ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Исследование уравнений для обобщенного параметра порядка в магнитных системах

М. К. Бахнян[a], А. М. Савченко[b], Б. И. Садовников[c]

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра квантовой статистики и теории поля. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
E-mail: [a] bakhnyan@gmail.com, [b] a.m.savchenko@gmail.com, [c] sadovnikov@phys.msu.ru

Статья поступила 18.03.2012, подписана в печать 24.04.2012.

В рамках модели обменного взаимодействия получены уравнения для обобщенного параметра порядка при наличии неупорядоченной магнитной подсистемы. Рассмотрена возможность возникновения сверхпроводящего состояния при разрушении неустойчивого солитона вблизи фазового перехода.

Ключевые слова: параметр порядка, солитон, фазовый переход.
УДК: 538.91. PACS: 71.10.–w.

Настоящая работа посвящена исследованию неоднородных состояний, которые могут возникать в магнитных сверхпроводниках при фазовых переходах. В некоторых соединениях редкоземельных металлов при фазовых переходах из парамагнитной фазы в сверхпроводящую имеет место фазовый переход первого рода, близкий ко второму [1, 2]. Сверхпроводящий параметр порядка изменяется скачком и это приводит к подавлению магнитных флуктуаций. С понижением температуры параметр порядка возрастает, что приводит к возрастанию флуктуаций магнитной подсистемы и к возникновению неоднородного сверхпроводящего состояния [3].

Для того чтобы теперь записать эффективный гамильтониан системы, необходимо решить вопрос о том, как ввести взаимодействие параметра порядка с магнитной подсистемой. Магнитная подсистема в сверхпроводящей фазе определяется спинами коллективизированных s, $d(f)$ — электронов и не является упорядоченной [4]. Такая спиновая система инвариантна относительно преобразований группы трехмерных поворотов в спиновом пространстве $SO(3)$. Полная группа симметрии сверхпроводящей фазы определяется произведением пространственной группы системы на группу $SU(2)$, $G = G_p \times SU(2)$.

Взаимодействие параметра порядка с магнитной подсистемой определим с помощью введения эффективного поля, потенциал которого при преобразованиях группы симметрии G преобразуется как в координатном, так и в спиновом пространствах, т. е. должен быть тензором второго ранга $A^{\alpha}_{\gamma}(\boldsymbol{x})$. Его связь с параметром порядка можно выразить через ковариантную производную:

$$D_\nu = \nabla_\nu - (e/c) g f^{\alpha\delta\gamma} A^{\delta}_{\nu}. \tag{1}$$

Тогда потенциал $A^{\alpha}_{\nu}(\boldsymbol{x})$ будет играть роль потенциала калибровочного поля для $SU(2)$-симметрии, т. е. совпадает с потенциалом поля Янга–Миллса [5]. В выражении (1) $\nu = 0,1,2,3$; $\alpha, \gamma = 0,1,2,3$; $\delta = 1,2,3$; g — параметр взаимодействия, $f^{\alpha\delta\gamma}$ — структурный тензор, явный вид которого выбирается из соображений симметрии и зависит от того, в какой фазе строится эффективный гамильтониан. Таким образом, эффективный гамильтониан можно записать в следующем виде:

$$H^{\text{eff}} = \int d\boldsymbol{x} \Big\{ (1/2) b_1(\tau) \operatorname{Tr}\left(\widehat{\Psi}^{+}\widehat{\Psi}\right) + \\ + (1/2) \operatorname{Tr}\left[\left(\widehat{D}_\nu \widehat{\Psi}\right)^{+}\left(\widehat{D}_\nu \widehat{\Psi}\right)\right] + \\ + b_2(\tau)\left[\operatorname{Tr}\left(\widehat{\Psi}^{+}\widehat{\Psi}\right)^2\right] \ln\left[\operatorname{Tr}\left(\widehat{\Psi}^{+}\widehat{\Psi}\right)/b_2(\tau)\right] - (1/4) F^{\alpha}_{\mu\nu} \Big\}, \tag{2}$$

где $F^{\alpha}_{\mu\nu} = \nabla_\nu A^{\alpha}_{\mu} - \nabla_\mu A^{\alpha}_{\nu} + g e^{\alpha\beta\gamma} A^{\beta}_{\mu} A^{\gamma}_{\nu}$.

