Расчет параметра квадрупольного обменного взаимодействия в системе неупорядоченных магнитных моментов

М. К. Бахнян[a], А. М. Савченко[b], Б. И. Садовников[c]

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра квантовой статистики и теории поля. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
E-mail: [a] bakhnyan@gmail.com, [b] a.m.savchenko@gmail.com, [c] sadovnikov@phys.msu.ru

Статья поступила 11.12.2011, подписана в печать 19.12.2011

В рамках модели обменного взаимодействия вычислены параметры квадрупольного обменного и электрон-фононного взаимодействий. Показано, что магнитная неупорядоченная подсистема играет определяющую роль в формировании эффективного обменного взаимодействия между электронами.

Ключевые слова: потенциал обменного взаимодействия, контурное представление, функция Грина.
УДК: 538.91. PACS: 71.10.–w.

В настоящей работе рассматривается магнитная система, в которой магнитные моменты не являются локализованными и распределены в пространстве хаотично. Такая магнитная система формируется спинами нормальных электронов, находящихся в делокализованных (d, f)-состояниях и взаимодействует с электронами, находящимися в s-состояниях, которые определяют высокочастотные и кинетические свойства упорядоченной системы. Таким образом, мы будем рассматривать модель, в которой взаимодействующие s-электроны обтекают кристаллическую решетку и неупорядоченную систему спинов.

Для того чтобы записать гамильтониан такой системы, необходимо правильно задать взаимодействие электронной подсистемы с неупорядоченной в данном случае магнитной подсистемой. Взаимодействие электронной подсистемы с неупорядоченной магнитной подсистемой обычно описывается гамильтонианом типа s–$d(f)$ обменной модели:

$$\widehat{H}_{s-d(f)} = -\sum_{\boldsymbol{R}_e, \boldsymbol{r}} J(\boldsymbol{R}_e, \boldsymbol{r}) S_{\boldsymbol{R}_e} \sigma_{\boldsymbol{r}},$$

где $S_{\boldsymbol{R}_e}$ и $\sigma_{\boldsymbol{r}}$ — операторы спина $d(f)$ и s-электронов соответственно.

Обменный интеграл $J(\boldsymbol{R}_e, \boldsymbol{r})$ является случайной функцией координат узлов решетки $\boldsymbol{R}_e$. Однако основной недостаток такого подхода состоит еще и в том, что спины $d(f)$-электронов предполагаются локализованными на узлах. Кроме того, гамильтониан $\widehat{H}_{s-d(f)}$ не учитывает реальной группы симметрии упорядоченной системы.

Поскольку магнитная подсистема предполагается неупорядоченной, то, следовательно, ее энергия должна быть инвариантна относительно преобразований группы вращений в спиновом пространстве $SO(3)$. Кроме того, волновые функции s-электронов обладают $SU(2)$-симметрией, так как выражаются через матрицы Паули, которые являются генераторами группы $SU(2)$, а так как $SO(3) = SU(2)/Z_2$ [1], где Z_2 — группа вычетов по модулю два или группа центра, то это означает, что $SU(2)$-симметрия является фундаментальной для рассматриваемой нами системы, что необходимо учитывать при построении гамильтониана.

Поскольку природа спиновой подсистемы электромагнитная, то ее можно описать с помощью введения эффективного потенциала A^α_ν электромагнитного поля, который преобразуется как в координатном, так и в спиновом пространстве.

Тогда можно записать тензор напряженности эффективного электромагнитного поля неупорядоченной системы спинов, который будет выглядеть следующим образом:

$$F^\alpha_{\mu\nu} = \nabla_\nu A^\alpha_\mu - \nabla_\mu A^\alpha_\nu + g e^{\alpha\beta\gamma} A^\beta_\mu A^\gamma_\nu. \qquad (1)$$

Здесь g — константа связи. Надо отметить, что при таком рассмотрении неупорядоченной системы спинов выражение (2) совпадает с тензором поля Янга–Миллса [2].

Таким образом, гамильтониан рассматриваемой модели можно представить в следующем виде [3–5]:

$$H = H_{ee} + H_{\text{ph}} + H_{aa} + H_{e-\text{ph}}, \qquad (2)$$

где

$$H_{ee} = \frac{1}{2}\int d\boldsymbol{x}\, \psi^+_\alpha(\boldsymbol{x}) \widehat{D}_{\alpha\nu k} \widehat{D}_{\beta\nu k} \psi_\beta(\boldsymbol{x}) + \\ + \frac{1}{2}\int d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{x}' \psi^+_\alpha(\boldsymbol{x}) \psi^+_\beta(\boldsymbol{x}') V(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \psi_\beta(\boldsymbol{x}') \psi_\alpha(\boldsymbol{x})$$

— гамильтониан электронной подсистемы,

$$H_{\text{ph}} = \frac{1}{2}\int d\boldsymbol{x} \Bigg[\sum_\kappa \frac{p^2_\kappa}{\rho_\kappa} + \\ + \sum_{\alpha,\beta,\nu,\nu',\kappa,\kappa'} (\lambda_{\alpha\beta\nu\nu'\kappa\kappa'} u_{\alpha\nu\kappa} u_{\beta\nu'\kappa'} + \mu_{\alpha\beta\nu\nu'\kappa\kappa'} \Omega_{\alpha\nu\kappa} \Omega_{\beta\nu'\kappa'}) \Bigg]$$

— фононный гамильтониан,

$$H_{aa} = \frac{1}{2}\int d\boldsymbol{x} \left[\left(E^\alpha_\nu\right)^2 + \left(C^\alpha_\nu\right)^2 \right]$$

— гамильтониан неупорядоченной системы спинов,

$$H_{e-\text{ph}} = \int d\boldsymbol{x}\, g_{\text{ph}}(\boldsymbol{x}) \phi(\boldsymbol{x}) \psi^+_\alpha(\boldsymbol{x}) \psi_\alpha(\boldsymbol{x})$$

— гамильтониан взаимодействия электронной подсистемы с кристаллической решеткой.

