ОПТИКА И СПЕКТРОСКОПИЯ. ЛАЗЕРНАЯ ФИЗИКА

Локально-оптимальный алгоритм обнаружения слабых геофизических сигналов на выходе лазерных гравитационных антенн

А. В. Гусев[a], И. С. Юдин[b]

Государственный астрономический институт имени П. К. Штернберга (ГАИШ МГУ). Россия, 119991, Москва, Университетский просп., д. 13.
E-mail: [a] avg@lnfm1.sai.msu.ru, [b] ivanyudin@mail.ru

Статья поступила 24.10.2011, подписана в печать 16.01.2012

Рассматривается локально-оптимальный алгоритм обнаружения слабых низкочастотных геофизических сигналов с помощью большебазовых лазерно-интерферометрических гравитационных антенн, работающих в режиме «free spectrum range». При выводе отношения правдоподобия использована оценочно-корреляционная обработка сигналов в настоящем времени («on line»). В гауссовом приближении основным элементом оптимального приемника является реализуемый фильтр Винера. Приведена формула для расчета отношения сигнал/шум.

Ключевые слова: большебазовые оптические гравитационные антенны, схема Паунда–Дривера, free spectrum range.

УДК: 520.4, 520.9. PACS: 04.80.Nn, 95.55.Ym.

Введение

В настоящее время наиболее перспективными приемниками гравитационных сигналов от космических объектов в диапазоне $10^2 \div 10^3$ Гц оказываются большебазовые лазерно-интерферометрические гравитационные антенны (ЛИГА) [1, 2]. При обобщенном анализе ЛИГА можно рассматривать как интерферометр Майкельсона со «сложными зеркалами». «Сложное зеркало» представляет многоходовой интерферометр Фабри–Перо с расстоянием между зеркалами $L_{1,2} \simeq L = 3$ км (VIRGO) и $L_{1,2} \simeq L = 4$ км (LIGO).

Высокая чувствительность ЛИГА стимулирует их применение в качестве нового геофизического прибора — большебазового деформографа. На практике детектирование таких сигналов становится возможным либо путем статистического анализа тонкой структуры физических процессов в цепях, контролирующих положения зеркал резонаторов Фабри–Перо [3], либо вторичной обработки выходного сигнала ЛИГА в режиме «free spectrum range» (FSR) [4]. Пусть $g(t;\xi_0) = \mathrm{Re}[\widetilde{g}(t;\xi_0)\exp\{j\omega_0 t\}]$ — импульсная характеристика оптической системы, где $\widetilde{g}(t;\xi_0)$ — комплексная огибающая, зависящая от информативного параметра ξ_0; ω_0 — частота накачки. Тогда напряжение $v(t;\xi_0)$ на выходе фотоприемника определяется следующим выражением:

$$v(t;\xi_0) \propto \left|\widetilde{g}(t;\xi_0)\cdot\widetilde{E}(t;\overline{\Omega},\beta)\right|^2,$$

где $\widetilde{E}(t;\overline{\Omega},\beta)$ — комплексная огибающая частотно-модулированной накачки, $\overline{\Omega}$ и β — частота и индекс модуляции. Реализация случайного процесса $v(t;\xi_0)$ в схеме Паунда–Дривера [5] поступает на вход синхронного детектора (СД) с частотой местного гетеродина $\omega_{\mathrm{P-D}} = \overline{\Omega}$. Дальнейшей обработке традиционно подвергается реализация случайного процесса

$$x(t;\xi_0) \simeq \ll v(t;\xi_0)\cos\overline{\Omega}t \gg,$$

где $\ll(\cdot)\gg$ — символическая форма записи оператора усреднения по периоду $\overline{\tau} = 2\pi/\overline{\Omega}$.

Особенности работы оптической системы в окрестности *темного пятна* в режиме FSR учитываются при обработке информации по схеме

$$x(t;\xi_0) \to \text{СД} \to \begin{matrix} x_c(t;\xi_0) \\ x_s(t;\xi_0) \end{matrix} \to x_\Theta(t;\xi_0) \to \widehat{\sigma}^2_\Theta(\xi_0).$$

Частота местного гетеродина ω_{FSR} в составе вспомогательного СД выбирается равной межмодовому интервалу $\nu = \pi c/L$ в резонаторе Фабри–Перо (это обеспечивает возможность приема низкочастотных сигналов вне темного пятна); $\widehat{\sigma}^2_\Theta$ — выборочная дисперсия *низкочастотного эквивалента*

$$x_\Theta(t;\xi_0) = a_1 x_c(t;\xi_0) + a_2 x_s(t;\xi_0)$$

в частотном FSR диапазоне

$$0 \leqslant \omega \in (\nu \mp \Delta\Omega/2) \equiv \Theta, \quad \Delta\Omega \ll (1-r)(c/L), \qquad (1)$$

где a_1 и a_2 — весовые коэффициенты; $\Delta\Omega$ — полоса пропускания фильтра низких частот, r — коэффициент отражения входного зеркала резонатора Фабри–Перо.