Параметр порядка в общем виде введем следующим образом: $\Psi^{\alpha\beta} = \Psi^{\alpha\beta}_0 e^{i\varphi^{\alpha\beta}}$. Тогда уравнение движения системы может быть получено с помощью варьирования функционала (2) по переменным $\widehat{\Psi}^{\alpha\beta}_0$, $\phi^{\alpha\beta}$, A^{α}_{ν}. Физически механизм возникновения сверхпроводящей фазы можно представить следующим образом: метастабильное неоднородное магнитоупорядоченное состояние разрушается и возникает сверхпроводимость. Для того чтобы описать этот процесс, под параметром порядка следует понимать величину, которая эффективно включает в себя как магнитную Ψ^{α}, $\alpha = 1,2,3$, так и сверхпроводящую Ψ^0 компоненты. Таким образом, параметр порядка можно представить как 4-вектор:

$$\Psi^{\alpha} = \Psi^{\alpha}_0 e^{i\varphi^{\alpha}}, \quad \alpha = 1,2,3,4. \tag{3}$$

Тогда эффективный гамильтониан системы в сверхпроводящем состоянии вблизи точки перехода в парамагнитную фазу запишется в виде

$$H^{\text{eff}} = \int d\boldsymbol{x} \Big\{ (1/2) b_1(\tau) |\Psi|^2 + (1/2) \left\{ (D_\nu \Psi)^* (D_\nu \Psi) \right\} + \\ + b_2(\tau) |\Psi|^4 \ln\left[|\Psi|^2/b_3(\tau)\right] - (1/4)\left(F^{\alpha}_{\mu\nu}\right)^2 \Big\}. \tag{4}$$

Подставляя (3) в (4), получим эффективный гамильтониан в следующем виде:

$$H^{\text{eff}} = \int d\boldsymbol{x} \Big\{ \frac{1}{2} b_1(\tau) \sum_{\alpha} \Psi^{\alpha^2}_0 +$$

$$+\frac{1}{2}\Bigg[\sum_{\alpha}\left\{(\nabla_\nu\Psi_0^\alpha)^2+(\nabla_\nu\phi^\alpha)^2\,\Psi_0^{\alpha^2}\right\}-$$
$$-\frac{e}{c}g\sum_{\alpha,\delta,\gamma}f^{\alpha\delta\gamma}\,(\nabla_\nu\Psi_0^\alpha)\,\Psi_0^\gamma A_\nu^\delta\times$$
$$\times\left[\exp\left\{i\left(\phi^\alpha-\phi^\gamma\right)\right\}+\exp\left\{-i\left(\phi^\alpha-\phi^\gamma\right)\right\}\right]-$$
$$-i\frac{e}{c}g\sum_{\alpha,\delta,\gamma}f^{\alpha\delta\gamma}\,(\nabla_\nu\phi^\alpha)\,\Psi_0^\alpha\Psi_0^\gamma A_\nu^\delta\times$$
$$\times\left[\exp\left\{i\left(\phi^\alpha-\phi^\gamma\right)\right\}-\exp\left\{-i\left(\phi^\alpha-\phi^\gamma\right)\right\}\right]+$$
$$+\left(\frac{e}{c}\right)^2g^2\sum_{\alpha,\delta,\gamma,\delta',\gamma'}f^{\alpha\delta\gamma}f^{\alpha\delta'\gamma'}A_\nu^\delta A_\nu^{\delta'}\,\Psi_0^\gamma\Psi_0^{\gamma'}\exp\left\{i\left(\phi^\gamma-\phi^{\gamma'}\right)\right\}\Bigg]+$$
$$+b_2(\tau)\sum_{\alpha,\beta}(\Psi_0^\alpha)^2\left(\Psi_0^\beta\right)^2\ln\left[\frac{1}{b_3(\tau)}\sum_\alpha(\Psi_0^\alpha)^2\right]-\frac{1}{4}\sum_\alpha\left(F_{\mu\nu}^\alpha\right)^2\Bigg\}.$$

