

## ОПТИКА И СПЕКТРОСКОПИЯ. ЛАЗЕРНАЯ ФИЗИКА

# Распространение короткого электромагнитного импульса в линейной среде с частотной и пространственной дисперсией — прямое интегрирование уравнений Максвелла методом конечных разностей

В. А. Макаров<sup>a</sup>, И. А. Пережогин, Н. Н. Потравкин

*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра общей физики и волновых процессов. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 62.*

*E-mail:* <sup>a</sup>vamakarov@phys.msu.ru

Статья поступила 02.02.2012, подписана в печать 16.02.2012.

Обсуждаются особенности распространения короткого (порядка десяти колебаний) электромагнитного импульса в изотропной линейной среде с частотной и пространственной дисперсией, установленные в результате интегрирования системы уравнений Максвелла методом конечных разностей во временной области (finite-difference time-domain method), использующим вспомогательное дифференциальное уравнение. Показано, что изменение направления колебаний вектора напряженности электрического поля, происходящее в оптически активной среде при распространении падающего на нее линейно поляризованного сверхкороткого импульса, существенно отличается от пропорционального координате распространения поворота плоскости поляризации в случае падения длинного импульса..

**Ключевые слова:** среда с пространственной дисперсией, метод конечных разностей во временной области, поляризация света.

УДК: 534.1. PACS: 42.25.Ja.

Распространение широких световых пучков и длинных квазимохроматических импульсов в линейных средах с пространственной дисперсией давно и всесторонне исследовано [1]. Для описания изменения их интенсивности и поляризации в процессе распространения использовался набор четырех зависящих от времени и пространственных координат параметров, полностью характеризующих электромагнитного поля. В качестве последних выбирались амплитуды и фазы циркулярно поляризованных компонент светового поля, параметры Стокса, а также интенсивность, степень эллиптичности, угол поворота главной оси эллипса поляризации и общая фаза двух циркулярно поляризованных компонент светового поля. При переходе к предельно коротким импульсам часть этих величин теряет физический смысл. Эволюцию вектора напряженности электрического поля в этом случае необходимо анализировать в целом, говоря об изменении модуля этого вектора и угла, который он образует с осью декартовой системы координат, перпендикулярной волновому вектору.

Метод конечных разностей во временной области, или finite-difference time-domain method (FDTD-method), в настоящее время является одним из самых популярных способов интегрирования уравнений Максвелла с учетом материальных уравнений произвольного вида с целью исследования распространения предельно коротких импульсов. Впервые предложенный для изотропных сред без дисперсии [2], вскоре он был расширен на поглощающие диэлектрики, трехмерные структуры, а также на среды с частотной дисперсией [3–8]. Использование этого метода и его различных модификаций позволило установить новые особенности распространения коротких импульсов в линейных и нелинейных средах различных типов.

В настоящей работе FDTD-method, использующий вспомогательное дифференциальное уравнение (auxiliary differential equation) [8], впервые применяется для исследования распространения коротких лазерных импульсов в линейных средах, обладающих не только частотной, но и пространственной дисперсией. В таких средах угол наклона главной оси эллипса поляризации распространяющегося длинного эллиптически поляризованного квазимохроматического импульса линейно увеличивается с ростом координаты распространения. Целью работы является качественный анализ особенностей изменения ориентации вектора напряженности электрического поля внутри короткого светового импульса, распространяющегося в линейной среде с пространственной дисперсией.

Пусть плоская электромагнитная волна распространяется вдоль оси  $z$  в линейной среде с частотной и пространственной дисперсией. В этом случае уравнения Максвелла и материальные уравнения, связывающие поперечные составляющие векторов напряженности и индукции электрического ( $\mathbf{E}(z, t)$  и  $\mathbf{D}(z, t)$ ) и магнитного ( $\mathbf{H}(z, t)$  и  $\mathbf{B}(z, t)$ ) полей, можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial B_x}{\partial t} &= \frac{\partial E_y}{\partial z}, & -\frac{1}{c} \frac{\partial B_y}{\partial t} &= \frac{\partial E_x}{\partial z}, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial D_x}{\partial t} &= -\frac{\partial H_y}{\partial z}, & \frac{1}{c} \frac{\partial D_y}{\partial t} &= \frac{\partial H_x}{\partial z}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$D_i = E_i + 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_0^{\infty} \chi_{ij}(\tau, z, z') E_j(t - \tau, z') d\tau, \quad (2)$$

$$B_i \equiv H_i.$$

Здесь и далее по дважды встречающимся индексам  $i$  и  $j$ , принимающим значения  $x$  и  $y$ , проводится суммирование,  $c$  — скорость света в вакууме. О явном виде функций  $\chi_{ij}(\tau, z, z')$  известно немного. В случае бесконечной однородной среды они должны зависеть от  $z - z'$  и достаточно быстро спадать до нуля с ростом  $|z - z'|$ . Кроме того, аналитический вид этих функций должен обеспечивать хорошо известное в классической оптике выражение:  $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \approx \varepsilon(\omega)\delta_{ij} - ig_0(\omega)k_m e_{ijm} + \dots$ , возникающее при разложении (2) в ряд по малому параметру  $kd$ . Здесь

