при $m = 0$ хорошо изучен (см., например, [3, 12]) для соответствующих выражений эффективного потенциала

$$V_{\text{eff}} = \frac{1}{6\pi} |\Phi|^3 - \frac{\Phi^2}{2} \left(\frac{1}{G_c} - \frac{1}{G} \right). \quad (10)$$

Уравнение щели $\partial V_{\text{eff}} / \partial \Phi = 0$ имеет решение

$$|\Phi_0| = 2\pi \left(\frac{1}{G_c} - \frac{1}{G} \right).$$

Как видно, симметрия восстанавливается при $G < G_c$ и нарушена, если $G > G_c$.

Вычислим эффективный потенциал для двух случаев — для чисто мнимой и чисто вещественной величины b евклидова пространства.

В случае вещественного b для (9) получим

$$V_{\text{eff}} = \frac{\Phi^2}{2G} - \frac{m\Phi}{G_c} + \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{2}{3} \Phi^3 \times \\ \times \left[\arctg \left(\frac{\Lambda + b}{\Phi} \right) + \arctg \left(\frac{\Lambda - b}{\Phi} \right) \right] - \\ - \frac{1}{8\pi^2 b} \ln \left((\Lambda + b)^2 + \Phi^2 \right) \left[\frac{1}{4} (\Phi^4 + \Lambda^4) - \frac{1}{12} b^4 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \Lambda^2 \Phi^2 + \frac{1}{2} \Lambda^2 b^2 - \frac{1}{2} b^2 \Phi^2 + \frac{2}{3} b \Lambda^3 \right] + \\ + \frac{1}{8\pi^2 b} \ln \left((\Lambda - b)^2 + \Phi^2 \right) \left[\frac{1}{4} (\Phi^4 + \Lambda^4) - \frac{1}{12} b^4 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \Lambda^2 \Phi^2 + \frac{1}{2} \Lambda^2 b^2 - \frac{1}{2} b^2 \Phi^2 - \frac{2}{3} b \Lambda^3 \right] - \\ - \frac{1}{(2\pi)^2} \left(\frac{5}{6} \Lambda \Phi^2 + \frac{17}{18} \Lambda^3 + \frac{2}{3} \Lambda b^2 \right),$$

где $b = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$, Λ — величина обрезания по импульсам.

Полагая $\Lambda \gg \Phi$, $\Lambda \gg b$, получим

$$V_{\text{eff}} = \frac{\Phi^2}{2G} - \frac{(\Phi - m)^2}{2G_c} + \frac{|\Phi - m|^3}{6\pi} - \frac{b^2}{6G_c} - \frac{m\Phi}{G_c}.$$

Отметим, что, если $m \rightarrow 0$ выражение для эффективного потенциала совпадает с (10) с точностью до аддитивной поправки $b^2/(6G_c)$.

Для случая мнимого b , полагая в выражении (9) $\Lambda \gg \Phi$, $\Lambda \gg b$ и вводя \tilde{b} — вещественный вектор с компонентами $(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3)$ и $\tilde{b} = \sqrt{\tilde{b}_1^2 + \tilde{b}_2^2 + \tilde{b}_3^2}$, получим:

1) если $|\Phi - m| > \tilde{b}$,

$$V_{\text{eff}} = \frac{\Phi^2}{2G} - \frac{(\Phi - m)^2}{2G} + \frac{|\Phi - m|^3}{6\pi} - \frac{m\Phi}{G_c};$$

2) если $|\Phi - m| < \tilde{b}$,

$$V_{\text{eff}} = \frac{\Phi^2}{2G} - \frac{(\Phi - m)^2}{2G_c} - \frac{m\Phi}{G_c} - \frac{1}{32\pi\tilde{b}} \left[\frac{2}{3}\tilde{b}^4 - 4\tilde{b}^2(\Phi - m)^2 - 2(\Phi - m)^4 \right].$$

Уравнение щели

В случае вещественного \mathbf{b} уравнение щели в пределе $\Lambda \gg \Phi$, $\Lambda \gg b$ приобретает вид

$$\frac{(\Phi - m)(|\Phi - m| - M)}{2\pi} - \frac{mM}{2\pi} = 0, \quad (11)$$

где $M = 2\pi \left(\frac{1}{G_c} - \frac{1}{G} \right)$.

Исследуем решение уравнения (11).