Варьируя полученный функционал по переменным $\nabla_\nu\Psi_0^\alpha$, Ψ_0^α, $\nabla_\nu\varphi^\alpha$, φ^α, $\nabla_\mu A_\nu^\alpha$, A_ν^α, получим следующие уравнения:

$$\nabla_\nu^2\Psi_0-b_1(\tau)\Psi_0-\left\{\left(\nabla_\mu\phi\right)^2\Psi_0\right\}-$$
$$-4b_2(\tau)\Psi_0|\Psi_0|^2\ln\left[|\Psi_0|^2/b_3(\tau)\right]-2b_2(\tau)\Psi_0|\Psi_0|^2-$$
$$-(e/2c)g\left(e^{i\varphi}\nabla_\mu\left[\boldsymbol{A}_\mu,\Psi^*\right]+e^{-i\varphi}\nabla_\mu[\boldsymbol{A}_\mu,\Psi]\right)-$$
$$-(e/2c)g\left(e^{i\varphi}\left[\boldsymbol{A}_\mu,(\nabla_\mu\Psi)^*\right]+e^{-i\varphi}[\boldsymbol{A}_\mu,(\nabla_\mu\Psi)]\right)-$$
$$-(1/2)(e/c)^2g\left(e^{i\phi}\left[\boldsymbol{A}_\mu\left[\Psi^*,\boldsymbol{A}_\mu\right]\right]+e^{-i\varphi}[\boldsymbol{A}_\mu[\Psi,\boldsymbol{A}_\mu]]\right)=0, \tag{5}$$

$$\left(\nabla_\nu^2\phi\right)\Psi_0+2(\nabla_\mu\phi)(\nabla_\mu\Psi_0)-$$
$$-(e/2c)g\left\{\left(ie^{i\varphi}\right)\nabla_\mu\left[\boldsymbol{A}_\mu,\Psi^*\right]+\left(ie^{i\varphi}\right)^*\nabla_\mu[\boldsymbol{A}_\mu,\Psi]\right\}-$$
$$-(1/2)(e/c)^2g^2\times$$
$$\times\left\{\left(ie^{i\varphi}\right)\left[\boldsymbol{A}_\mu\left[\Psi^*,\boldsymbol{A}_\mu\right]\right]+\left(ie^{i\varphi}\right)^*\left[\boldsymbol{A}_\mu[\Psi,\boldsymbol{A}_\mu]\right]\right\}=0, \tag{6}$$

$$\nabla_\mu\boldsymbol{F}_{\mu\nu}-g[\boldsymbol{A}_\mu,\boldsymbol{F}_{\mu\nu}]-(e/2c)g\left\{[\Psi,\nabla_\nu\Psi^*]+[\Psi^*,\nabla_\nu\Psi]\right\}+$$
$$+(1/2)(e/c)^2g^2\left([\Psi\left[\boldsymbol{A}_\nu,\Psi^*\right]]+[\Psi^*\left[\boldsymbol{A}_\nu,\Psi\right]]\right)=0, \tag{7}$$

где

$$\nabla^2=\sum_{\mu=0}^{4}\frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2},$$
$$[\boldsymbol{A}_\nu,\Psi]^\alpha=f^{\alpha\delta\gamma}A_\nu^\delta\Psi^\gamma,\quad[\boldsymbol{A}_\mu,\boldsymbol{F}_{\mu\nu}]^\alpha=e^{\alpha\beta\gamma}A_\mu^\beta F_{\mu\nu}^\gamma,$$
$$[\Psi,\nabla_\nu\Psi^*]^\alpha=f^{\alpha\beta\gamma}\left(\nabla_\nu\Psi^\beta\right)^*\Psi^\gamma.$$

Более компактно данные уравнения могут быть записаны в следующем виде:

$$\Big\{D_\mu D_\mu^*-b_1(\tau)-4b_2(\tau)|\Psi|^2\ln\left[|\Psi|^2/b_3(\tau)\right]-$$
$$-2b_2(\tau)|\Psi|^2\Big\}\Psi=0,$$
$$\nabla_\mu\boldsymbol{F}_{\mu\nu}-g[\boldsymbol{A}_\mu,\boldsymbol{F}_{\mu\nu}]+(e/2c)g\left\{[\Psi,\nabla_\nu\Psi^*]+[\Psi^*,\nabla_\nu\Psi]\right\}+$$
$$+(1/2)(e/c)^2g^2\left([\Psi\left[\boldsymbol{A}_\nu,\Psi^*\right]]+[\Psi^*\left[\boldsymbol{A}_\nu,\Psi\right]]\right)=0, \tag{8}$$

Эффективный гамильтониан и уравнения движения (5)–(7), (8) инвариантны относительно преобразований группы $SU(2)$, а также релятивистски инвариантны как в пространстве Минковского, так и в евклидовом пространстве.