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} + 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} dz'' \int_0^{\infty} \chi_{ij}(\tau, z'') \exp[i(\omega\tau - kz'')] d\tau \quad (3)$$

— фурье-компоненты тензора диэлектрической проницаемости вещества,  $d$  — характерный масштаб нелокальности оптического отклика среды,  $\mathbf{k}$  — волновой вектор,  $e_{ijm}$  — символ Леви-Чивиты,  $g_0(\omega)$  — псевдоскалярная константа линейной гирации. Последняя определяет угол  $\Psi(z) = g_0\omega^2 z/(2c^2)$ , на который поворачивается главная ось эллипса поляризации длинного эллиптически поляризованного квазимохроматического импульса, прошедшего в среде расстояние  $z$ . Ее численное значение по порядку величины должно совпадать с известными из литературы экспериментальными данными.

Если среда расположена в области  $z > 0$ , то далеко не единственным, но вполне разумным, примером таких функций являются

$$\chi_{ij}(\tau, z, z') = g(\tau) \tilde{\chi}_{ij}(z, z'), \quad (4)$$

где зависящий от пространственных координат сомножитель при положительном  $z'$  имеет вид

$$\tilde{\chi}_{ij}(z, z') = \frac{\delta_{ij} + \alpha_1(\delta_{xi}\delta_{yj} - \delta_{xj}\delta_{yi})(z - z')}{\sqrt{\pi}d} \exp \frac{-(z - z')^2}{d^2}. \quad (5)$$

В (5)  $\alpha_1$  — константа,  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера. Если  $z' < 0$ , то  $\tilde{\chi}_{ij}(z, z') \equiv 0$ . Зависимость (5) не только удовлетворяет вышеперечисленным требованиям, но и позволяет учитывать специфические поверхностные эффекты, возникающие при взаимодействии излучения с веществом благодаря тонкому переходному слою, существующему около границы среды. Его характерный размер порядка  $d$ , а диэлектрические свойства отличны от характеристик толщи среды.

В случае частотной дисперсии лоренцевского типа [8, 9]

$$g(\tau) = \frac{1}{4\pi} \left[ (\varepsilon_{\infty} - 1)\delta(\tau) + \omega_0^2(\varepsilon_S - \varepsilon_{\infty})(\omega_0^2 - \delta_0^2)^{-1/2} \times \right. \\ \left. \times \exp(-\delta_0\tau) \sin([\omega_0^2 - \delta_0^2]^{1/2}\tau) \right],$$

где  $\varepsilon_S$ ,  $\varepsilon_{\infty}$ ,  $\omega_0$ ,  $\delta_0$  — константы, а  $\delta(\tau)$  — дельта-функция. Подставляя (4) в (3), можно найти  $g_0(\omega)$  и далее угол поворота главной оси эллипса поляризации

$$\Phi(z) = \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \alpha_1 d^2 [\varepsilon(\omega) - 1] \frac{z}{4} \quad (6)$$

длинного эллиптически поляризованного квазимохроматического импульса, прошедшего в среде расстояние  $z$ .

Дважды дифференцируя (2) по времени, получим обыкновенное дифференциальное уравнение, связывающее напряженность, индукцию электрического поля и вспомогательную функцию  $M_i(t, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\chi}_{ij}(z, z') \times E_j(t, z') dz'$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} D_i(t, z) + 2\delta_0 \frac{d}{dt} D_i(t, z) + \omega_0^2 D_i(t, z) = \\ = (\varepsilon_{\infty} - 1) \frac{d^2}{dt^2} M_i(t, z) + \frac{d^2}{dt^2} E_i(t, z) + \\ + 2\delta_0(\varepsilon_{\infty} - 1) \frac{d}{dt} M_i(t, z) + 2\delta_0 \frac{d}{dt} E_i(t, z) + \\ + \omega_0^2(\varepsilon_S - 1) M_i(t, z) + \omega_0^2 E_i(t, z). \end{aligned} \quad (7)$$