В предлагаемой работе рассматривается *локально-оптимальный* алгоритм обнаружения слабых детерминированных геофизических сигналов по основному (астрофизическому) каналу ЛИГА при обработке в реальном времени (режим on line) реализации случайного процесса $x(t;\xi_0)$. В такой постановке на вход оптимального приемника поступает реализация случайного процесса

$$y(t) = x(t;\xi_0) + n(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

где $x(t;\xi_0) = x_1(t;\xi_0) \cup x_2(t;\xi_0)$ — стохастический полезный сигнал, корреляционная функция которого

$$k_x(t, t+\tau;\xi_0) = \langle x(t;\xi_0)x(t+\tau;\xi_0)\rangle$$

зависит от информативного параметра ξ_0; $n(t)$ — аддитивная помеха типа гауссова белого шума с известной функцией корреляции

$$k_n(\tau) = \langle n(t)n(t+\tau)\rangle = (N/2)\delta(\tau); \tag{2}$$

$\langle\cdot\rangle$ — символическая форма записи оператора статистического усреднения.

При выводе алгоритма используется *оценочно-корреляционная* обработка сигналов [6]. Переход к режиму FSR осуществляется (для положительных частот) по схеме

$$\omega \in (0,\infty) \to \omega \in \Theta.$$

1. Локально-оптимальный алгоритм обнаружения

Структура оптимального приемника в небайесовской постановке определяется отношением правдоподобия $\Lambda[\xi_0] = \exp\{z(\xi_0)\}$, где информативный *неслучайный* параметр

$$\xi_0 = \xi_0(\tau') \tag{3}$$

в общем случае зависит от медленного времени $\tau' = \varepsilon t$, ε — формальный малый параметр.

Учитывая (3), разобьем интервал наблюдения $(0,T)$ на $L \gg 1$ отдельных подынтервалов (t_k, t_{k+1}) таким образом, чтобы $\Delta t = (t_{k+1} - t_k) \ll \tau_x$, $\tau_\xi \propto \varepsilon^{-1}$, где τ_x — время корреляции случайного процесса $x(t;\xi_0)$, τ_ξ — характерное время изменения параметра геофизического сигнала ξ_0. В такой постановке имеем

$$z(\xi_0) \simeq \sum_{k=1}^{L} z_k(\xi_{0k}),$$

где $z_k(\xi_{0k})$ — логарифм отношения правдоподобия на k-м подынтервале (t_k, t_{k+1}), $\xi_{0k} = \xi_0(\overline{\tau}'_k)$, $\overline{\tau}'_k = (\varepsilon/2)(t_k + t_{k+1})$, $k = \overline{1,L}$.

Решающее правило простого (бинарного) обнаружения «да–нет» можно представить в виде

$$\lambda = 1\colon\ \theta \simeq \sum_{k=1}^{L}\left[z_k(\widehat{\xi}_{0k}) - z_k(0)\right] \geqslant \ln c, \tag{4}$$

где $\lambda = (0,1)$ — параметр обнаружения; c — пороговый уровень, зависящий от выбранного критерия качества; $\widehat{\xi}_{0k}$ — максимально-правдоподобная оценка сигнального параметра ξ_0.

Из (4) при обнаружении слабого *детерминированного* сигнала, для которого $\widehat{\xi}_{0k} = \xi_{0k}$, имеем

$$\lambda = 1\colon\ \theta \simeq \sum_{k=1}^{L}\left[z_k(\xi_{0k}) - z_k(0)\right] \simeq \sum_{k=1}^{L} \dot{z}_k(0)\xi_{0k} \geqslant \ln c, \tag{5}$$

где $\dot{z}_k(\xi) = dz(\xi)/d\xi$, в противоположной ситуации принимается решение $\lambda = 0$ — «сигнала нет».

Выражение (5) определяет локально-оптимальный алгоритм обнаружения [6] геофизических сигналов на выходе ЛИГА.

