

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

**Распределение температуры в тонком проводящем диске,
нагреваемом постоянным током**

Т. Н. Герасименко^а, П. А. Поляков^б

*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет,
кафедра общей физики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.*

E-mail: ^аgerasimenko@physics.msu.ru, ^бpolyakova@gmail.com

Статья поступила 14.12.2011, подписана в печать 27.01.2012.

Исследована задача о стационарном распределении температуры в тонком проводящем диске, нагреваемом постоянным током. Получено аналитическое решение, и исследованы предельные случаи, соответствующие различным механизмам отвода тепла. Установлено, что максимальное значение температуры и вид ее распределения в таком диске существенно определяются отношением коэффициента теплоотдачи с поверхности к коэффициенту теплопроводности материала диска. При больших значениях этого отношения имеет место резко неоднородное распределение температуры (горячая точка), при малых — температура плавно спадает от центра к границам проводника.

Ключевые слова: распределение температуры, плоский проводник, постоянный ток.

УДК: 536.212.2. PACS: 44.05.+e, 68.60.-p.

Введение

Одной из центральных проблем современной микроэлектроники является проблема выделения тепла ее составными элементами [1]. Чрезмерное выделение тепла на отдельных участках схемы может привести к ее порче. Основными источниками тепла в электрической схеме являются компоненты, обладающие активным сопротивлением — проводники и резисторы. В силу закона Джоуля–Ленца сильнее всего нагреваются те области, плотность тока в которых максимальна, т. е. участки вблизи различных дефектов или изгибов проводника или же вблизи подводных контактов. За счет теплопроводности материала и оттока тепла с поверхности проводника, распределение температуры будет отличаться от распределения тока, но в областях, где плотность тока максимальна, будут иметь место максимумы температуры. Целью настоящей работы является исследование распределения температуры в случае существенно неоднородного распределения тока в плоских проводниках и определение ее значений в точках максимального нагрева.

Под плоскими мы понимаем проводники, толщина которых τ много меньше их длины и ширины. В этом случае можно пренебречь зависимостью всех характеристик проводника от его толщины и свести задачу к двумерной. Под эту категорию, к примеру, подходят проводники печатных плат, толщина которых как правило составляет десятки микрон при характерных линейных размерах порядка миллиметров.

Поскольку нас интересует случай протекания через

проводник постоянного тока, мы рассматривали установившееся распределение температуры. Записывая уравнение теплопроводности для двумерного проводника с учетом конвективного теплообмена по аналогии с [2], получаем

$$\beta \Delta u(x, y) - hu(x, y) = -\rho j^2. \quad (1)$$

Здесь $u(x, y) = T(x, y) - \theta$, где θ — температура окружающей среды, h — коэффициент теплоотдачи с поверхности проводника¹. Так как рассматривается двумерный проводник, коэффициент теплопроводности β , удельное сопротивление ρ и плотность тока j были пересчитаны на единицу площади из соответствующих объемных величин следующим образом:

$$\beta^S = \tau \beta^V, \quad \rho^S = \frac{\rho^V}{\tau}, \quad j^S = \tau j^V.$$

Индексы S и V относятся к поверхностным и объемным величинам, соответственно. Всюду в дальнейшем индекс S опускается.

1. Общий вид распределения температуры

Рассматривается задача о распределении тепла при контакте плоского круглого проводника радиуса A с тонким подводным проводом радиуса $a \ll A$ (рис. 1). В случае, если материал проводника является однородным, распределение температуры в нем, очевидно, является цилиндрически симметричным, что приводит к тому, что $\partial u / \partial \varphi = 0$.

Для того чтобы определить плотность тока в этом проводнике, был использован тот факт, что в силу

¹Предполагается, что проводник лежит на теплоизолирующей подложке и оттока тепла через нижнюю поверхность нет. В противном случае в уравнении (1) должны быть использованы величины $\tilde{h} = h_{\text{up}} + h_{\text{down}}$ и $\tilde{\theta} = (h_{\text{up}}\theta_{\text{up}} - h_{\text{down}}\theta_{\text{down}})/(h_{\text{up}} + h_{\text{down}})$, где h_{up} , h_{down} , θ_{up} , θ_{down} относятся соответственно к верхней и нижней поверхностям проводника.