1. Если $M > 0$ (т. е. $G > G_c$), экстремумы потенциала расположены в точках

$$\Phi_1 = m + \frac{1}{2}M + \sqrt{\frac{1}{4}M^2 + Mm},$$

$$\Phi_2 = m - \frac{1}{2}M + \sqrt{\frac{1}{4}M^2 - Mm},$$

$$\Phi_3 = m - \frac{1}{2}M - \sqrt{\frac{1}{4}M^2 - Mm}.$$

Если $M \leq 4m$, то V_{eff} имеет один минимум в Φ_1 (рис. 3), а если $M > 4m$, то V_{eff} имеет два минимума разной глубины в точках Φ_1 и Φ_3 и максимум в точке Φ_2 (рис. 4).

2. Если $M < 0$ (или $G < G_c$), то потенциал имеет один минимум в точке

$$\Phi_4 = m + \frac{1}{2}|M| - \sqrt{\frac{1}{4}M^2 + m|M|}.$$

Таким образом, при вещественном \mathbf{b} киральная симметрия нарушена при любом значении этого параметра, а его изменение ведет только к общему сдвигу потенциала.

Если $m = 0$, эффективный потенциал определяется выражением (10), как и в лоренц-инвариантном случае, с добавочным слагаемым $-b^2/(6G_c)$. То есть, как и для лоренц-инвариантной модели, симметрия не нарушена при $G < G_c$ и нарушается при $G > G_c$.

При мнимом \mathbf{b} в выбранном приближении уравнение щели задается следующими равенствами:

1) если $|\Phi - m| > \tilde{b}$, то

$$\frac{(\Phi - m)(|\Phi - m| - M)}{2\pi} - \frac{mM}{2\pi} = 0,$$

т. е. решения уравнения щели совпадают с решениями (11) для случая реального \mathbf{b} ;

2) если $|\Phi - m| < \tilde{b}$, то

$$\frac{(\Phi - m)^3}{4\pi\tilde{b}} + \frac{(\Phi - m)\tilde{b}}{4\pi} - \frac{M}{2\pi}\Phi = 0. \quad (12)$$

Отсюда при $m = 0$ возможны следующие случаи:

а) $G < G_c$ — единственный минимум в точке $\Phi_0 = 0$, $Z(2)$ -симметрия существует;

б) $G > G_c$, $\tilde{b} < M$ — два симметричных минимума в точках $\Phi_0 = \pm M$, что нарушает симметрию (вид

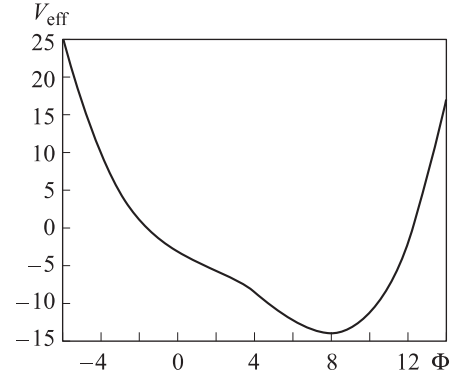


Рис. 3. График эффективного потенциала трехмерной модели Гросса-Невё с нарушенной лоренц-инвариантностью при действительном параметре нарушения b и при $G = 2$, $G_c = 1$, $m = 3$

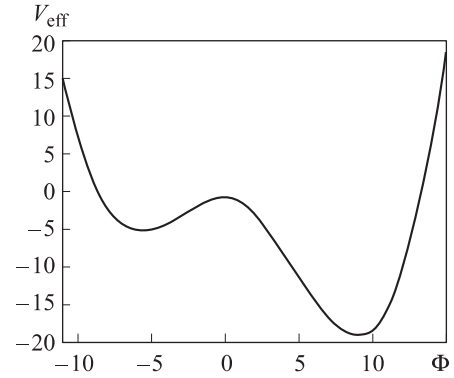


Рис. 4. График эффективного потенциала трехмерной модели Гросса-Невё с нарушенной лоренц-инвариантностью при действительном b с параметрами $G = 4$, $G_c = 0.7$, $m = 0.8$

потенциала при этом не отличается принципиально от уже приведенного на рис. 4);

в) $G > G_c$, $M < \tilde{b} < 2M$ — два симметричных минимума разной глубины при $\Phi_0 = \pm\sqrt{2M\tilde{b} - \tilde{b}^2}$, и симметрия нарушена;

г) $G > G_c$, $\tilde{b} > 2M$ — единственный минимум, и симметрия восстановлена.