При отсутствии пространственной дисперсии ( $\tilde{\chi}_{ij}(z, z') = \delta(z - z')\delta_{ij}$ ) уравнение (7) упрощается и совпадает с рассмотренным в [8]

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} D_i(t, z) + 2\delta_0 \frac{d}{dt} D_i(t, z) + \omega_0^2 D_i(t, z) = \\ = \varepsilon_{\infty} \frac{d^2}{dt^2} E_i(t, z) + 2\delta_0 \varepsilon_{\infty} \frac{d}{dt} E_i(t, z) + \omega_0^2 \varepsilon_S E_i(t, z). \end{aligned} \quad (8)$$

Перейдем аналогично [2, 7, 8] к равномерной сетке по пространству и времени, считая  $z_m = m\Delta z$ ,  $t_n = n\Delta t$ , где  $\Delta z$  и  $\Delta t$  — соответственно шаги по переменным  $z$  и  $t$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots, M-1$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ . Значения  $M$  и  $N$  определяются длиной рассматриваемой среды и промежутком времени, в течение которого анализируется распространение импульса. Разностное уравнение, соответствующее (8) и имеющее второй порядок аппроксимации, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{D_{i,m}^{n+1} - 2D_{i,m}^n + D_{i,m}^{n-1}}{\Delta t^2} + \frac{\delta_0(D_{i,m}^{n+1} - D_{i,m}^{n-1})}{\Delta t} + \omega_0^2 D_{i,m}^n + \\ = \omega_0^2(\varepsilon_S - 1) M_{i,m}^n + \omega_0^2 E_{i,m}^n + \frac{E_{i,m}^{n+1} - 2E_{i,m}^n + E_{i,m}^{n-1}}{\Delta t^2} + \\ + \frac{(\varepsilon_{\infty} - 1)(M_{i,m}^{n+1} - 2M_{i,m}^n + M_{i,m}^{n-1})}{\Delta t^2} + \\ + \frac{\delta_0(\varepsilon_{\infty} - 1)(M_{i,m}^{n+1} - M_{i,m}^{n-1})}{\Delta t} + \frac{\delta_0(E_{i,m}^{n+1} - E_{i,m}^{n-1})}{\Delta t}, \end{aligned}$$

где  $E_{i,m}^n = E_i(t_n, z_m)$ ,  $D_{i,m}^n = D_i(t_n, z_m)$ ,  $M_{i,m}^n = M_i(t_n, z_m) = \tilde{\chi}_{ij,ml}(m\Delta z, l\Delta z)E_{j,l}^n \Delta z$ . По дважды встречающемуся индексу  $l$ , принимающему значения  $0, 1, \dots, M-1$ , здесь и далее проводится суммирование. Таким образом, реализация алгоритма интегрирования задачи (1), (2) требует хранения информации о величине векторов напряженности и индукции электрического поля на двух предыдущих шагах по времени. При его осуществлении вначале определяется напряженность магнитного поля по значению напряженности электрического поля на предыдущем временном шаге

$$\begin{aligned} H_{x,m+1/2}^{n+1/2} = H_{x,m+1/2}^{n-1/2} + \frac{c\Delta t(E_{y,m+1}^n - E_{y,m}^n)}{\Delta z}, \\ H_{y,m+1/2}^{n+1/2} = H_{y,m+1/2}^{n-1/2} - \frac{c\Delta t(E_{x,m+1}^n - E_{x,m}^n)}{\Delta z}, \end{aligned}$$

а затем с ее помощью индукция электрического поля

$$D_{x,m}^{n+1} = D_{x,m}^n - \frac{c\Delta t(H_{y,m+1/2}^{n+1/2} - H_{y,m-1/2}^{n+1/2})}{\Delta z},$$

$$D_{y,m}^{n+1} = D_{y,m}^n + \frac{c\Delta t(H_{x,m+1/2}^{n+1/2} - H_{x,m-1/2}^{n+1/2})}{\Delta z}.$$

На завершающем этапе декартовы компоненты напряженности электрического поля  $E_{j,l}^{n+1} = E_j(t_{n+1}, z_l)$  во всех точках  $z_l$  рассматриваемой среды на  $n+1$  временном шаге находятся в результате решения системы линейных алгебраических уравнений  $A_{ij,ml}E_{j,l}^{n+1} = B_{i,m}$ . В последней формуле элементы матрицы  $A_{ij,ml} = (\varepsilon_\infty - 1)\tilde{\chi}_{ij,ml}\Delta z + \delta_{ij}\delta_{ml}$ , а правая часть равенства

$$B_{i,m} = D_{i,m}^{n+1} + \frac{(D_{i,m}^n - E_{i,m}^n)(\omega_0^2\Delta t^2 - 2)}{1 + \delta_0\Delta t} +$$

$$+ \frac{(D_{i,m}^{n-1} - E_{i,m}^{n-1})(1 - \delta_0\Delta t)}{1 + \delta_0\Delta t} +$$

$$+ M_{i,m}^n \frac{2(\varepsilon_\infty - 1) - \omega_0^2(\varepsilon_S - 1)\Delta t^2}{1 + \delta_0\Delta t} -$$