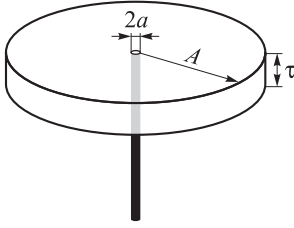


Рис. 1. Геометрия рассматриваемого проводника

цилиндрической симметрии суммарный ток через окружность произвольного радиуса r должен быть постоянным, поэтому $j(r)2\pi r = J_0$, откуда следует, что $j^2 = J_0^2/4\pi^2 r^2$. Используя обозначения

$$\alpha \equiv \frac{J_0^2 \rho}{4\pi^2}, \quad k \equiv \sqrt{\frac{h}{\beta}},$$

приводим уравнение (1) к виду

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) - k^2 u = -\frac{\alpha}{\beta r^2}. \quad (2)$$

Так как $A \gg a$ и ток обратно пропорционален радиусу, предполагалось, что на расстоянии A нагрев проводника током столь мал, что температура на внешней границе совпадает с температурой окружающей среды $T(A) = \theta$, т. е.

$$u(A) = 0. \quad (3)$$

Радиус подводящего провода считался очень маленьким (порядка величины τ), поэтому предполагалось, что через него нет оттока тепла, и потому температура в точке $r = a$ равна некоторой фиксированной величине

$$u(a) = u_0. \quad (4)$$

Для того чтобы решить полученную систему (2)–(4), воспользуемся тем фактом, что соответствующее однородное уравнение является модифицированным уравнением Бесселя и его решение представляет собой линейную комбинацию функций Инфельда и Макдональда нулевого порядка [3]. Это позволяет записать решение

неоднородного уравнения (2) в следующем виде:

$$u(r) = \frac{\alpha}{\beta} \left[K_0(kr) \int_{ka}^{kr} \frac{I_0(x)}{x} dx - I_0(kr) \int_{ka}^{kr} \frac{K_0(x)}{x} dx \right] - C_1 I_0(kr) + C_2 K_0(kr), \quad (5)$$

$$C_1 = \frac{\alpha}{\beta} \frac{K_0 \eta - I_0 \xi}{k_0 I_0 - i_0 K_0} k_0 + u_0 \frac{K_0}{k_0 I_0 - i_0 K_0}, \quad (6)$$

$$C_2 = \frac{\alpha}{\beta} \frac{K_0 \eta - I_0 \xi}{k_0 I_0 - i_0 K_0} i_0 + u_0 \frac{I_0}{k_0 I_0 - i_0 K_0}. \quad (7)$$

Здесь и далее для удобства используются следующие обозначения:

$$\int_{ka}^{kA} \frac{K_0(x)}{x} dx \equiv \xi, \quad \int_{ka}^{kA} \frac{I_0(x)}{x} dx \equiv \eta, \\ K_n(kA) \equiv K_n, \quad I_n(kA) \equiv I_n, \\ K_n(ka) \equiv k_n, \quad I_n(ka) \equiv i_n.$$

В выражения (6), (7) входит неизвестная температура u_0 . Ее значение мы получили, записав уравнение баланса энергий для диска

$$u_0 = \frac{\alpha}{ka\beta} \frac{I_0 \xi - K_0 \eta}{K_0 i_1 + I_0 k_1}. \quad (8)$$

С учетом этого окончательные выражения для констант интегрирования (6) и (7) имеют вид

$$C_1 = -\frac{\alpha}{\beta} \frac{I_0 \xi - K_0 \eta}{K_0 i_1 + I_0 k_1} k_1, \quad (9)$$

$$C_2 = \frac{\alpha}{\beta} \frac{I_0 \xi - K_0 \eta}{K_0 i_1 + I_0 k_1} i_1. \quad (10)$$

На рис. 2 приведены распределения температуры для различных коэффициентов теплоотдачи, построенные по формуле (5) для размеров проводника $a = 0.01$ мм, $A = 10$ мм, $\tau = 0.01$ мм. Максимальная плотность тока (при $r = a$) была задана в соответствии с ГОСТ 23751-86: $j_a = 100$ А/мм². В соответствии с этим была определена суммарная плотность тока $J_0 = 2\pi a j_a$.