Здесь $\psi_\alpha(\boldsymbol{x})$, $\psi^+_\alpha(\boldsymbol{x})$ — электронные операторы; $\widehat{D}_\nu = \nabla_\nu - \frac{i}{2} g_1 \widehat{\tau}^\gamma \widehat{A}^\gamma_\nu$; $\widehat{A}^\gamma_\nu = A^\gamma_\nu + \frac{g_2}{g_1}\Omega_{\gamma\nu}$; $V(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$ — кулоновский потенциал; $\lambda'_{\alpha\beta\nu\nu'\kappa\kappa}$, $\mu_{\alpha\beta\nu\nu'\kappa\kappa'}$ — тензоры упругих констант; $u_{\alpha\nu\kappa} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_{\alpha\kappa}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial u_{\nu\kappa}}{\partial x_\alpha}\right)$, $\Omega_{\alpha\nu\kappa} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_{\alpha\kappa}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial u_{\nu\kappa}}{\partial x_\alpha}\right)$ — симметричная и антисимметричная части тензора деформаций; $g_{\mathrm{ph}}(\boldsymbol{x})\phi(\boldsymbol{x})$ — потенциал решетки.

Далее можно выписать уравнения для электронной и фононной функции Грина, а также для оператора $\widehat{A}_\nu = \left(\widehat{\tau}^\gamma \widehat{A}^\gamma_\nu\right)$. Однако поскольку система является сильно неоднородной, то анализ этих уравнений оказывается весьма затруднительным и из них можно получить решения только в пределе слабой связи с помощью стандартной теории возмущений. Если же рассматривать взаимодействие электронной подсистемы с магнитной подсистемой и кристаллической решеткой в приближении сильной связи, то вышеупомянутый подход оказывается неэффективным, так как малый параметр в данном случае отсутствует.

Поэтому для описания взаимодействий в приближении сильной связи мы воспользуемся контурным представлением операторов, т. е. будем рассматривать нашу систему как систему «взаимодействующих» контуров, на которых определены операторы $\widehat{A}_\nu$, $\widehat{\psi}^\alpha(\boldsymbol{x})$, $\widehat{U}_{\alpha\nu\kappa}$, $\widehat{\Omega}_{\gamma\kappa}$. Они будут зависеть не только от обычных переменных координат и времени, но еще и от некоторой контурной переменной Γ. Перейдем к их построению. Введем полевой оператор следующего вида [6–8]:

$$\widehat{B}(\Gamma) = \frac{1}{N}\widehat{T}\exp\left\{\oint\limits_{\Gamma_\kappa} dx_\nu \widehat{A}_\nu\right\},$$

где $\widehat{A}_\nu = \frac{i}{2} g_1 \sum\limits_{\gamma=1}^{N^2-1}\left(\widehat{\tau}^\gamma \widehat{A}^\gamma_\nu\right)$, $\widehat{T}$ — хронологический оператор.

Тогда электронные операторы в контурном представлении будут иметь вид

$$\widehat{\psi}^\alpha(\boldsymbol{x}|\Gamma) = \widehat{B}(\Gamma)\widehat{\psi}^\alpha(\boldsymbol{x}), \quad \widehat{\psi}^{\alpha+}(\boldsymbol{x}|\Gamma) = \widehat{\psi}^{\alpha+}(\boldsymbol{x})\widehat{B}^+(\Gamma). \quad (3)$$

Соотношения антикоммутаций для $\widehat{\psi}^\alpha(\boldsymbol{x}|\Gamma)$, $\widehat{\psi}^{\alpha+}(\boldsymbol{x}|\Gamma)$ могут быть легко получены:

$$\left\{\widehat{\psi}^\alpha(\boldsymbol{x}|\Gamma_{\boldsymbol{x}}), \widehat{\psi}^{\beta+}(\boldsymbol{x}'|\Gamma_{\boldsymbol{x}'})\right\} = \delta_{\alpha\beta}\oint\limits_{\Gamma} e_\nu\, dx_\nu\, \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\frac{1}{N}\widehat{B}(\Gamma_{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'}),$$

$$\left\{\widehat{\psi}^\alpha(\boldsymbol{x}|\Gamma_{\boldsymbol{x}}), \widehat{\psi}^{\beta}(\boldsymbol{x}'|\Gamma_{\boldsymbol{x}'})\right\} = \left\{\widehat{\psi}^{\alpha+}(\boldsymbol{x}|\Gamma_{\boldsymbol{x}}), \widehat{\psi}^{\beta+}(\boldsymbol{x}'|\Gamma_{\boldsymbol{x}'})\right\} = 0.$$

Учитывая выражения для оператора смещения узла кристаллической решетки через операторы рождения и уничтожения фононов с импульсом $\boldsymbol{q}$, $\widehat{b}^+_{\boldsymbol{q}}$, $b_{\boldsymbol{q}}$

$$u^\alpha_\kappa(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{q}} \frac{e^\alpha_\kappa}{\sqrt{2\rho_\kappa\omega_\kappa(\boldsymbol{q})}}\left(\widehat{b}_{\boldsymbol{q}\alpha\kappa}e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{x}} + \widehat{b}^+_{\boldsymbol{q}\alpha\kappa}e^{-i\boldsymbol{q}\boldsymbol{x}}\right), \quad (4)$$

можно определить операторы

$$\widehat{u}^\alpha_{\nu\kappa}(\boldsymbol{x}) = i\sum_{\boldsymbol{q}}\left[\frac{1}{\sqrt{2\rho_\kappa\omega_\kappa(\boldsymbol{q})}}\left(e_{\alpha\kappa}q_\nu\widehat{b}_{\boldsymbol{q}\alpha\kappa} + e_{\nu\kappa}q_\alpha\widehat{b}_{\boldsymbol{q}\nu\kappa}\right)e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{x}} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\sqrt{2\rho_\kappa\omega_\kappa(\boldsymbol{q})}}\left(e_{\alpha\kappa}q_\nu\widehat{b}^+_{\boldsymbol{q}\alpha\kappa} + e_{\nu\kappa}q_\alpha\widehat{b}^+_{\boldsymbol{q}\nu\kappa}\right)e^{-i\boldsymbol{q}\boldsymbol{x}}\right], \quad (5)$$

$$\widehat{\Omega}^\alpha_{\nu\kappa} = i\sum_{\boldsymbol{q}}\left[\frac{1}{\sqrt{2\rho_\kappa\omega_\kappa(\boldsymbol{q})}}\left(e_{\alpha\kappa}q_\nu\widehat{b}_{\boldsymbol{q}\alpha\kappa} - e_{\nu\kappa}q_\alpha\widehat{b}_{\boldsymbol{q}\nu\kappa}\right)e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{x}} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\sqrt{2\rho_\kappa\omega_\kappa(\boldsymbol{q})}}\left(e_{\alpha\kappa}q_\nu\widehat{b}^+_{\boldsymbol{q}\alpha\kappa} - e_{\nu\kappa}q_\alpha\widehat{b}^+_{\boldsymbol{q}\nu\kappa}\right)e^{-i\boldsymbol{q}\boldsymbol{x}}\right]. \quad (6)$$