В общем случае $m \neq 0$ степень уравнения щели равна трем (12). Разрешая его, получим следующие условия существования ненарушенной киральной симметрии:

$$\begin{cases} M < 0, \\ \tilde{b} > \sqrt{\frac{1}{4}M^2 + m|M|} - \frac{1}{2}|M|, \\ \tilde{b}(\tilde{b} - 2M)^3 \geq -m^2M^2, \\ \Phi_4 = \Phi_0 = m, \end{cases} \quad \begin{cases} M > 0, \\ \tilde{b} > \sqrt{\frac{1}{4}M^2 + mM} + \frac{1}{2}M, \\ \tilde{b}(\tilde{b} - 2M)^3 \geq -m^2M^2, \\ \Phi_4 = \Phi_0 = m, \end{cases} \quad (13)$$

где

$$\Phi_4 = m + \text{sign}(M) \left[A + \frac{1}{3} \cdot \frac{\tilde{b}(2M - \tilde{b})}{A} \right],$$

$$A = \left(\tilde{b}m|M| + \sqrt{\tilde{b}^2M^2m^2 - \frac{\tilde{b}^3}{27}(2M - \tilde{b})^3} \right)^{1/3}.$$

Из выражений (13) видно, что для фиксированных M и m восстановление $Z(2)$ -симметрии происходит при некоторых частных значениях \tilde{b} и не является систематическим, в отличие от безмассового случая, где симметрия существует для всех $\tilde{b} > 2M$.

3. Размерная редукция

Лоренц-инвариантная модель

Компактификация по третьему измерению накладывает условие $x_3 \in [0, \beta]$, что дает $k_3 = 2\pi n/\beta$, где $n \in \mathbb{Z}$, и уравнение щели трехмерной модели приобретает вид

$$\frac{1}{G} = \frac{2}{(2\pi)^2\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{dk_1 dk_2}{k_1^2 + k_2^2 + \left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 + \Phi^2}.$$

При вычислении этого выражения могут быть использованы два подхода — суммирование до взятия интеграла, как в работе [3], или в обратной последовательности, как сделано выше в лоренц-инвариантном случае. Используя формулу Пуассона, получим

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{4\pi} \int d(k^2) \frac{\text{ctgh}\left(\frac{\beta}{2}\sqrt{k^2 + \Phi^2}\right)}{\sqrt{k^2 + \Phi^2}},$$

где $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ берется из интервала $k \in [0, \Lambda_2]$, $\Lambda_2 \gg \Phi$ — параметр обрезания в двумерном импульсном пространстве, фигурировавший выше, с учетом чего

$$\text{sh} \frac{\beta|\Phi|}{2} = \frac{1}{2} \exp \left[\pi\beta \left(\frac{\Lambda_2}{2\pi} - \frac{1}{G} \right) \right]. \quad (14)$$

Последнее выражение в случае $\beta \rightarrow \infty$ дает соответствие между Λ_2 и $1/G_c$:

$$\frac{\Lambda_2}{2\pi} = \frac{\Lambda_3}{\pi^2} = \frac{1}{G_c}.$$

При условии $\beta\Phi \ll 1$ выражение (14) приобретает вид

$$|\Phi| = \frac{1}{\beta} \exp \left[\pi\beta \left(\frac{1}{G_c} - \frac{1}{G} \right) \right]. \quad (15)$$

При отождествлении $1/\beta$ с импульсом обрезания Λ_2 это выражение соответствует решению уравнения щели для двумерного случая (2), где константа связи g принимает вид

$$g = \left[\beta \left(\frac{1}{G} - \frac{1}{G_c} \right) \right]^{-1}. \quad (16)$$

Размерная редукция в модели с нарушенной лоренц-инвариантностью

Рассмотрим уравнение щели трехмерной модели, полагая $m = 0$ и $b_3 = 0$:

$$\frac{1}{G} = \frac{2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{(k_1 - b_1)^2 + (k_2 - b_2)^2 + k_3^2 + \Phi^2}.$$

Для установления соответствия с двумерным случаем необходимо положить

$$b_1^{(3d)} = -b_2^{(2d)} = -b^0, \quad b_2^{(3d)} = b_1^{(2d)} = -ib^1;$$

здесь $b^0, b^1 \in \text{Re}$.