При $\Delta t \gg \tau_x$ отдельные слагаемые в (4) слабо коррелированы, и, следовательно, достаточная статистика θ при $L \gg 1$ может рассматриваться как асимптотически гауссова случайная величина с параметрами $(m_\theta, \sigma_\theta^2)$, где в состоянии «сигнал есть» ($\lambda = 1$)

$$m_\theta = \sum_{k=1}^{L} \langle \dot{z}_k(0)\rangle\, \xi_{0k}, \quad \sigma_\theta^2 = \sum_{k=1}^{L} \left\langle \delta \dot{z}_k^2(0)\right\rangle \xi_{0k}^2,$$
$$\delta\dot{z}_k(0) = \dot{z}_k(0) - \langle \dot{z}_k(0)\rangle, \quad k = \overline{1,L}.$$

2. Оценочно-корреляционная обработка сигналов

На практике, учитывая, что аддитивная помеха $n(t)$ представляет гауссов белый шум с функцией корреляции (2), при вычислении логарифма отношения правдоподобия $z_k(\xi_{0k})$, (t_k, t_{k+1}) целесообразно воспользоваться *оценочно-корреляционной* обработкой произвольных сигналов [6]. Воспользовавшись симметризованной записью стохастических интегралов, имеем

$$z_k(\xi) = \frac{1}{N}\left[2\int_{t_k}^{t_{k+1}} y(t)\widehat{x}(t;\xi)\,dt - \int_{t_k}^{t_{k+1}} \widehat{x^2}(t;\xi)\,dt\right], \quad k = \overline{1,L}, \tag{6}$$

где $\widehat{x}(t;\xi)$ и $\widehat{x^2}(t;\xi)$ — оптимальные байесовские среднеквадратические оценки случайного процесса $x(t;\xi)$ и его квадрата $x^2(t;\xi)$ соответственно,

$$\widehat{x^2}(t;\xi) = \widehat{x}^2(t;\xi) + \sigma_{\mathrm{ps}}^2(t;\xi),$$

$\sigma_{\mathrm{ps}}^2(t;\xi)$ — *апостериорная* дисперсия.

При дальнейшем анализе с целью упрощения будем предполагать, что $x(t;\xi)$ — гауссов случайный процесс. Применение гауссова приемника при наличии негауссовых сигналов обеспечивает нижнюю границу характеристик обнаружения. Основным элементом гауссова приемника при обработке информации в реальном времени (режим on line) является стационарный *реализуемый* фильтр Винера [7]

$$\begin{gathered}\widehat{x}(t;\xi) = h(t;\xi) * y(t), \quad \widehat{x^2}(t;) = \widehat{x}^2(t;\xi) + \left\langle e^2(\xi)\right\rangle, \\ \left\langle e^2(\xi)\right\rangle = \lim_{t\to\infty} \left\langle e^2(t;\xi)\right\rangle, \quad t \in (t_k, t_{k+1}),\end{gathered} \tag{7}$$

где $h(t;\xi)$ — импульсная характеристика оптимальной системы,

$$\left\langle e^2(t;\xi)\right\rangle = \left\langle [x(t;\xi) - \widehat{x}(t;\xi)]^2\right\rangle = \sigma_{\mathrm{ps}}^2(t;\xi)$$

— среднеквадратическая ошибка. Передаточная функция $H(\omega;\xi) \leftrightarrow h(t;\xi)$ реализуемого фильтра Винера и среднеквадратическая ошибка в стационарном режиме $\left\langle e^2(\xi)\right\rangle$ на его выходе определяются следующим выражением:

$$\begin{gathered}H(\omega;\xi) = 1 - \frac{\sqrt{N/2}}{[K_x(\omega;\xi) + N/2]_+}, \\ \left\langle e^2(\xi)\right\rangle = \frac{N}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \ln\left[1 + \frac{K_x(\omega;\xi)}{N/2}\right]\frac{d\omega}{2\pi},\end{gathered} \tag{8}$$

где $K_x(\omega;\xi) \leftrightarrow k_x(\tau;\xi)$ — спектральная плотность случайного процесса $x(t;\xi)$; индекс «+» у выражения в квадратных скобках означает, что если это выражение разложить на простые дроби, то в разложении должны быть оставлены только те из них, которые соответствуют полюсам, расположенным в верхней полуплоскости.

