

## Моделирование двухуровневых систем

А. В. Устинов

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра квантовой теории и физики высоких энергий. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.  
E-mail: richard\_zonne@mail.ru

Статья поступила 11.01.2012, подписана в печать 15.04.2012.

С использованием численных методов построена макроскопическая модель двухуровневой системы, которая содержит исключительно классические составляющие, но при этом воспроизводит квантовые распределения. Создана компьютерная аналогия процедуры измерений. Анализ распределений одночастичного состояния позволяет сравнить результаты с квантово-механическими. При моделировании двухчастичного синглетного состояния получены распределения вероятности и корреляционной функции, а также ограничения на значения параметра Белла. Результаты согласуются с квантово-механическими.

*Ключевые слова:* неравенство Белла, двухуровневая система, алгебраический подход, синглетное состояние, корреляционная функция.

УДК: 530.145. PACS: 03.65.Ud.

### Введение

В настоящей работе построена компьютерная модель макроскопической двухуровневой системы в рамках специального варианта алгебраического подхода к квантовой теории. Все подробности и обоснования этого можно найти в статьях [1, 2]. Особенностью задачи является вовсе не специфическая динамика, определяющая взаимодействие частей, а характер взаимодействия системы с внешней средой, которая служит для приготовления состояния либо для его измерения. Полученные результаты имеют статистический характер, и для их анализа применима классическая теория вероятностей. При этом в рамках модели получено нарушение неравенства Белла, хотя все рассуждения проводятся в соответствии с принципом локальности.

Основные положения алгебраического подхода опираются на утверждения и теоремы теории алгебр. При этом наблюдаемые  $\hat{A}$  физической системы являются эрмитовыми элементами некоторой  $C^*$ -алгебры  $\mathfrak{A}$  [3], а множество совместных (одновременно измеримых) наблюдаемых является максимальной действительной ассоциативной коммутативной подалгеброй  $\mathfrak{Q}_\xi$ . Индекс  $\xi$  отличает одну подалгебру от другой. Состояние таких классических подсистем, наблюдаемые которых принадлежат  $\mathfrak{Q}_\xi$ , описывается характером  $\varphi_\xi(\cdot)$ . То есть  $\hat{A} \xrightarrow{\varphi_\xi} \varphi_\xi(\hat{A})$  ( $\hat{A} \in \mathfrak{Q}_\xi$ ) — гомоморфное отображение подалгебры в множество действительных чисел.

Квантовую систему можно рассматривать как совокупность открытых классических подсистем. А каждая наблюдаемая, принадлежащая алгебре  $\mathfrak{A}$ , принадлежит какой-нибудь подалгебре  $\mathfrak{Q}_\xi$ . Постулируется, что результат каждого индивидуального измерения наблюдаемой определяется элементарным состоянием  $\varphi = [\varphi_\xi]$  физической системы,  $\varphi = [\varphi_\xi]$  — совокупность характеров всех подалгебр  $\mathfrak{Q}_\xi$ . Таким образом, знание элементарного состояния позволило бы однозначно предсказать результат измерения любой наблюдаемой. Однако экспериментально определить элементарное состояние системы невозможно, ведь одновременно измеримы

только совместные наблюдаемые. Поэтому вводится понятие  $\varphi_\eta$ -эквивалентности.

Два элементарных состояния  $\varphi$  и  $\varphi'$  являются  $\varphi_\eta$ -эквивалентными, если для всех  $\hat{A} \in \mathfrak{Q}_\eta$  справедливо равенство  $\varphi_\eta(\hat{A}) = \varphi'_\eta(\hat{A})$ , где  $\varphi_\eta \in \varphi$ ,  $\varphi'_\eta \in \varphi'$ .