Тогда по аналогии с (3) можно ввести контурные операторы для фононов

$$\widehat{b}_{\alpha\kappa}(\boldsymbol{x}|\Gamma) = \widehat{B}(\Gamma_{\boldsymbol{x}})b_{\alpha\kappa}(\boldsymbol{x}),$$
$$\widehat{b}^+_{\alpha\kappa}(\boldsymbol{x}|\Gamma) = b^+_{\alpha\kappa}(\boldsymbol{x})\widehat{B}^+(\Gamma_{\boldsymbol{x}}),$$
$$\widehat{b}_{\alpha\kappa} = \frac{1}{N}\widehat{T}\sum_{\boldsymbol{q}}\exp\left\{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{x} + \oint\limits_{\Gamma_{\boldsymbol{x}}} dx_\nu\widehat{A}_\nu\right\}b_{\boldsymbol{q}\alpha\kappa}, \quad (7)$$
$$\widehat{b}^+_{\alpha\kappa} = \frac{1}{N}\widehat{T}\sum_{\boldsymbol{q}} b^+_{\boldsymbol{q}\alpha\kappa}\exp\left\{-i\boldsymbol{q}\boldsymbol{x} + \oint\limits_{\Gamma_{\boldsymbol{x}}} dx_\nu\widehat{A}^+_\nu\right\}.$$

Соответствующие соотношения коммутаций будут иметь вид

$$\left[\widehat{b}_{\alpha\kappa}(\boldsymbol{x}|\Gamma_{\boldsymbol{x}}), \widehat{b}^+_{\beta\kappa'}(\boldsymbol{x}'|\Gamma_{\boldsymbol{x}'})\right] = \delta_{\alpha\beta}\delta_{\kappa\kappa'}\oint\limits_{\Gamma} e_\nu\, dx_\nu\, \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\frac{1}{N}\widehat{B}(\Gamma_{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'}),$$

$$\left[\widehat{b}_{\alpha\kappa}(\boldsymbol{x}|\Gamma_{\boldsymbol{x}}), \widehat{b}_{\beta\kappa'}(\boldsymbol{x}'|\Gamma_{\boldsymbol{x}'})\right] = \left[\widehat{b}^+_{\alpha\kappa}(\boldsymbol{x}|\Gamma_{\boldsymbol{x}}), \widehat{b}^+_{\alpha\kappa'}(\boldsymbol{x}'|\Gamma_{\boldsymbol{x}'})\right] = 0.$$

Так как фононный оператор коммутирует с оператором поля $\widehat{A}_\nu$, то в формулах (7) интеграл $\oint\limits_{\Gamma_{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'}} dx_\nu\widehat{A}_\nu$ распадается на сумму двух интегралов $\oint\limits_{\Gamma_{\boldsymbol{x}'}} dx_\nu\widehat{\Omega}_\nu$ и $\oint\limits_{\Gamma_{\boldsymbol{x}'}} dx_\nu\widehat{\Omega}_\nu$, собственные значения которых отличны от нуля, если контуры $\Gamma_{\boldsymbol{x}}$, $\Gamma_{\boldsymbol{x}'}$ охватывают особенность поля Ω^α_ν (например, пластическую дисклинацию, так как $\oint\limits_{\Gamma} dx_\nu\,\Omega^\alpha_\nu$ — полный вектор пластического поворота на контуре Γ).

Если в системе отсутствуют крупномасштабные пластические дисклинации, то $\oint\limits_{\Gamma} dx_\nu\,\Omega^\alpha_\nu \to 0$ и соотношения для фононных операторов упрощаются:

$$\left[\widehat{b}_{\alpha\kappa}(\boldsymbol{x}|\Gamma_{\boldsymbol{x}}), \widehat{b}^+_{\beta\kappa'}(\boldsymbol{x}'|\Gamma_{\boldsymbol{x}'})\right] = \delta_{\alpha\beta}\delta_{\kappa\kappa'}\frac{1}{N^2}\widehat{\tau}^0\oint\limits_{\Gamma} e_\nu\, dx_\nu\, \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'),$$

$$\left[\widehat{b}_{\alpha\kappa}(\boldsymbol{x}|\Gamma_{\boldsymbol{x}}), \widehat{b}_{\beta\kappa'}(\boldsymbol{x}'|\Gamma_{\boldsymbol{x}'})\right] = \left[\widehat{b}^+_{\alpha\kappa}(\boldsymbol{x}|\Gamma_{\boldsymbol{x}}), \widehat{b}^+_{\alpha\kappa'}(\boldsymbol{x}'|\Gamma_{\boldsymbol{x}'})\right] = 0.$$

После того как мы определили соотношения коммутаций для электронных и фононных операторов в контурном представлении, введем «одночастичные» функции Грина для электронов и фононов. В дальнейшем мы будем опускать вниз спиновые индексы электронных операторов:

$$G_{\alpha\beta}(\boldsymbol{x},\tau|\Gamma|\boldsymbol{x}',\tau') = \left\langle\widehat{T}\widehat{\Psi}_\alpha(\boldsymbol{x},\tau)\,\mathrm{Tr}\,\widehat{B}(\Gamma)\widehat{\Psi}^+_\beta(\boldsymbol{x}',\tau')\right\rangle,$$

$$D_{\alpha\beta xx'}(\boldsymbol{x},\tau|\Gamma|\boldsymbol{x}',\tau') = \left\langle\widehat{T}b_{\alpha x}(\boldsymbol{x},\tau)\,\mathrm{Tr}\,\widehat{B}(\Gamma)\widehat{b}^+_{\beta x'}(\boldsymbol{x}',\tau')\right\rangle,$$

$$F_{\alpha\beta}(\boldsymbol{x},\tau|\Gamma|\boldsymbol{x}',\tau') = \left\langle\widehat{T}\widehat{\Psi}_\alpha(\boldsymbol{x},\tau)\,\mathrm{Tr}\,\widehat{B}(\Gamma)\widehat{\Psi}_\beta(\boldsymbol{x}',\tau')\right\rangle.$$

Здесь $\tau = it$ — мнимое время.