Рассмотрим поведение системы вблизи линии фазовых переходов из парамагнитного в сверхпроводящее состояние. Введем в рассмотрение три параметра порядка $\boldsymbol{S}_\parallel=\boldsymbol{s}_\parallel^++i\boldsymbol{s}_\parallel^-$, $\boldsymbol{S}_\perp=\boldsymbol{s}_\perp^++i\boldsymbol{s}_\perp^-$, Δ, где векторы $\boldsymbol{S}_\parallel$ и $\boldsymbol{S}_\perp$ соответствуют двум волнам спиновой плотности магнитной подсистемы, а Δ — параметр порядка сверхпроводящей системы (щель в спектре электронов проводимости).

Вблизи точки фазового перехода наиболее сильно флуктуирует поле $\boldsymbol{S}_\perp$, которое стимулирует флуктуации $\boldsymbol{S}_\parallel$ и Δ. При этом $\boldsymbol{S}_\parallel$ и Δ, являясь флуктуирующими, стремятся образовать связанное состояние, однако термодинамически устойчивым будет состояние с $\Delta_0\neq0$, $\boldsymbol{s}_{\parallel0}=0$, а состояние с $\boldsymbol{s}_{\parallel0}\neq0$ и произвольным Δ_0 оказывается неустойчивым [3]. Топологическое многообразие, соответствующее параметру порядка $\boldsymbol{S}_\parallel$, имеет следующий вид: $R=S^2\times S^1$ [6], $\pi_1(R)=Z$, $\pi_2(R)=Z$, а это значит, что при выпадении $\boldsymbol{S}_\parallel$ в конденсат могут возникать точечные особенности (топологические солитоны).

Нетривиальность второй гомотопической группы $\pi_2(R)$ означает, что если окружить точечную особенность поверхностью второго порядка, то при фиксированной фазе параметра порядка $\boldsymbol{S}_\parallel$ при обходе данной поверхности вектор $\boldsymbol{S}_{\parallel0}$ отображает ее на всю сферу S^2. Следовательно, степень отображения отлична от нуля. Топологически устранить такую особенность невозможно, так как данную поверхность нельзя стянуть в точку на сфере S^2. Точечная особенность, однако, оказывается неустойчивой из-за воздействия на нее нетопологических возмущений (например, флуктуаций $\boldsymbol{S}_\perp$ и Δ). Разрушение солитонов приводит к усилению флуктуаций и появлению сверхпроводящей компоненты Δ.

Таким образом, мы можем записать динамические уравнения сверхпроводящей фазы вблизи линии фазовых переходов в сверхпроводящее состояние. Проанализируем эти уравнения, когда при фазовом переходе из сверхпроводящей фазы в парамагнитную возникают неустойчивые топологические солитоны. Параметр порядка в этом случае будет иметь вид $\Psi^\alpha=\Psi_0^\alpha$. Тогда уравнения (8) упрощаются и запишутся в виде

$$\begin{gathered}\Big(D_\mu^2-b_1(\tau)-4b_2(\tau)|\Psi_0|^2\ln\left[|\Psi_0|^2/b_3(\tau)\right]-\\-2b_2(\tau)|\Psi_0|^2\Big)\Psi_0=0,\\ \nabla_\mu\boldsymbol{F}_{\mu\nu}-g[\boldsymbol{A}_\mu,\boldsymbol{F}_{\mu\nu}]-(e/c)g[\Psi_0,\nabla_\nu\Psi_0]+\\+(e/c)^2g[\Psi_0[\boldsymbol{A}_\nu,\Psi_0]]=0.\end{gathered} \tag{9}$$