Значит, экспериментально можно определить только класс эквивалентности элементарного состояния, который и обладает теми физическими свойствами, которые приписываются квантовому состоянию в традиционном подходе. Следовательно, алгебраический подход приводит к аналогичным теоретическим выводам. Очень важно, что элементарное состояние удовлетворяет требованиям, которые в колмогоровской теории вероятностей [4] предъявляются к элементарным событиям, а квантовое состояние — требованиям, предъявляемым пространству  $\Omega$  элементарных событий. Помимо элементарных в классической теории вероятностей рассматриваются вероятностные события  $F$ . Это подмножества множества  $\Omega$ , для которых может быть определена вероятностная мера  $P(F)$ . Для элементарных же событий (состояний), как это подчеркивается в [4], существование вероятностной меры вовсе не обязательно.

Следовательно, класс эквивалентности нужно оснастить структурой вероятностного пространства, что необходимо для вычислений. Это позволяет определить среднее значение наблюдаемой  $\hat{A}$  в квантовом состоянии  $\Psi_\eta$  с помощью вероятностного среднего по пространству элементарных событий:  $\Psi_{\varphi_\eta}(\hat{A}) = \int_{\varphi \in \{\varphi\}_{\varphi_\eta}} P_{\hat{A}}(d\varphi) \varphi_\xi(\hat{A})$ . Естественно, данный функционал должен удовлетворять условиям линейности и единственности.

Стоит отметить, что с помощью канонической конструкции Гельфанда–Найма–Сигала можно построить представление алгебры  $\mathfrak{A}$ . То есть сконструировать соответствующее этой алгебре гильбертово пространство  $\mathfrak{H}$ . Так фактически воспроизводится стандартный аппарат квантовой механики. Соответствующие выкладки проделаны в работах [5, 6].

### 1. Модель двухуровневой системы

Рассмотрим конкретную модель двухуровневой системы, аналогом которой может являться частица со спином  $1/2$ . Теоретическое рассмотрение проведено в работах [1, 7]. В дальнейшем будет использоваться спиновая терминология. Но это не означает, что динамика исследуемой системы совпадает с динамикой фермиона. Не означает это и исследование специфических трансформационных свойств спиноров.

Модель представляет собой сферу единичного радиуса. Как показано в работе [7], наглядно изобразить каждое элементарное состояние такой системы можно с помощью СЭС — сферы элементарного состояния, раскрасив произвольно поверхность черными и белыми точками. При этом на концах каждого диаметра расположены точки разного цвета. Для измерения проекции спина следует провести из центра СЭС единичный вектор  $\mathbf{r}$  по необходимому направлению. Если вектор упрется в черную (белую) точку на сфере, то результат измерения будет  $+1/2$  ( $-1/2$ ).

Очень близкие точки на сфере могут иметь разную окраску — это следствие дискретности системы. Но при работе с некоторым квантовым состоянием, т.е. с некоторым множеством СЭС, малый поворот прибора в среднем вызывает малое изменение результата. Поэтому с точки зрения нахождения средних значений мы можем заменить в квантовом состоянии множество поточечно раскрашенных сфер множеством гладко раскрашенных. Для этого будем считать, что все сферы имеют одинаковую раскраску и отличаются друг от друга только своей ориентацией. Каждая СЭС окрашена следующим образом. «Северный» магнитный полюс — черный ( $+1$ ), противоположный ему «южный» магнитный полюс — белый ( $-1$ ). Промежуточные же области имеют серую окраску, насыщенность которой черным цветом меняется по закону  $\rho = (\mathbf{r}\mathbf{R})$ . Здесь  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, определяющий направление измерений, а  $\mathbf{R}$  — северный магнитный полюс.