Уравнения движения для функций Грина и для полевого оператора выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}G_{\alpha\beta}(\boldsymbol{x},\tau|\Gamma|\boldsymbol{x}',\tau') = \delta_{\alpha\beta}\oint\limits_{\Gamma} e_\nu\, dx_\nu\, \widetilde{\delta}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\langle \mathrm{Tr}\, B(\Gamma)\rangle + \\ + \left\langle \widehat{T}\left[\widehat{H}_\Gamma, \widehat{\psi}_\alpha(\boldsymbol{x},\tau)\right] \overleftrightarrow{\mathrm{Tr}}\, \widehat{B}(\Gamma)\widehat{\psi}^+_\beta(\boldsymbol{x}',\tau')\right\rangle, \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}D_{\alpha\beta\kappa\kappa'}(\boldsymbol{x},\tau|\Gamma|\boldsymbol{x}',\tau') = \\ = \delta_{\alpha\beta}\delta_{\kappa\kappa'}\oint\limits_{\Gamma} e_\nu\, dx_\nu\, \widetilde{\delta}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\langle \mathrm{Tr}\, B(\Gamma)\rangle + \\ + \left\langle \widehat{T}\left[\widehat{H}_\Gamma, \widehat{b}_{\alpha\kappa}(\boldsymbol{x},\tau)\right] \overleftrightarrow{\mathrm{Tr}}\, \widehat{B}(\Gamma)\widehat{b}^+_{\beta\kappa}(\boldsymbol{x}',\tau')\right\rangle, \tag{9}$$

$$\left\langle \mathrm{Tr}\, \widehat{D}_\mu \widehat{F}_{\mu\nu}\widehat{B}(\Gamma)\right\rangle = \left\langle \mathrm{Tr}\, \widehat{J}_\nu(\Gamma)\widehat{B}(\Gamma)\right\rangle. \tag{10}$$

Оператор $\overleftrightarrow{\mathrm{Tr}}$ действует на все операторы, стоящие под знаком усреднения, $\widehat{J}_\nu(\Gamma)$ — оператор тока. Отметим, что под $\widetilde{\delta}$ понимается обобщенная δ-функция на контуре Γ, введенная следующим образом:

$$\widetilde{\delta}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') = \oint\limits_{\Gamma_{x'',\tau''}\in\Gamma_{x,\tau,x',\tau'}} dx''_\nu\, e_\nu \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\delta(\boldsymbol{x}''-\boldsymbol{x}') + \\ + \left\langle \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\widehat{T}\cdots\frac{\partial}{\partial\tau'}\overleftrightarrow{\mathrm{Tr}}\,\widehat{A}_\nu(\boldsymbol{x},\tau')\cdots\right\rangle.$$

В уравнениях (8)–(10) гамильтониан исследуемой системы записан в контурном представлении и получается из исходного гамильтониана следующим образом. Запишем эффективный гамильтониан (2) с учетом формул (4)–(6) в контурном представлении:

$$H_\Gamma = N\,\mathrm{Tr}\int\limits_{x\in\Gamma} d\boldsymbol{x}\Bigg\{\widehat{B}(\Gamma)\Bigg\{\frac{1}{2}\widehat{\Psi}^+_{\alpha'}(\boldsymbol{x})\widehat{\widetilde{D}}^2_v\widehat{\Psi}_{\alpha'}(\boldsymbol{x}) + \\ + \frac{1}{2}\left[\widehat{\Psi}^t_{\alpha'}(\boldsymbol{x})\widehat{\Delta}^+_{\alpha'\gamma'}(\boldsymbol{x})\widehat{\Psi}_{\gamma'}(\boldsymbol{x}) + \widehat{\Psi}^+_{\alpha'}(\boldsymbol{x})\widehat{\Delta}_{\alpha'\gamma'}(\boldsymbol{x})\widehat{\Psi}^{+t}_{\gamma'}(\boldsymbol{x})\right] + \\ + \sum_{\alpha,\kappa}\widehat{b}^+_{\alpha\kappa}\widehat{\xi}_\kappa(\boldsymbol{x})\widehat{b}_{\alpha\kappa}(\boldsymbol{x}) + \frac{i}{\sqrt{2}}\sum_{\alpha,\kappa} g_{\mathrm{ph}}(\boldsymbol{x})e_{\alpha\kappa}\widehat{\eta}_\kappa(\boldsymbol{x})\times \\ \times\left[\widehat{b}_{\alpha\kappa}(\boldsymbol{x}) - \widehat{b}^+_{\alpha\kappa}(\boldsymbol{x})\right]\widehat{\Psi}^+_{\alpha'}(\boldsymbol{x})\widehat{\Psi}_{\alpha'}(\boldsymbol{x})\Bigg\}\widehat{B}^+(\Gamma) + \\ + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{\delta s_{\mu\nu}}\right)^2 + \widehat{I}(\Gamma)\right]\widehat{B}(\Gamma)\Bigg\} + \\ + N\,\mathrm{Tr}\int\limits_{x,x'\in\Gamma} d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{x}'\,\widehat{B}(\Gamma)\widehat{\Psi}^+_{\alpha'}(\boldsymbol{x})\times \\ \times\mathrm{Tr}\left[\widehat{\Psi}^+_{\beta'}(\boldsymbol{x}')V(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\widehat{\Psi}_{\beta'}(\boldsymbol{x}')\right]\widehat{\Psi}_{\alpha'}(\boldsymbol{x})\widehat{B}^+(\Gamma),$$