Будем искать решения для Ψ_0 в следующем виде:

$$\Psi_0^\alpha=x_\alpha u(\xi)/\xi,\quad\xi=(x_\mu x_\mu)^{1/2}.$$

Для случая пространства Минковского $x_0=i\beta t$. Вид решения для A_ν^α можно найти, если определить ток, созданный полем параметра порядка Ψ_0:

$$J_\nu^\alpha=f^{\beta\alpha\gamma}\left(\nabla_\nu\Psi_0^\beta\right)\Psi_0^\gamma=-f^{\nu\alpha\gamma}x_\gamma\frac{u^2(\xi)}{\xi^2}. \tag{10}$$

Тогда $A_\nu^\alpha=f^{\nu\alpha\gamma}x_\gamma\alpha(\xi)$. Тензор $f^{\nu\alpha\gamma}$ в данном случае есть тензор т'Хофта ($\alpha=1,2,3$; $\nu,\gamma=0,1,2,3$): $f^{\nu\alpha\gamma}\equiv\eta_{\nu\gamma}^\alpha$, $\eta_{\nu\gamma}^\alpha=-e_{\alpha\nu\gamma}+\delta_{0\nu}\delta_{\alpha\gamma}-\delta_{0\gamma}\delta_{\alpha\nu}$.

Подставляя величины J_ν^α и A_ν^α в (9), получим следующие уравнения для функций $u(\xi)$, $a(\xi)$:

$$\begin{aligned} &u'' + (n-1)\xi^{-1}u' - (n-1)\xi^{-2}u - b_1(\tau)u - \\ &\quad - 4b_2(\tau)u^3 \ln\left[u^2/b_3(\tau)\right] - 2b_2(\tau)u^3 + \\ &\quad + 2(n-1)(e/c)gau - (n-1)(e/c)^2 ga^2 u = 0, \\ &a'' + (n+1)\xi^{-1}a' + 3(n-2)ga^2 - (n-2)g^2\xi^2 a^2 + \\ &\quad + (e/c)g^2\xi^{-2}u^2 - (e/c)^2 g^2 a u^2 = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

где n — размерность Ψ_0. Важно отметить, что для $n=3$ уравнения (11) описывают стационарный массивный магнитный монополь:

$$\begin{aligned} &u'' + 2r^{-1}u' - 2r^{-2}u - b_1(\tau)u - 4b_2(\tau)u^3 \ln\frac{u^2}{b_3(\tau)} - \\ &\quad - 2b_2(\tau)u^3 + 4(e/c)gau - 2(e/c)^2 g^2 r^2 a^2 u = 0, \\ &a'' + 4r^{-1}a' + 3ga^2 - g^2 r^2 a^3 + (e/c)gr^{-2}u^2 - \\ &\quad - (e/c)^2 g^2 u^2 a = 0. \end{aligned}$$

В четырехмерном случае мы получим солитон, который описывается уравнениями

$$\begin{aligned} &u'' + 3\xi^{-1}u' - 3\xi^{-2}u - b_1(\tau)u - 4b_2(\tau)u^3 \ln\frac{u^2}{b_3(\tau)} - \\ &\quad - 2b_2(\tau)u^3 + 6(e/c)gau - 3(e/c)^2 g^2 a^2 u = 0, \\ &a'' + 5\xi^{-1}a' + 6ga^2 - 2g^2\xi^2 a^3 + (e/c)g\xi^{-2}u^2 - \\ &\quad - (e/c)^2 g^2 u^2 a = 0, \\ &A_\nu^\alpha(\boldsymbol{x}) = \lim_{|\xi^2|\to\infty} \eta_{\nu\gamma}^\alpha x_\gamma a(\xi, l, m), \\ &a(\xi, l, m) = \frac{1}{g\xi^2}\left\{1 + \left(-\frac{2l^2}{m^2 - l^2}\right)^{1/2} \times \right. \\ &\qquad \left. \times\, c\tilde{n}\left[\left(\frac{2}{m^2 - l^2}\right)^{1/2} \ln\left|\frac{\xi}{\xi_0}\right|, m, l\right]\right\}; \end{aligned} \tag{12}$$

здесь $c\tilde{n}f(\xi)$ — обобщенная эллиптическая функция Якоби; l, m — постоянные интегрирования.