Предложенный «серый» способ раскраски решает проблему плавного изменения регистрируемых средних значений, но создает новую проблему. При каждом измерении прибор должен регистрировать для проекции спина либо значение  $+1/2$ , либо значение  $-1/2$ , а не какое-то промежуточное «серое» значение. Для решения этой проблемы в работе [7] был предложен следующий рецепт. Изменим представление элементарного состояния. Будем считать теперь, что оно характеризуется многослойной серо-раскрашенной сферой (МСС), где каждый слой имеет раскраску  $\rho = (\mathbf{r}\mathbf{R})$ , но различные слои имеют различную ориентацию. Ориентация  $k$ -го слоя задается вектором  $\mathbf{R}(k)$ . Кроме того, для описания элементарного состояния вводится вспомогательная переменная  $\varepsilon$ . Тогда каждому значению радиус-вектора  $\mathbf{r}$ , проведенному в произвольную точку сферы, переменная  $\varepsilon$  сопоставляет значение  $\varepsilon(\mathbf{r})$ . Для разных слоев сфер функции  $\varepsilon_k(\mathbf{r})$  могут быть разными, но все они удовлетворяют условию  $-1/2 \leq \varepsilon_k(\mathbf{r}) \leq 1/2$ .

Эта новая переменная выделяет в каждой МСС так называемый активный слой, который имеет номер  $k$  и является самым верхним, для которого выполняется условие  $|(\mathbf{R}^{(k)}\mathbf{r}) + \varepsilon_k(\mathbf{r})| \geq 1/2$ . Можно легко убедиться, что активный слой существует для любого направле-

ния измерений  $\mathbf{r}$ . Сопоставим теперь каждой такой МСС, оснащенной функцией  $\varepsilon(\mathbf{r})$ , сферу элементарного состояния (СЭС) по следующему правилу. Если у рассматриваемой МСС активный слой имеет номер  $k$ , то в соответствующей СЭС радиус-вектор  $\mathbf{r}$  упирается в черную точку ( $j = +1$ ) при условии  $(\mathbf{R}^{(k)}\mathbf{r}) \geq 0$  и в белую точку ( $j = -1$ ) при условии  $(\mathbf{R}^{(k)}\mathbf{r}) < 0$ . Такова процедура измерений в системе.

Теперь, чтобы привязать нашу модель к квантовой теории, рассмотрим квантовое состояние  $\Psi_n$ , которое характеризуется значением  $+1/2$  проекции спина на направление  $\mathbf{n}$ . Сопоставим ему множество МСС  $\{\varphi\}_n^+$ , для которых в каждом слое  $k$  радиус-вектор  $\mathbf{R}^{(k)}$  северного магнитного полюса принадлежит верхней полусфере  $\mathfrak{R}_n^+$  с центральным направлением  $\mathbf{n}$ . Направления полюсов для разных слоев случайно и независимо друг от друга распределены по  $\mathfrak{R}_n^+$ . Каждая такая МСС оснащена случайной функцией  $\varepsilon(\mathbf{r})$ :  $-1/2 \leq \varepsilon(\mathbf{r}) \leq 1/2$ . Очевидно, что такие сферы действительно образуют требуемое квантовое состояние, ведь  $(\mathbf{n}\mathbf{R}^{(k)}) > 0$ , а следовательно,  $(\mathbf{R}^{(k)}\mathbf{n}) + \varepsilon(\mathbf{n}) > -1/2$ . Таким образом, на направление  $\mathbf{n}$  проекцию спина  $-1/2$  мы никогда не получим. Физически такой выбор квантового состояния соответствует ситуации, когда спин  $1/2$  ориентирован вдоль оси  $\mathbf{n}$ .

Для получения физического результата необходимо определить еще вероятностную меру. Она соответствует вероятностным событиям, которые являются некоторыми подмножествами множества всех элементарных исходов. Поэтому для каждого значения  $\mathbf{r}$  строится своя система таких подмножеств, своя  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{F}_r$ . Это согласуется с квантовой ситуацией и является ключевым моментом моделирования. Образующие  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}_r$  при фиксированном векторе  $\mathbf{r}$  определяются следующими условиями.

1. Фиксирован интервал  $(\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon)$ , где параметр  $\varepsilon$  удовлетворяет неравенствам  $-1/2 \leq \varepsilon \leq +1/2$ . Далее сам интервал и его длину будем обозначать единым символом  $d\varepsilon$ .