В данном выражении $\widehat{\widetilde{D}}^2_v = -\frac{\hbar^2}{\mu_e}\widehat{\widetilde{D}}^+_v\widehat{\widetilde{D}}^-_v$, $\widehat{\widetilde{D}}^\pm_v = \widehat{D}^\pm_v i \times \sqrt{2\mu_e\mu/\hbar^2}$; $\delta s_{\mu\nu}$ — безразмерное приращение площади контура Γ; $\widehat{I}(\Gamma)$ — неопределенный множитель Лагранжа; $\widehat{b}_{\alpha\kappa}(\boldsymbol{x})$, $\widehat{b}^+_{\alpha\kappa}$ — фононные операторы в координатном представлении; κ — индекс соответствующей выделенной элементарной ячейки кристалла; операторы $\widehat{\xi}_\kappa(\boldsymbol{x})$, $\widehat{\eta}_\kappa(\boldsymbol{x})$ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\int d\boldsymbol{x}'\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\widehat{\xi}_\kappa(\boldsymbol{x}')\exp[i\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')] = \omega_{\kappa\,\mathrm{ph}}(\boldsymbol{p}),$$

$$\int d\boldsymbol{x}'\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\widehat{\eta}_x(\boldsymbol{x}')\exp[i\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')] = [\omega_{x\,\mathrm{ph}}(\boldsymbol{p})]^{1/2}$$

где $\omega_{\kappa\,\mathrm{ph}}$ — фононные частоты, $\widehat{\Delta}_{\alpha'\gamma'}$ определяет параметр порядка.

Расцепляя многочастичные средние, производя варьирование соответствующего функционала по $I(\Gamma)$ и используя некоторые упрощения, получаем следующие уравнения для функции Грина и полевого оператора:

$$\left(\frac{\delta}{\delta c_{\tau\tau'}} + \frac{\partial(\omega)}{\partial\tau}\right)G_{\alpha\beta}(\boldsymbol{x},\tau|\Gamma|\boldsymbol{x}',\tau') - \\ - \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left[\widehat{\widetilde{D}}^2_v\widehat{G}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{x},\tau|\Gamma|\boldsymbol{x}',\tau')\right] + \\ + \left[\Delta_{\alpha\gamma}(\boldsymbol{x},\tau|\Gamma|) - \Delta^t_{\alpha\gamma}(\boldsymbol{x},\tau|\Gamma|)\right]F^*_{\gamma\beta}(\boldsymbol{x},\tau|\Gamma|\boldsymbol{x}',\tau') - \\ = \delta_{\alpha\beta}\oint\limits_{\Gamma} e_{v'}\, dx'_{v'}\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\left\langle \mathrm{Tr}\,\widehat{B}(\Gamma)\right\rangle = \\ - \frac{1}{2}N^2 f_3(N)\int\limits_{x'',\tau''\in\Gamma} d\boldsymbol{x}''\, g_{\mathrm{ph}}(\boldsymbol{x})g_{\mathrm{ph}}(vecx')\sum_{\alpha'}\eta(\boldsymbol{x})\eta(\boldsymbol{x}'')\times \\ \times\left[D_{\alpha'\alpha'}(\boldsymbol{x},\tau|\Gamma|\boldsymbol{x}'',\tau'') + D^*_{\alpha'\alpha'}(\boldsymbol{x},\tau|\Gamma|\boldsymbol{x}',\tau')\right]\times \\ \times\Big[G_{\alpha\gamma}(\boldsymbol{x},\tau|\Gamma|\boldsymbol{x}'',\tau'')G_{\gamma\beta}(\boldsymbol{x}'',\tau''|\Gamma|\boldsymbol{x}',\tau') - \\ - F_{\alpha\gamma}(\boldsymbol{x},\tau|\Gamma|\boldsymbol{x}'',\tau'')F^*_{\gamma\beta}(\boldsymbol{x}'',\tau''|\Gamma|\boldsymbol{x}',\tau')\Big] + \\ + Nf_2(N)\int\limits_{x'',\tau''\in\Gamma} d\boldsymbol{x}''\, V(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\times \\ \times\Big[G_{\alpha\gamma}(\boldsymbol{x},\tau|\Gamma|\boldsymbol{x}'',\tau'')G_{\gamma\beta}(\boldsymbol{x}'',\tau''|\Gamma|\boldsymbol{x}',\tau') - \\ - F_{\alpha\gamma}(\boldsymbol{x},\tau|\Gamma|\boldsymbol{x}'',\tau'')F^*_{\gamma\beta}(\boldsymbol{x}'',\tau''|\Gamma|\boldsymbol{x}',\tau')\Big], \tag{11}$$

$$\left(\frac{\delta}{\delta c_{\tau\tau'}} + \frac{\partial(\omega)}{\partial\tau}\right)F^*_{\alpha\beta}(\boldsymbol{x},\tau|\Gamma|\boldsymbol{x}',\tau') + \\ + \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left[\widehat{\widetilde{D}}^2_v F^*_{\alpha\beta}(\boldsymbol{x},\tau|\Gamma|\boldsymbol{x}',\tau')\right] + \Big[\Delta^*_{\alpha\gamma}(\boldsymbol{x},\tau|\Gamma|) - \\ - \Delta^{*t}_{\alpha\gamma}(\boldsymbol{x},\tau|\Gamma|)\Big]G_{\gamma\beta}(\boldsymbol{x},\tau|\Gamma|\boldsymbol{x}',\tau') = \\ = \frac{1}{2}N^2 f_3(N)\int\limits_{x'',\tau''\in\Gamma} d\boldsymbol{x}''\, g_{\mathrm{ph}}(\boldsymbol{x})g_{\mathrm{ph}}(\boldsymbol{x}'')\sum_{\alpha'}\widehat{\eta}(\boldsymbol{x})\widehat{\eta}(\boldsymbol{x}'')\times \\ \times\left[D_{\alpha'\alpha'}(\boldsymbol{x},\tau|\Gamma|\boldsymbol{x}'',\tau'') + D^*_{\alpha'\alpha'}(\boldsymbol{x},\tau|\Gamma|\boldsymbol{x}'',\tau'')\right]\times \\ \times\Big[F^*_{\alpha\gamma}(\boldsymbol{x},\tau|\Gamma|\boldsymbol{x}'',\tau'')G_{\gamma\beta}(\boldsymbol{x}'',\tau''|\Gamma|\boldsymbol{x}',\tau') - \\ - G^*_{\alpha\gamma}(\boldsymbol{x},\tau|\Gamma|\boldsymbol{x}'',\tau'')F^*_{\gamma\beta}(\boldsymbol{x}'',\tau''|\Gamma|\boldsymbol{x}',\tau')\Big] - \\ - Nf_2(N)\int\limits_{x'',\tau''\in\Gamma} dx''\, V(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\times \\ \times\Big[F^*_{\alpha\gamma}(\boldsymbol{x},\tau|\Gamma|\boldsymbol{x}'',\tau'')G_{\gamma\beta}(\boldsymbol{x}'',\tau''|\Gamma|\boldsymbol{x}',\tau') - \\ - G^*_{\alpha\gamma}(\boldsymbol{x},\tau|\Gamma|\boldsymbol{x}'',\tau'')F^*_{\gamma\beta}(\boldsymbol{x}'',\tau''|\Gamma|\boldsymbol{x}',\tau')\Big], \tag{12}$$