Проводя компактификацию по третьему измерению, получим

$$\frac{1}{G} = \frac{2}{(2\pi)^2\beta} \sum_n K_n,$$

$$K_n = \int \frac{dk_1 dk_2}{(k_1 + b^0)^2 + (k_2 + ib^1)^2 + \left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2 + \Phi^2}.$$

После вычислений уравнение щели принимает следующий вид:

1) при $|b^1| < |\Phi|$

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{2\pi\beta} \sum_n A_n; \quad (17)$$

2) при $|b^1| > |\Phi|$

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{2\pi\beta} \left[\sum_{|n| \leq n_{\max}} B_n + \sum_{|n| > n_{\max}} A_n \right], \quad (18)$$

где

$$A_n = -\ln(f^2 + H_n^2) +$$

$$+ \ln \left(\beta \left(\frac{\Lambda}{2} - b^0 \right) + \sqrt{\beta^2 \left(\frac{\Lambda}{2} - b^0 \right)^2 + (H_n)^2 + f^2} \right) +$$

$$+ \ln \left(\beta \left(\frac{\Lambda}{2} + b^0 \right) + \sqrt{\beta^2 \left(\frac{\Lambda}{2} + b^0 \right)^2 + (H_n)^2 + f^2} \right),$$

$$B_n = \ln \left(\beta \left(\frac{\Lambda}{2} - b^0 \right) + \sqrt{\beta^2 \left(\frac{\Lambda}{2} - b^0 \right)^2 + (H_n)^2 + f^2} \right) +$$

$$+ \ln \left(\beta \left(\frac{\Lambda}{2} + b^0 \right) + \sqrt{\beta^2 \left(\frac{\Lambda}{2} + b^0 \right)^2 + (H_n)^2 + f^2} \right) -$$

$$- 2 \ln \left(\beta|b^1| + \sqrt{(\beta b^1)^2 - f^2 - H_n^2} \right)$$

и n_{\max} возникает из условия $|b^1| < \sqrt{\Phi^2 + \left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2}$, т. е. $n \leq n_{\max}$. Здесь $f = \beta\Phi$, $H_n = 2\pi n$, $\tilde{k}_1 = k_1 + b^0$ и Λ — величина обрезания по импульсу, в общем случае не равная Λ_2 .

Существующие строгие экспериментальные ограничения на величины компонент b_μ приводят к естественному соотношению $\beta|b^1| \ll 2\pi$, так что условие, приведенное выше, нарушается уже при $n = 1$, следовательно, $n_{\max} = 0$.

Отметим, что для установления соответствия в выражениях (17), (18) необходимо выбрать подходящие конечные пределы. Это связано с тем, что при нахождении уравнения щели для $b = 0$ параметром обрезания бралось Λ_2 , в то время как при $b \neq 0$ в уравнении щели пределы интегрирования брались бесконечными.

Уравнения щели в приближении $b_0 \ll \Lambda$, $f = \beta\Phi \ll \ll 1$, $|f| \ll \beta\Lambda$ имеют следующий вид:

1) если $|b^1| < |\Phi|$, то

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{\pi\beta} \left(Y - \frac{1}{2} \ln f^2 \right);$$

2) если $|b^1| > |\Phi|$, то

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{\pi\beta} \left(Y - \ln \left(\beta|b^1| + \sqrt{(\beta b^1)^2 - f^2} \right) \right),$$

где

$$Y = \sum_n^{|n| \leq N} \ln \left(\frac{\beta\Lambda}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2\Lambda^2}{4} + H_n^2} \right) - \frac{1}{2} \sum_{n \neq 0}^{|n| \leq N} \ln H_n^2 + o \left(\left(\frac{b^0}{\Lambda} \right)^2 \right) + o \left(\left(\frac{\Phi}{\Lambda} \right)^2 \right) + o(f^2).$$

Выбором предела суммирования N получим решение уравнения щели, совпадающее с лоренц-инвариантным случаем (15). Это происходит при выполнении условия

$$Y = \frac{\beta\Lambda_2}{2}.$$

Для решения уравнения щели получим (как прежде, $\Lambda_2/(2\pi) = \Lambda_3/\pi^2 = 1/G_c$, и для константы связи используем выражение (16)):

1) если $|b^1| < |\Phi|$, то

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{\pi\beta} \left(\frac{\beta\Lambda_2}{2} - \frac{1}{2} \ln f^2 \right),$$