Объемные величины удельного сопротивления $\rho = 0.0172$ Ом · мм²/м и коэффициента теплопровод-

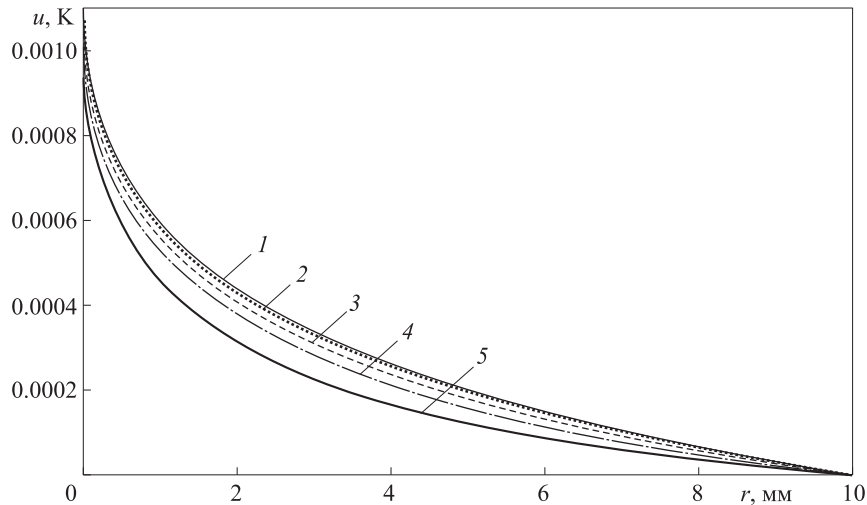


Рис. 2. Распределения температуры при различных значениях коэффициента теплоотдачи с поверхности: $h = 5$ (кривая 1), 10 (2), 25 (3), 50 (4) и 120 Вт/(К · м²) (5)

ности $\beta = 380 \text{ Вт}/(\text{К} \cdot \text{м})$ были взяты для медных проводников. Значения коэффициента теплоотдачи взяты из работы [4].

2. Предельные случаи

Поскольку в отводе тепла с диска участвуют два механизма: теплопроводность вдоль диска и теплоотдача с его поверхности, мы рассмотрели асимптотики выражений (5), (8)–(10) при $h \rightarrow 0$ и $\beta \rightarrow 0$, для того чтобы оценить насколько тот или иной механизм влияет на распределение температуры.

При отсутствии теплоотдачи с поверхности, т. е. при $h \rightarrow 0$ и $k = \sqrt{h/\beta} \rightarrow 0$, были использованы асимптотические разложения цилиндрических функций при малых значениях аргумента [5] и получена следующая асимптотика:

$$u(r) \approx \frac{\alpha}{2\beta} \left(\ln^2 \frac{A}{a} - \ln^2 \frac{r}{a} \right) \tag{11}$$

в нулевом порядке по k и

$$u(r) \approx \frac{\alpha}{\beta} \left\{ \frac{1}{2} \left(\ln^2 \frac{A}{a} - \ln^2 \frac{r}{a} \right) + \frac{k^2 a^2}{4} \ln \frac{A}{r} \ln^2 \frac{A}{a} + \frac{k^2 r^2}{8} \left(\ln^2 \frac{A}{a} - \ln^2 \frac{r}{a} \right) - \frac{k^2}{4} \left(A^2 \ln \frac{A}{a} - r^2 \ln \frac{r}{a} \right) - \frac{k^2 a^2}{8} \ln \frac{A}{r} + \frac{3}{16} k^2 (A^2 - r^2) \right\} \tag{12}$$

во 2-м порядке (слагаемые первого порядка отсутствуют).

На рис. 3 приведены графики выражений (5), (11) и (12) для $h = 25 \text{ Вт}/(\text{К} \cdot \text{м}^2)$ ($k \approx 0.08 \text{ м}^{-1/2}$). Видно, что выражение (12) хорошо аппроксимирует (5) даже при достаточно больших h , что позволяет сделать вывод о том, что ведущую роль в отводе тепла играет отток тепла через боковую поверхность.