$$\left(\frac{\delta}{\delta c_{\tau\tau'}}+\frac{\partial(\omega)}{\partial\tau}+\widehat{\xi}(\boldsymbol{x})\right)D_{\alpha\beta}(\boldsymbol{x},\tau|\Gamma|\boldsymbol{x}',\tau')=$$
$$=\delta_{\alpha\beta}\oint\limits_{\Gamma}e_{v'}\,dx'_{v'}\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\left\langle\operatorname{Tr}\widehat{B}(\Gamma)\right\rangle-$$
$$-\frac{1}{2}N^2f_3(N)\int\limits_{x'',\tau''\in\Gamma}d\boldsymbol{x}''\,g_{\rm ph}(\boldsymbol{x})g_{\rm ph}(\boldsymbol{x}')\widehat{\eta}(\boldsymbol{x})\times$$
$$\times\Big[G_{\gamma\delta}(\boldsymbol{x},\tau|\Gamma|\boldsymbol{x}'',\tau'')G_{\delta\gamma}(\boldsymbol{x}'',\tau''|\Gamma|\boldsymbol{x},\tau)-$$
$$-F_{\gamma\delta}(\boldsymbol{x},\tau|\Gamma|\boldsymbol{x}'',\tau'')F^*_{\delta\gamma}(\boldsymbol{x}'',\tau''|\Gamma|\boldsymbol{x},\tau)\Big]\times$$
$$\times\widehat{\eta}(\boldsymbol{x}'')D_{\alpha\beta}(\boldsymbol{x}'',\tau''|\Gamma|\boldsymbol{x}',\tau'),\quad(13)$$

$$\nabla_\mu\frac{\delta}{\delta\delta_{\mu v}}\langle\operatorname{Tr}\widehat{B}(\Gamma)\rangle+\frac{i}{4}f_1N^2\lim_{\substack{\boldsymbol{x},\tau\to\boldsymbol{x}',\tau'\\ \varepsilon\to0}}\int\limits_{x\in\Gamma_{\boldsymbol{x},\tau;\boldsymbol{x}',\tau'}}\frac{D\kappa(\boldsymbol{x}'',\tau'')}{2\pi c_\kappa}\times$$
$$\times(\nabla_{\boldsymbol{x}v}-\nabla_{v\boldsymbol{x}})\sum_{\gamma=1}^{2}G_{\gamma\gamma\kappa}(\boldsymbol{x},\tau|\varepsilon|\boldsymbol{x}',\tau')\exp\left(\int\limits_{\kappa}dx''_v\,p_{0v}[\kappa]\right)\times$$
$$\times[\langle\operatorname{Tr}\widehat{B}(\Gamma+\kappa)\rangle-\langle\operatorname{Tr}\widehat{B}(\Gamma)\rangle\langle\operatorname{Tr}\widehat{B}(\kappa)\rangle]=$$
$$=\frac{i}{2}g_1N^2\oint\limits_{\Gamma}dx'_v\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\times$$
$$\times\left[\langle\operatorname{Tr}\widehat{B}(c_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'})\operatorname{Tr}\widehat{B}(c_{\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}})\rangle-\frac{1}{N^2}\langle\operatorname{Tr}\widehat{B}(\Gamma)\rangle\right].\quad(14)$$

В этих уравнениях $\frac{\delta}{\delta c_{\tau,\tau'}}$ — производная, описывающая эволюцию во времени контура Γ, иными словами описывающая динамический сдвиг электронной частоты, обусловленный взаимодействием электрона с флуктуирующим полем $A^\alpha_\nu(\boldsymbol{x},\tau)$, а также аналогичный сдвиг фононной частоты; $\frac{\partial(\omega)}{\partial\tau}$ — производная по времени τ, от которого зависят электронные и фононные операторы, определяющая частоту электронных возбуждений вблизи уровня Ферми, а также фононов, которыми обмениваются электроны, участвующие в сверхпроводящем спаривании; $f_i(N)$ — дискретные функции размерности группы $SU(N)$.

Рассмотрим несколько подробнее правую часть в выражении (14). Формально его появление связано с изменением площади контура Γ на $\delta s_{\mu v}$. Изменяя площадь контура Γ на $\delta s_{\mu v}$, мы тем самым изменяем поток флуктуирующего поля $A^\alpha_\nu(\boldsymbol{x})$ через контур. Изменение потока приводит к наведению в контуре эффективной электродвижущей силы, которая создает электромагнитное поле, способное воздействовать на электроны проводимости. Следовательно, это слагаемое можно понимать как «ток смещения», обусловленный флуктуациями спиновой и зарядовой плотности:

$$\langle\widehat{I}_v(\boldsymbol{x})\rangle=\frac{i}{4}g_1N^2\lim_{\boldsymbol{x},\tau\to\boldsymbol{x}',\tau'}(\nabla_{\boldsymbol{x}'_v}-\nabla_{\boldsymbol{x}_v})\times$$
$$\times\sum_{\alpha=1}^{N^2-1}\sum_{\gamma=1}^{2}\operatorname{Tr}\left[\widehat{\tau}^\alpha,\widehat{\widehat{G}}^\alpha_{\gamma\gamma}(\boldsymbol{x},\tau|\Gamma|\boldsymbol{x}',\tau')\right]+$$
$$+\frac{i}{2}g_1N^2\oint\limits_{\Gamma}dx'_v\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\sum_{\alpha=1}^{N^2-1}\left\langle\operatorname{Tr}\widehat{\tau}^\alpha\widehat{B}(c_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'})\widehat{\tau}^\alpha\widehat{B}(c_{\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}})\right\rangle.$$