т. е.

$$|\Phi| = \frac{1}{\beta} \exp \left[\pi\beta \left(\frac{1}{G_c} - \frac{1}{G} \right) \right] = \frac{1}{\beta} \exp \left(-\frac{\pi}{g} \right); \quad (19)$$

2) если $|b^1| > |\Phi|$, то

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{\pi\beta} \left(\frac{\beta\Lambda_2}{2} - \ln \left(\beta|b^1| + \sqrt{(\beta b^1)^2 - f^2} \right) \right),$$

т. е.

$$|\Phi|^2 = \frac{2|b^1|}{\beta} \exp \left(-\frac{\pi}{g} \right) - \frac{1}{\beta^2} \exp \left(-\frac{2\pi}{g} \right). \quad (20)$$

Видно, что (19), (20) совпадают с решением двумерного уравнения щели модели с нарушенной лоренц-ин-

вариантностью (7), где $1/\beta$ — то же обрезание по импульсам, что и в лоренц-инвариантном случае.

Заключение

В настоящей работе рассмотрены эффекты нарушения лоренц-инвариантности в двумерной и трехмерной моделях Гросса–Невё, исследовано влияние добавочного члена на симметричные свойства модели. Путем компактификации по третьему измерению устанавливается соответствие между результатами, полученными для разного числа измерений, найдены требуемые для этого соотношения между параметрами моделей.

Список литературы

1. Gross D.J., Neveu A. // Phys. Rev. D. 1974 **10**. P. 3235.
2. Antonyan E., Harvey J.A., Kutasov D. // Nucl. Phys. B. 2007. **776**. P. 93.
3. Bietenholz W., Gfeller A., Wiese U.-J. // J. High-Energy Phys. 2003. **0310**. P. 018.
4. Jackiw R., Kosteletsky V.A. // Phys. Rev. Lett. 1999. **82**. P. 18.
5. Mewes M. // Third Meeting on CPT and Lorentz Symmetry / Ed. by V. A. Kosteletsky. Singapore, 2005.
6. Adam T., Agajonova N., Aleksandrov A. et al. // ArXiv: hep-ex/1109.4897.
7. Abbasi R., Abdou Y., Abu-Zayyad T. et al. // ArXiv: astro-ph/1101.1692.
8. Christiansen H., Petkou A., Silva Neto M., Vlachos N. // Phys. Rev. D. 2000. **62**. P. 025018.
9. Minakata H., Chodos A. // ArXiv: hep-th/9709179v1.
10. Ebert D., Gubina N.V., Klimenko K.G. et al. // Phys. Rev. D. 2011. **84**. P. 025004.
11. Rosenstein B., Warr B.J., Park S.H. // Phys. Rev. D. 1989. **39**. P. 10.
12. Vshivtsev A.S., Magnitsky B.V., Zhukovsky V.Ch., Klimenko K.G. // Phys. Elem. Part. and Atom. Nucl. 1998. **29**. P. 5.

Fermions dimensional reduction in Gross–Neveu model under the Lorentz invariance violation conditions

N. V. Gubina^a, V. Ch. Zhukovsky^b, S. G. Kurbanov

Department of Theoretical Physics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.

E-mail: ^agubinanadya@gmail.com, ^bvlchzh@gmail.com.

The Gross–Neveu model with Lorentz-violating term b_μ is studied. The effective potential V_{eff} with Lorentz-violating term b_μ in 3d and 2d cases is calculated. The gap equation is obtained and the influence of the presence of an additional term b_μ on the symmetry of the theory are examined. Also, dimensional reduction both in the presence or absence of b_μ from 3D to 2D is done.

Key words: Gross–Neveu, violation of Lorentz invariance, effective potential, dimensional reduction, compactification.

PACS: 11.30.Cp, 11.30.Rd, 03.70.+k.

Received 16 November 2011.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 2(2012).

Сведения об авторах

1. Губина Надежда Валерьевна — аспирантка; тел.: (495) 939-31-77, e-mail: gubinanadya@gmail.com.
2. Жуковский Владимир Чеславович — докт. физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939-31-77, e-mail: vlchzh@gmail.com.
3. Курбанов Сердар Гельдимуратович — аспирант; тел.: (495) 939-31-77, e-mail: serdar.kurbanov@gmail.com.