Случаю, когда механизм теплоотдачи с поверхности преобладает, соответствует ситуация либо малых β , либо больших h , что в пределе соответствует

$k = \sqrt{h/\beta} \rightarrow \infty$. В этом случае задачу (2)–(4) можно записать в виде

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \Delta u = u - \frac{\alpha}{hr^2}, \\ u(a) = u_0, \quad u(A) = 0, \end{cases} \tag{13}$$

где $\varepsilon = 1/k$. Коэффициент ε^2 при старшей производной является малым параметром и слагаемое $\varepsilon^2 \Delta u$ можно рассматривать как малое возмущение уравнения

$$u = \frac{\alpha}{hr^2}.$$

Очевидно, что решение возмущенного уравнения не стремится к решению невозмущенного при $\varepsilon \rightarrow 0$ в точках $r = a$ и $r = A$, поэтому (13) представляет собой сингулярно возмущенную задачу [6]. Асимптотику ее решения при малых ε , согласно [6], мы искали в виде

$$u(r, \varepsilon) = \bar{u}(r, \varepsilon) + \Pi(\xi, \varepsilon) + \Pi^*(\xi^*, \varepsilon),$$

где каждый из членов суммы ищется в виде ряда по степеням ε . Здесь

$$\xi = \frac{r-a}{\varepsilon}, \quad \xi^* = \frac{A-r}{\varepsilon}.$$

В результате получаем следующее решение:

$$u(r) \approx \frac{\alpha}{hr^2} + \left(u_0 - \frac{\alpha}{ha^2} \right) \frac{\text{sh}(k(A-r))}{\text{sh}(k(A-a))} \sqrt{\frac{a}{r}} - \frac{\alpha}{hA^2} \frac{\text{sh}(k(r-a))}{\text{sh}(k(A-a))} \sqrt{\frac{A}{r}}. \tag{14}$$

Тот же результат получается и непосредственной подстановкой асимптотик цилиндрических функций при больших значениях аргумента в выражение (5).

Видно, что в этом случае распределение температуры имеет тот же характер, что и распределение квадрата плотности тока, т. е. пропорционально $1/r^2$. Это приводит к тому, что нагретой оказывается очень незначительная область проводника вблизи контакта, т. е. возникает горячая точка. Температура остальной части проводника практически совпадает с температурой окружающей среды. Соответствующие графики для размеров $a = 0.1 \text{ мм}$, $A = 50 \text{ мм}$, $\tau = 0.01 \text{ мм}$,

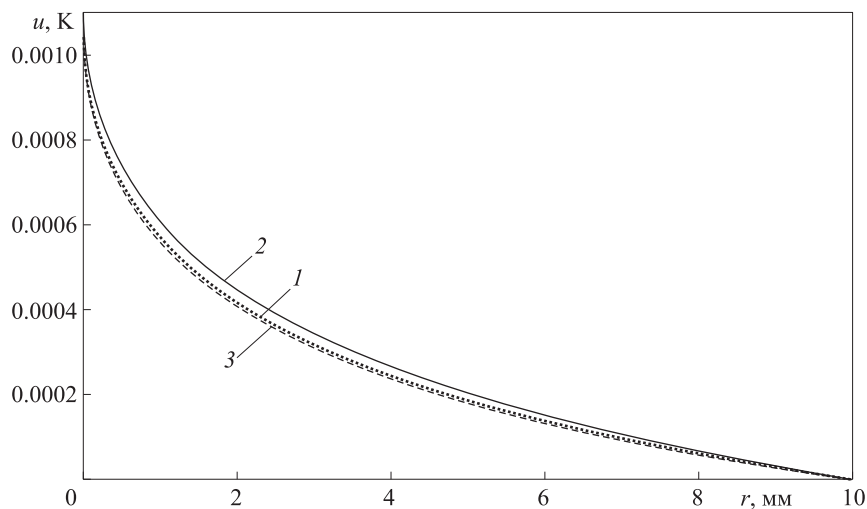


Рис. 3. Распределения температуры в отсутствие оттока тепла с поверхности. Кривая 1 — график, построенный по точной формуле (5); кривые 2 и 3 — асимптотики, построенные по формулам (11) и (12) соответственно