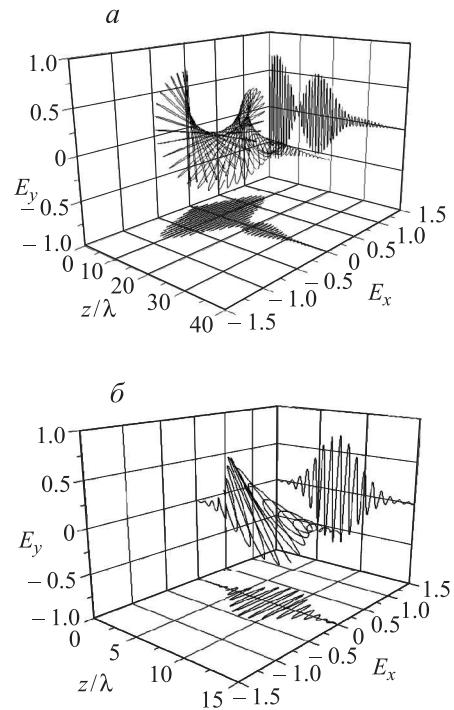
$$- M_{i,m}^{n-1} \frac{(\varepsilon_\infty - 1)(1 - \delta_0\Delta t)}{1 + \delta_0\Delta t}.$$

Нами изучалось взаимодействие линейно поляризованного вдоль оси  $y$  гауссова импульса с полубесконечной средой, обладающей частотной дисперсией лоренцевского типа и определяемой формулой (5) пространственной дисперсией, при его нормальном падении на ее плоскую поверхность. Параметры, определяющие частотную дисперсию среды, по порядку величины совпадали с использованными в работе [9]:  $\varepsilon_S = 5.25$ ,  $\varepsilon_\infty = 2.25$ ,  $\omega_0 = 0.46\omega$ ,  $\delta_0 = 1.46 \cdot 10^{-5}\omega$ , где  $\omega$  — центральная частота спектра падающего импульса. Полуширина пространственной огибающей падающего импульса менялась от нескольких длин волн до сотен  $\lambda$ . При этом максимум интенсивности в начальный момент времени находился на достаточно большом расстоянии от границы среды. Для решения системы линейных алгебраических уравнений нами использовался метод минимальных невязок (generalized minimal residual method) [10].

Если падающий линейно поляризованный импульс достаточно широкий (с полушириной более тридцати длин волн), а пространственная дисперсия в среде невелика ( $d/\lambda < 0.05$ ), то найденные численно значения интенсивности, степени эллиптичности и угла поворота главной оси эллипса поляризации полностью совпадают с соответствующими величинами, полученными методом медленно меняющихся амплитуд. Как и ожидалось, благодаря пространственной дисперсии появляется  $x$ -компоненты напряженности электрического поля не только в импульсе, распространяющемся в среде, но и в импульсе, отраженном от нее. Распространяющееся в среде излучение линейно поляризовано, а угол поворота главной оси эллипса поляризации линейно увеличивается с ростом  $z$  и его значение практически совпадает с  $\Psi(z)$ , найденным по формуле (6).

При падении короткого лазерного импульса на среду, обладающую достаточно большой пространственной

дисперсией, необходимо анализировать происходящее в ней изменение вектора напряженности электрического поля, не вводя понятие эллипса поляризации. В этом случае более удобно судить об изменении поляризации электрического поля по кривым, изображенным на рисунке. На них линия сложной формы в пространстве переменных  $E_x$ ,  $E_y$  и  $z/\lambda$  — это кривая, которую описывает конец вектора напряженности электрического поля (годограф). Линия, лежащая в плоскости  $E_x = \text{const}$ , показывает зависимость  $E_y(z/\lambda)$ , а кривая, расположенная в плоскости  $E_y = \text{const}$ , соответствует  $E_x(z/\lambda)$ . Рисунок построен при полуширине падающего импульса гауссовой формы равной, соответственно, двадцати (а) и пяти (б) длинам волн и достаточно большой ( $d/\lambda = 0.2$ ) величине масштаба нелокальности оптического отклика среды. Такие  $d/\lambda$  обеспечивают более быстрое (по сравнению со средами со слабой пространственной дисперсией) изменение ориентации вектора напряженности электрического поля и степени эллиптичности эллипса поляризации в процессе распространения даже при падении на нее длинного линейно поляризованного импульса (рис., а). Из-за фазовой модуляции, появляющейся в результате действия частотной дисперсии на переднем фронте сверхкороткого импульса пространственная дисперсия влияет сильнее на направление колебаний вектора напряженности электрического поля, чем на заднем фронте (рис., б). В этом случае изменение плоскости колебаний вектора напряженности электрического поля с ростом координаты распространения существенно отличается от пропорционального  $z$  изменения ориентации линейной поляризации светового поля внутри длинного импульса при малом масштабе нелокальности оптического отклика.