2. Либо  $\varepsilon(\mathbf{r}) \in d\varepsilon$ , либо  $-\varepsilon(\mathbf{r}) \in d\varepsilon$ . Оба варианта соответствуют одному подмножеству.

3. Фиксирован номер  $k$  активного слоя.

4. Каждое подмножество состоит из всех МСС, для слоев которых выполняется одно из условий

$$\begin{aligned} |(\mathbf{R}^{(k')}\mathbf{r}) + \varepsilon_{k'}(\mathbf{r})| &\geq 1/2, & k' = k, \\ |(\mathbf{R}^{(k')}\mathbf{r}) + \varepsilon_{k'}(\mathbf{r})| &< 1/2, & k' \leq k. \end{aligned} \quad (1)$$

Эти случаи соответствуют разным подмножествам.

5. В случае  $|(\mathbf{R}^{(k)}\mathbf{r}) + \varepsilon_k(\mathbf{r})| \geq 1/2$  подмножества различаются еще по одному признаку: либо  $(\mathbf{R}^{(k)}\mathbf{r}) \geq 0$ , либо  $(\mathbf{R}^{(k)}\mathbf{r}) < 0$ .

Эти факты являются базовыми при построении компьютерной модели измерений. А пока заметим, что вне зависимости от  $\mathbf{r}$  любое элементарное событие из  $\{\varphi\}_n^+$  принадлежит какому-нибудь из перечисленных подмножеств при некотором  $\varepsilon$ .

### 2. Одночастичное состояние

В основе компьютерного моделирования системы лежит генерация многослойных сфер, каждый слой которых характеризуется своим вектором магнитного

полюса  $\mathbf{R}^{(k)}$  и функцией  $\varepsilon_k(\mathbf{r})$ , т.е. четырьмя случайными величинами. Для получения распределения вероятности необходимо набрать достаточную статистику экспериментов при некотором направлении измерений  $\mathbf{r}$ . Для реализации данной задачи подойдет один из простейших механизмов генерации псевдослучайных чисел — линейный конгруэнтный генератор. В стандартных библиотечных функциях этот генератор подобран с оптимальными параметрами, обеспечивающими достаточно большой период повторений. И этого для нашей цели вполне достаточно. Этот механизм заключается в итеративном применении следующей формулы:  $X_{k+1} = (aX_k + c) \bmod (M)$ . Здесь  $a$ ,  $c$ ,  $M$  — специально подобранные постоянные. То есть каждое последующее генерируемое число является остатком от деления линейной комбинации предыдущего на число  $M$ . Недостатком этого метода считается его низкая криптографическая стойкость, но в данной задаче это не важно. И, наконец, при проведении моделирования результаты, полученные данным генератором, сравнивались с результатами, которые предоставил один из самых лучших на данный момент алгоритмов — алгоритм Л'Экюера. И простота в данном конкретном случае не проиграла.

Для моделирования квантового состояния необходимо получить равномерное распределение векторов магнитных полюсов  $\mathbf{R}^{(k)}$  по верхней полусфере относительно направления  $\mathbf{n}$ . Без ограничения общности можно считать, что вектор  $\mathbf{n}$  сонаправлен с осью  $z$ . Один из возможных способов — это генерирование псевдослучайных сферических углов  $\theta \in [0; \pi/2]$  и  $\varphi \in [0; 2\pi]$ . Но из-за наличия весовой функции  $\sin(\theta)$  в криволинейных координатах такое распределение не будет равномерным, ведь экваториальные зоны будут более предпочтительными  $\theta \simeq \pi/2$ . Это предположение было подтверждено экспериментально в ходе работы.