Итак, уравнения (11)–(14) описывают состояния сверхпроводника при отсутствии магнитной подсистемы. Потенциал $A^\alpha_\nu(\boldsymbol{x})$ есть не что иное, как обобщенный векторный потенциал электромагнитного поля. Уравнения показывают, что взаимодействие электронов можно эффективно рассматривать не только как парное, но и как четырехчастичное, т. е. обменное взаимодействие существует не только между электронами, образующими пару, но и между электронами разных пар. Полученные уравнения учитывают флуктуации электромагнитного поля, которое определяется электрон-ионной системой. Следовательно, в процессе образования связанных электронных пар по-прежнему будут участвовать флуктуации.

Наряду с обменным взаимодействием в рассматриваемых магнитных системах существует еще и квадрупольное обменное взаимодействие, которое необходимо учитывать для объяснения свойств магнитных систем [9–11].

В рамках рассматриваемой модели средний потенциал такого взаимодействия имеет следующий вид:

$$\langle\langle K_{\kappa_1,\kappa_1^*;\kappa_2,\kappa_2^*}(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j|\Gamma|\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{x}_l)\rangle\rangle_{\rho(\kappa)}=\frac{N^4}{(N^2-1)^4}N^3f_4(N)\times$$
$$\times\int\limits_{\substack{-\kappa_1,-\kappa_1^*,\\-\kappa_2,-\kappa_2^*\in\\ \in\Gamma_{\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j,\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{x}_l}}}\frac{D_{\kappa_1}(\boldsymbol{x}''_i)}{2\pi c_\kappa}\frac{D_{\kappa_1^*}(\boldsymbol{x}''_j)}{2\pi c_\kappa}\frac{D_{\kappa_2}(\boldsymbol{x}''_k)}{2\pi c_\kappa}\frac{D_{\kappa_2^*}(\boldsymbol{x}''_l)}{2\pi c_\kappa}\,d\boldsymbol{x}_i\,d\boldsymbol{x}_j\,d\boldsymbol{x}_k\,d\boldsymbol{x}_l\times$$
$$\times\sum_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4=1}^{N^2-1}G^*_{ii\kappa_1}(\boldsymbol{x}_i|\boldsymbol{x}_j)G^*_{kk\kappa_2}(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_l)V(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j,\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{x}_l)\times$$
$$\times G_{jj\kappa_1^*}(\boldsymbol{x}_i|\boldsymbol{x}_j)G_{ll\kappa_2^*}(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_l)\left\langle\operatorname{Tr}\widehat{\tau}^{\alpha_1}\widehat{B}(\Gamma)\widehat{\tau}^{\alpha_1}\widehat{B}(\kappa_1)\right\rangle\times$$
$$\times\left\langle\operatorname{Tr}\widehat{\tau}^{\alpha_2}\widehat{B}(\Gamma)\widehat{\tau}^{\alpha_2}\widehat{B}(\kappa_1^*)\right\rangle\times$$
$$\times\exp\left(\int\limits_{\kappa_1}dx''_\nu\,p_{10\nu}[\kappa_1]+\int\limits_{\kappa_1^*}dx''_\nu\,p_{10\nu}[\kappa_1^*]\right)\times$$
$$\times\left\langle\operatorname{Tr}\widehat{\tau}^{\alpha_3}\widehat{B}(\Gamma)\widehat{\tau}^{\alpha_3}\widehat{B}(\kappa_2)\right\rangle\left\langle\operatorname{Tr}\widehat{\tau}^{\alpha_4}\widehat{B}(\Gamma)\widehat{\tau}^{\alpha_4}\widehat{B}(\kappa_2^*)\right\rangle\times$$
$$\times\exp\left(\int\limits_{\kappa_2}dx''_\nu\,p_{20\nu}[\kappa_2]+\int\limits_{\kappa_2^*}dx''_\nu\,p_{20\nu}[\kappa_2^*]\right),$$
$$f_4(N=1)=1,\quad f_4(N\to\infty)\to1/N^3.\quad(15)$$

Вычислив интегралы при $l_\kappa/L_\kappa\ll1$, получим следующее выражение:

$$\langle\langle K_{\kappa_1,\kappa_1^*;\kappa_2,\kappa_2^*}(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j|\Gamma|\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{x}_l)\rangle\rangle_{\rho(\kappa)}=$$
$$=N^3f_4(N)K_0\langle\operatorname{Tr}\widehat{B}(\Gamma)\rangle^4\langle\operatorname{ch}(\pi l_\kappa p_0)\rangle^2_{\rho(\kappa,p_0)}.\quad(16)$$

Обычно $K_0/J\ll1$, однако за счет обмена импульсами между ячейками квадрупольное взаимодействие может быть усилено.

Итак, мы определили параметры обменного и квадрупольного обменного взаимодействий. Если в системе существует дальний магнитный порядок, то свойства системы можно описать с помощью микроскопического гамильтониана, который в данном случае аналогичен модели Гейзенберга:

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2} \mathrm{Tr}\left[J((\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)|\Gamma_{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2})\left(\widehat{\boldsymbol{S}}_{\boldsymbol{x}_1}\widehat{\boldsymbol{S}}_{\boldsymbol{x}_2}\right)\right] -$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2} \mathrm{Tr}\left[K((\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)|\Gamma_{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2}|(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1)|\Gamma_{\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_1})\right)\left(\widehat{\boldsymbol{S}}_{\boldsymbol{x}_1}\widehat{\boldsymbol{S}}_{\boldsymbol{x}_2}\right)^2\right],$$

причем операторы $\widehat{\boldsymbol{S}}_{\boldsymbol{x}_i}$ определены в контурном представлении:

$$\widehat{\boldsymbol{S}}_{\boldsymbol{x}_i} = \frac{1}{N}\widehat{T}\exp\left\{\oint\limits_{\Gamma_{\boldsymbol{x}_i}} dx_\nu \widehat{A}_\nu\right\}\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{x}_i},$$

а средние значения обменных интегралов $J((\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)|\Gamma_{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2})$ и $K((\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)|\Gamma_{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2}|(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1)|\Gamma_{\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_1})\Big)$ определяются функциями $\langle \mathrm{Tr}\,\widehat{B}(\Gamma)\rangle^2\langle \mathrm{ch}(\pi l_\kappa p_0)\rangle_{\rho(\kappa,p_0)}$ и $\langle \mathrm{Tr}\,\widehat{B}(\Gamma)\rangle^4\langle \mathrm{ch}(\pi l_\kappa p_0)\rangle^2_{\rho(\kappa,p_0)}$, т. е. структурой неупорядоченной магнитной подсистемы.