Годограф вектора напряженности электрического поля, распространяющегося в среде после 5000 шагов по времени (примерно 60 периодов колебаний оптического поля) при  $d/\lambda = 0.2$  и  $\alpha_1 = 2$  (а),  $\alpha_1 = 1$  (б)

В заключение подчеркнем, что в настоящей работе нами впервые проанализировано распространение короткого (порядка десяти колебаний) электромагнитного импульса в изотропной линейной среде с частотной и пространственной дисперсией на основе прямого интегрирования системы уравнений Максвелла методом конечных разностей во временной области, используя вспомогательное дифференциальное уравнение. Показано, что изменение ориентации вектора напряженности электрического поля внутри короткого импульса более быстрое и более сложное, чем пропорциональное координате распространения изменение направления линейной поляризации светового поля внутри длинного квазимохроматического импульса. Существенно, что использованный метод позволяет учитывать различные модели нелокальности оптического отклика среды на внешнее электромагнитное поле, и перспективен для анализа распространения излучения в нелинейных средах, которое составит предмет отдельной работы.

## Список литературы

1. Агранович В.М., Гинзбург В.Л. Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов. М., 1965.
2. Yee K.S. // IEEE Trans. Antennas Prop. 1966. **AP-14**, N 3. P. 302.
3. Taflove A. // Wave Motion. 1988. **10**, N 6. P. 547.
4. Holland R., Simpson L., Kunz K.S. // IEEE Trans. Electromagn. Compat. 1980. **EMC-22**, N 3. P. 203.
5. Taflove A., Brodwin M.E. // IEEE Trans. Microwave Theory Techniques. 1975. **MTT-23**, N 8. P. 623.
6. Kunz K.S., Lee K.M. // IEEE Trans. Electromagn. Compat. 1978. **EMC-20**, N 3. P. 328.
7. Luebbers R.J., Hunsberger F., Kunz K.S. et al. // IEEE Trans. Electromagn. Compat. 1990. **32**, N 3. P. 222.
8. Joseph R.M., Hagness S.C., Taflove A. // Opt. Lett. 1991. **16**, N 18. P. 1412.
9. Goorjian P.M., Taflove. A. // Opt. Lett. 1992. **17**, N 3. P. 180.
10. Saad Y., Schultz M.H. // SIAM J. Sci. Statist. Comput. 1986. **7**, N 3. P. 856.

## Propagation of short electromagnetic pulse in a medium with frequency dispersion and spatial dispersion: direct integration of Maxwell equations with FDTD method

V. A. Makarov<sup>a</sup>, I. A. Perezhogin, N. N. Potravkin

*Department of General Physics and Wave Processes, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.*

*E-mail:* <sup>a</sup>vamakarov@phys.msu.ru.

The propagation of a short (about ten periods of oscillations) electromagnetic pulse in linear isotropic medium with temporal and spatial dispersion is studied by means of integration of Maxwell equations by FDTD method with the use of auxiliary differential equation. It is shown that the change of the oscillation direction of the electric field vector in the optically active medium during the propagation of the linearly polarized incident ultrashort pulse essentially differs from the polarization plane rotation in case of incidence of the long pulse which is proportional to the propagation coordinate inside the medium.

*Keywords:* medium with spatial dispersion, finite-difference time-domain method, light polarization.

PACS: 42.25.Ja.

Received 2 February 2012.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 3(2012).

## Сведения об авторах

1. Макаров Владимир Анатольевич — докт. физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой; тел. (495) 939-12-25, e-mail vamakarov@phys.msu.ru.
2. Пережогин Игорь Анатольевич — канд. физ.-мат. наук, науч. сотрудник; тел.: (495) 939-12-25, e-mail iap1@mail.ru.
3. Потравкин Николай Николаевич — аспирант; тел.: (495) 939-12-25, e-mail potrav@mail.ru.