Пусть

$$Y_k(\omega) = \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} y(t)\exp\{-j\omega t\}\,dt, \quad k = \overline{1, L},$$

— спектр усеченной реализации случайного процесса $y(t)$ на входе оптимального приемника. Тогда из (6), (7) и (8), учитывая свойства преобразования Фурье, имеем

$$z_k(\xi) = \frac{\Delta t}{N}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[W_k(\omega)\frac{K_x(\omega;\xi)}{[K_x(\omega;\xi)+N/2]} - \right.$$
$$\left. - \frac{N}{2}\ln\left(1+\frac{K_x(\omega;\xi)}{N/2}\right)\right]d\omega$$

и, следовательно,

$$\dot{z}_k(0) = \frac{\Delta t}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{K'_x(\omega;0)}{K_x(\omega;0)+N/2}\left(\frac{W_k(\omega)}{K_x(\omega;0)+N/2} - 1\right)d\omega, \tag{9}$$

где $K'_x(\omega;\xi) = \partial K_x(\omega;\xi)/\partial\xi$, $W_k(\omega) = |Y_k(\omega)|^2/\Delta t$.

3. Отношение сигнал/шум на выходе гауссова приемника

При вычислении параметров распределения асимптотически гауссовой случайной величины ϑ (5) представим $W_k(\omega)$ в виде

$$W_k(\omega) = \langle W_k(\omega)\rangle + \delta W_k(\omega), \quad k = \overline{1, L}, \tag{10}$$

где [8]

$$\langle W_k(\omega)\rangle = K_x(\omega;\xi_0) + N/2 \simeq K_x(\omega;0) + N/2 + K'_x(\omega;0)\xi_{0k},$$
$$\langle \delta W_k(\omega_1)\delta W_k(\omega_2)\rangle \simeq [K_x(\omega_1;0)+N/2]^2\,\mathrm{sinc}^2[(\omega_2-\omega_1)\Delta t/2].$$

Пусть

$$Q = \frac{\Delta t}{2\pi}\int\limits_0^{\infty}\gamma^2(\omega)\,d\omega, \quad \gamma(\omega) = \left[\frac{K'_x(\omega;\xi_0)}{K_x(\omega;\xi_0)+N/2}\right]_{\xi_0=0} \tag{11}$$

— глубина модуляции спектральной плотности случайного процесса $y(t)$ на входе оптимального приемника при наличии геофизических сигналов. Тогда, принимая во внимание (9) и (10), в состоянии «сигнал есть» ($\lambda = 1$) имеем $\langle \dot{z}_{0k}\rangle = Q\xi_{0k}$, $\langle \delta\dot{z}^2_{0k}\rangle \simeq Q/4$. Отсюда

$$m_\vartheta = Q\sum_{k=1}^{L}\xi^2_{0k}, \quad \sigma^2_\vartheta \simeq (Q/4)\sum_{k=1}^{L}\xi^2_{0k}$$

и, следовательно, отношение сигнал/шум ρ^2 на выходе локально-оптимального приемника определяется следующим выражением:

$$\rho^2 = \frac{m^2_\vartheta}{\sigma^2_\vartheta} \simeq 4Q\sum_{k=1}^{L}\xi^2_{0k}. \tag{12}$$

Заключение

1. Оценочно-корреляционный приемник можно рассматривать как систему *совместного обнаружения и оценивания* стохастического сигнала. Основным преимуществом такого подхода (по отношению к вычислению $z(\xi_0)$ на основе теории статистических решений [8]) оказывается практическая реализация приемника. В гауссовом приближении в состав такого устройства входит оптимальный фильтр Винера. При обработке информации в реальном времени передаточная функция реализуемой оптимальной системы определяется выражением (8).

2. Характеристики обнаружения — вероятности ложной тревоги α и пропуска сигнала β при $L \gg 1$ — определяются следующим выражением:

$$\alpha \leqslant 1 - \Phi(\ln c/\sigma_\vartheta), \quad \beta \leqslant 1 - \Phi(\rho - \ln c/\sigma_\vartheta),$$

где $\Phi(\cdot)$ — интеграл вероятности, ρ — отношение сигнал/шум (12); знак равенства в этом выражении соответствует гауссову сигналу $x(t;\xi_0)$.

3. В работах [4, 9, 10] при описании работы ЛИГА в режиме FSR учитывался только стохастический характер квазигармонической накачки на входе оптической системы. Отношение сигнал/шум ρ (12) учитывает наличие принципиально неустранимой в ЛИГА аддитивной помехи — дробового шума фотодетектора $n(t)$.