Магнитная неупорядоченная система способна усиливать эффективное взаимодействие между s-электронами, что может привести к установлению дальнего магнитного порядка или связанных электронных пар. Из формул (15)–(16) следует, что величина K не зависит от J, т. е. если неупорядоченная магнитная подсистема отсутствует, то величины обменного и квадрупольного обменного интегралов не зависят друг от друга.

При наличии неупорядоченной системы спинов квадрупольный обменный интеграл зависит от функции, которая определяет величину обменного интеграла $\langle\langle J_{\kappa\kappa^*}(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j|\Gamma)\rangle\rangle_{\rho(\kappa)}$.

Выражение (16) можно переписать в следующем виде:

$$\langle\langle K_{\kappa_1,\kappa_1^*;\kappa_2,\kappa_2^*}(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j|\Gamma|\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{x}_l)\rangle\rangle_{\rho(\kappa)} =$$
$$= N\frac{f_4(N)}{f_2^2(N)}K_0\frac{\langle\langle J_{\kappa_1\kappa_1^*}(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j|\Gamma)\rangle\rangle_{\rho(\kappa)}}{J}\,\frac{\langle\langle J_{\kappa_2\kappa_2^*}(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{x}_l|\Gamma)\rangle\rangle_{\rho(\kappa)}}{J}.$$

Это означает, что при $\langle \mathrm{Tr}\,\widehat{B}(\Gamma)\rangle \to 1$ квадрупольное обменное взаимодействие может быть усилено параметром обменного взаимодействия. Это оказывается возможным из-за того, что наличие неупорядоченной спиновой подсистемы приводит к возникновению в системе эффективного электромагнитного поля, которое переводит нормальные s-электроны в связанные пары (возможен и обратный процесс), взаимодействующие между собой с помощью обмена виртуальной квазичастицей. Математически это означает, что внутри контуров Γ отсутствуют особые точки, в окрестности которых имеет место сингулярность поля A^α_ν.

Если рассматривать электрон-фононное взаимодействие в неупорядоченной магнитной системе, то на основе вышеприведенных выражений оказывается возможным вычислить параметр электрон-фононной связи, который будет иметь вид

$$\langle\lambda_{e-\mathrm{ph}}\rangle = \lambda_{e-\mathrm{ph}\,0}\langle \mathrm{Tr}\,\widehat{B}(\Gamma)\rangle^2\langle \mathrm{ch}(\pi l_\kappa p_0)\rangle_{\rho(\kappa,p_0)},$$

или

$$\langle\lambda_{e-\mathrm{ph}}\rangle = \lambda_{e-\mathrm{ph}\,0}\frac{\langle\langle J_{\kappa\kappa^*}(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j|\Gamma)\rangle\rangle_{\rho(\kappa)}}{Nf_2(N)J},$$

т. е. оказывается перенормированным относительным обменным взаимодействием между электронами и может быть им усилен, что приводит в конечном счете к перенормировке частот фононного спектра.

Итак, мы показали, что магнитная неупорядоченная подсистема играет определяющую роль в формировании эффективного обменного взаимодействия между электронами, которое способно усиливать взаимодействия релятивистской природы.

Список литературы

1. *Хьюзмоллер Д.* Расслоенные пространства. М., 1970.
2. *Yang C., Mills R.G.* // Phys. Rev. 1954. **96**. P. 191.
3. *Sadovnikov B.I., Savchenko A.M.* // Physica A. 1999. **271**. P. 411.
4. *Sadovnikova M.B., Savchenko A.M., Scarpetta G.* // Phys. Lett. A. 2000. **274**. P. 236.
5. *Savchenko M.A., Stefanovich A.V.* Fluctuational superconductivity of magnetic systems. Springer-Verlag, 1990.
6. *Зайлер Э.* Калибровочные теории. М., 1985.
7. *Mandelstam S.* // Phys. Rev. 1968. **175**. P. 1580.
8. *Де Вит Р.* Континуальная теория дисклинаций. М., 1977.
9. *Rado G.T., Suhl H.* Magnetism. N. Y., 1963.
10. *Van Vleck J.H.* // Phys. Rev. 1937. **52**. P. 1178.
11. *Bertaut E.F.* // Ann. Phys. 1972. **7**. P. 433.

The calculation of the quadrupole exchange interaction parameter in the system of disordered magnetic moments

M. K. Bakhnyan[a], A. M. Savchenko[c], B. I. Sadovnikov[b]

Department of Quantum Statistics and Field Theory, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.

E-mail: [a] bakhnyan@gmail.com, [b] a.m.savchenko@gmail.com, [c] sadovnikov@phys.msu.ru.

Parameters of quadrupole exchange and electron–phonon interaction are calculated within the limits of exchange interaction model. It is shown, that magnetic disorder system forms an effective exchange interaction between electrons.

Key words: exchange interaction potential, contour representation, Green's function.

PACS: 73.43.Nq.

Received 11 December 2011.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 2(2012).

Сведения об авторах

1. Михаил Константинович Бахнян — аспирант; тел.: (495) 939-12-90, e-mail: bakhnyan@gmail.com.
2. Александр Максимович Савченко — докт. физ.-мат. наук, доцент, ст. преподаватель; тел.: (495) 939-12-90, e-mail: a.m.savchenko@gmail.com.
3. Борис Иосифович Садовников — докт. физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 932-80-10, e-mail: sadovnikov@phys.msu.ru.