Анализируя выражения (12), можно сделать вывод, что при $x_0 \to i0$ мы имеем стационарный магнитный монополь, который с течением времени начинает разрушаться и при $x_0 \to i\infty$ локальный магнитный момент исчезает и в системе возникает однородное сверхпроводящее состояние.

Токовое состояние будет обусловлено новыми солитонами. Действительно, решение для $A_\nu^\alpha(\boldsymbol{x})$ имеет вид

$$\begin{aligned} &A_\nu^\alpha(\boldsymbol{x}) = \lim_{|\xi^2|\to\infty} \eta_{\nu\gamma}^\alpha x_\gamma \frac{1}{g\xi^2} \times \\ &\times \left\{1 + \left(-\frac{2l^2}{m^2 - 1^2}\right)^{1/2} c\tilde{n}\left[\left(\frac{2}{m^2 - l^2}\right)^{1/2} \ln\left|\frac{\xi}{\xi_0}\right|, m, l\right]\right\}, \end{aligned}$$

причем первому солитону соответствует $m^2 = 1$, $l^2 = -1$, второму $l^2 = 0$, $m^2 = 1$. Дальнейшее изменение m, l позволяет получить решения, соответствующие другим солитонам.

Итак, мы рассмотрели механизм возникновения сверхпроводимости при разрушении неустойчивого солитона вблизи фазового перехода из сверхпроводящей фазы в парамагнитную. Его можно использовать и при рассмотрении фазового перехода из фазы сосуществования сверхпроводимости в сверхпроводящую фазу. Однако он возможен только тогда, когда последняя является однородной. Возникновение сверхпроводимости может быть эффективным только в области достаточно малой анизотропии продольной магнитной подсистемы, так как большая анизотропия препятствует возникновению точечных особенностей в системе, т. е. вдали от точки пересечения линий фазовых переходов. Следует также отметить, что возникновение неустойчивого солитона должно стабилизировать сверхпроводящее состояние. Поэтому фаза сосуществования сверхпроводимости и магнетизма скорее всего будет неустойчивой. Полученное выражение для тока J_0^α (10) описывает процесс компенсации магнитного момента при разрушении неустойчивого магнитного солитона. Действительно, J_0^α ориентирован по спину, поэтому интеграл от него по сфере отличен от нуля. Величину J_0^α можно интерпретировать как ток, поле которого компенсирует магнитный момент.

Список литературы

1. *Карчев О.Г., Савченко А.М.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2010. № 6. С. 110.
2. *Карчев О.Г., Савченко А.М.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2011. № 1. С. 3.
3. *Савченко М.А., Стефанович А.В.* // Письма в ЖЭТФ. 1979. **29**. С. 132.
4. *Бахнян М.К., Савченко А.М., Садовников Б.И.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2012. № 1. С. 131.
5. *Yang C.N., Mills R.G.* // Phys. Rev. 1954. **96**. P. 191.
6. *Lynn J.W., Shirane G.* // Phys. Rev. B. 1983. **24**. P. 3817.

Research of equations for generalized order parameter in magnetic systems

M. K. Bakhnyan[a], **B. I. Sadovnikov**[b], **A. M. Savchenko**[c]

Department of Quantum Statistics and Field Theory, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.
E-mail: [a] *bakhnyan@gmail.com,* [b] *a.m.savchenko@gmail.com,* [c] *sadovnikov@phys.msu.ru.*

The equations for generalized order parameter are received within the limits of exchange interaction model with the account of disordered magnetic sybsystem. The possibility of superconducting state emergence after the destruction of unstable soliton is under consideration.

Keywords: order parameter, soliton, phase transition.
PACS: 71.10.–w.
Received 18 March 2012.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 4(2012).

Сведения об авторах

1. Михаил Константинович Бахнян — аспирант; тел.: (495) 939-12-90, e-mail: bakhnyan@gmail.com.
2. Александр Максимович Савченко — докт. физ.-мат. наук, доцент, ст. преподаватель; тел.: (495) 421-53-96, e-mail: a.m.savchenko@gmail.com.
3. Борис Иосифович Садовников — докт. физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 932-80-10, e-mail: sadovnikov@phys.msu.ru.