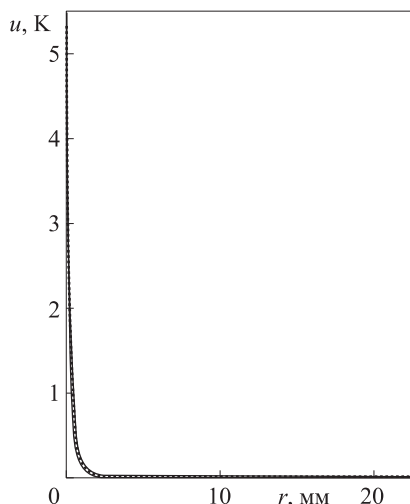


Рис. 4. Распределения температуры при отсутствии теплопроводности. Штриховая кривая — график, построенный по точной формуле (5), сплошная кривая — асимптотика, построенная по формуле (14)

удельного сопротивления $\rho = 0.0172 \text{ Ом} \cdot \text{мм}^2/\text{м}$ и модельных параметров $\beta = 0.1 \text{ Вт}/(\text{К} \cdot \text{м})$, $h = 120 \text{ Вт}/(\text{К} \cdot \text{м}^2)$ приведены на рис. 4.

Следует отметить, что в настоящей работе мы выбрали суммарный ток таким, чтобы плотность тока нигде внутри диска не превышала допустимую токовую нагрузку для медных проводников, поэтому прирост температуры во всех случаях оказался достаточно малым. В случаях, когда неоднородность тока в проводнике вызвана наличием каких-либо дефектов, как, например, в работе [7], это условие может и не соблюдаться, что приводит сильному повышению температуры и плавлению проводника.

Заключение

Показано, что в тонком проводящем диске, нагреваемом постоянным током, максимальное значение

температуры и вид ее распределения существенно определяются отношением коэффициента теплоотдачи с поверхности к коэффициенту теплопроводности материала диска. При больших значениях этого отношения имеет место резко неоднородное распределение температуры, при малых — температура плавно спадает от центра к границам проводника. Полученное точное аналитическое решение позволяет установить общие закономерности распределения температуры в плоских проводниках в тех случаях, когда распределение тока является существенно неоднородным. Это может быть использовано как для качественных оценок, так и для проверки алгоритмов при численном решении подобных задач. Кроме того, решенная задача может быть использована как приближение в случае проводника произвольной формы, если мы интересуемся распределением температуры на расстояниях от провода существенно меньших, чем характерные размеры проводника.

Авторы выражают благодарность профессору В. Ю. Попову за помощь и ценные замечания при подготовке статьи.

Список литературы

1. *Remsburg R.* Thermal design of electronic equipment. Boca Raton, 2001.
2. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., 1953.
3. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., 1968.
4. *Kang H.J., Leung C.W.* // Heat and Mass Transfer. 1998. **33**. P. 265.
5. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М., 1979.
6. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М., 1990.
7. *Лановая А.В., Иванов В.М., Лозенков А.А., Плужникова Т.Н.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2008. **72**, № 9. С. 1341.

Temperature distribution in a flat conductive disk heated by a direct current

T. N. Gerasimenko^a, P. A. Polyakov^b

Department of General Physics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.

E-mail: ^agerasimenko@physics.msu.ru, ^bpolyakovpa@gmail.com.

The problem of steady-state temperature distribution in a flat conductive disk heated by a direct current was investigated. An analytical solution was obtained and limiting cases corresponding to different mechanisms of heat transfer were examined. It was determined that the peak value of a temperature and its distribution in such disk are strongly governed by the ratio of the heat transfer coefficient to the coefficient of heat conductivity. High values of this ratio correspond to highly nonuniform distribution of temperature (hot spot). Low values correspond to smooth decrease of temperature from the center to the boundaries of the conductor.

Keywords: temperature distribution, flat conductor, direct current.

PACS: 44.05.+e, 68.60.-p.

Received 14 December 2011.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 3(2012).

Сведения об авторах

1. Герасименко Татьяна Николаевна — аспирантка; тел.: (495) 939-14-89, e-mail: gerasimenko@physics.msu.ru.
2. Поляков Петр Александрович — докт. физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939-14-89, e-mail: polyakovpa@gmail.com.