4. В частотный диапазон $0 \leqslant \omega \in \Theta$ (режим FSR) попадают медленно убывающие крылья (хвосты) спектральной плотности $K_x(\omega;\xi_0)$ и, следовательно, $K_x(\omega\in\Theta;\xi_0) \simeq K_x(\nu;\xi_0)$. Отсюда, учитывая (11), имеем

$$\gamma(\omega\in\Theta) \simeq \gamma(\nu) = \gamma_\Theta, \quad Q \to Q_\Theta \simeq \frac{\Delta t\Delta\Omega}{2\pi}\gamma^2_\Theta.$$

При обнаружении периодических сигналов

$$\xi_0(t) = \xi_{\max}\cos\omega_\varepsilon t, \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

с резонансной частотой ω_ε (для приливных деформаций $\omega_\varepsilon = \omega_t$, ω_t — частота основной гармоники) амплитуду $\xi_{\max}$ порогового сигнала находим из условия $\rho^2 \geqslant 1$:

$$\xi_{\max} \geqslant \frac{1}{|\gamma_\Theta|}\sqrt{\frac{2\pi}{\Delta\Omega T}}.$$

Для ЛИГА без *ресайклинга* [9, 10] (ресайклинг — дополнительное зеркало, расположенное между генератором накачки и интерферометром Майкельсона [11])

$$|\gamma_\Theta| \simeq \left|\frac{L}{(1-r)\delta l}\right|, \quad \delta l = \Delta l - \Delta l_{\mathrm{opt}},$$

где $\Delta l = l_2 - l_1$, $l_{1,2}$ — длины плеч интерферометра Майкельсона, Δl_{opt} — оптимальное значение параметра Δl в темном пятне. На практике, учитывая разрешающую способность системы обратной связи ($|\delta l| \lesssim 10^{-12}$ м), пороговая чувствительность ЛИГА как приемника геофизических сигналов в режиме FSR при выбранной длительности интервала наблюдения $(0, T)$ в полосе $(\Omega/2, \Omega/2)$ определяется следующей формулой:

$$\xi_{\max} \gtrsim 2.5\cdot 10^{-15}\sqrt{\frac{1}{\Delta\Omega T}}.$$

Список литературы

1. *Abbott B.P.* et al. // Rep. Prog. Phys. 2009. **72**. P. 076901.
2. *Acernese F.* et al. // Class. Quantum Grav. 2008. **25**. P. 114045.
3. *Гусев А.В., Руденко В.Н.* // Измерительная техника. 2009. № 2. С. 3.

4. *Melissinos A.* // Proc. 12th Marcel Grossman Meeting. Paris, July 12-–18, 2009.
5. *Drever R.V.* et al. // Appl. Phys. B. 1983. **31**. P. 97.
6. *Сосулин Ю.Г.* Теоретические основы радиолокации и радионавигации. М., 1992.
7. *Ван Трис Г.* Теория обнаружения, оценок и модуляции. Т. 1. М., 1977.
8. *Е.И.Куликов.* Методы измерения случайных процессов. М., 1986.
9. *Гусев А.В., Руденко В.Н.* // Письма в ЖЭТФ. **91**, № 10. С. 543.
10. *Гусев А.В., Руденко В.Н., Юдин И.С.* // Измерительная техника. 2011. № 6. С. 3.
11. *Drever R.W.P.* et al. // ASI. Series B. 1983. **94**. P. 503. New York.

Locally optimal algorithm for detecting weak geophysical signals at the output of laser gravitational antennas

A. V. Gusev[a], **I. S. Yudin**[b]

P. K. Sternberg State Institute of Astronomy, Moscow State University, Moscow 119191, Russia.
E-mail: [a] *avg@lnfm1.sai.msu.ru,* [b] *ivanyudin@mail.ru.*

The locally optimal algorithm for detecting weak low-frequency geophysical signals with long arms laser interferometric gravitational detector operating in mode «free spectrum range» was considered. An assessment-correlation signal processing present tense («on line») was used in the derivation of the likelihood ratio. Wiener filter is the main element of the optimum receiver in the Gaussian approximation. The formula for calculating the signal to noise ratio has been given.

Key words: long arms gravitational detector, scheme of Pound–Driver, free spectrum range.
PACS: 04.80.Nn, 95.55.Ym.
Received 24 November 2011.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 2(2012).

Сведения об авторах

1. Андрей Викторович Гусев — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник; тел.: (495) 939-53-27, e-mail: avg@lnfm1.sai.msu.ru.
2. Иван Сергеевич Юдин — вед. программист; e-mail: ivanyudin@mail.ru.