В декартовых координатах такой проблемы возникнуть не может. И при случайном бросании точки в кубик  $\{x \in [-1; 1]; y \in [-1; 1]; z \in [-1; 1]\}$  все направления равновероятны. А в такой куб уже можно вписать сферу единичного радиуса. Если при генерации точка, брошенная в кубик, попала внутрь сферы, то можно спроецировать ее на поверхность, перенормировав координаты. При моделировании заданного квантового состояния векторы  $\mathbf{R}^{(k)}$  разбросаны по верхней полусфере, поэтому координата  $z$  генерируется в пределах  $z \in [0; 1]$ . Если же точка, брошенная в кубик, не попадает в сферу, то процедура повторяется. При таком способе возникают лишние затраты, ведь вероятность попадания точки внутрь сферы, согласно формулам геометрической вероятности,  $P = V_{\text{hemisphere}}/V_{\text{cube}} = \frac{2}{3}\pi R^3/4 = \pi/6$ . Однако производительности вычислительных систем для расчетов хватает, а сам механизм генерации получается очень наглядным.

Чтобы полностью задать слой МСС, остается сгенерировать функцию  $\varepsilon_k(\mathbf{r}) \in [-1/2; +1/2]$ . И это достигается прямым использованием линейного конгруэнтного генератора. Для получения единичного результата из сгенерированных параметров составляется комбинация  $\rho = (\mathbf{R}^{(k)}\mathbf{r}) + \varepsilon_k(\mathbf{r})$ . Тогда разовый эксперимент считается произведенным при нахождении активного слоя МСС:  $|\rho| = |(\mathbf{R}^{(k)}\mathbf{r}) + \varepsilon_k(\mathbf{r})| \geq 1/2$ . Если же неравенство не

выполнено, происходит переход на новый слой МСС, т.е. генерация новых параметров  $\mathbf{R}^{(k)}$  и  $\varepsilon_k(\mathbf{r})$ , при том же, разумеется, значении  $\mathbf{r}$ . По активному слою определяется результат единичного эксперимента: если  $(\mathbf{R}^{(k)}\mathbf{r}) \geq 0$ , то результат измерения проекции равен  $j = +1/2$ ; если же  $(\mathbf{R}^{(k)}\mathbf{r}) < 0$  — результат  $j = -1/2$ .

Полученные данные образуют статистику, по которой определяется вероятность получения того или иного значения проекции на заданное направление  $\mathbf{r}$ . Мощность статистики, т.е. суммарное количество полученных результатов при определенном значении  $\mathbf{r}$ , равнялась  $W = 40\,000\,000$ , что обеспечило хорошую точность. Такие результаты были получены для различных направлений измерения, чтобы их можно было сравнить с квантово-механическим распределением для спина. В табл. 1 представлен результат моделирования для вероятности обнаружения положительной проекции спина на заданное направление. Аналогичный по точности результат получен и для отрицательной проекции.

Таблица 1

**Результаты моделирования одночастичного состояния двухуровневой системы. Вероятность  $P_+$  измерения проекции спина  $j = +1/2$  вдоль полярного угла  $\theta$**

Полярный угол $\theta$	Квантово-механический результат, %	Итоги моделирования, %
0	100.00	100.00
$\pi/10$	97.552	97.554
$2\pi/10$	90.450	90.447
$3\pi/10$	79.389	79.373
$4\pi/10$	65.450	65.468
$5\pi/10$	50.000	49.982
$6\pi/10$	34.549	34.549
$7\pi/10$	20.610	20.609
$8\pi/10$	9.549	9.545
$9\pi/10$	2.447	2.451
$\pi$	0.000	0.000

Важным моментом проверки теории являлось подтверждение того факта, что успешный результат, т.е. выполнение неравенства  $|\rho| = |(\mathbf{R}^{(k)}\mathbf{r}) + \varepsilon_k(\mathbf{r})| \geq 1/2$ , происходит в 50 процентах случаев уже в первой попытке. Итоговое максимальное отклонение количества успешных первых попыток от величины  $W/2$  составило менее сотой доли процента.

И еще, как известно из теории вероятностей, для большинства гауссоподобных статистик относительная ошибка измерений ведет себя с ростом числа попыток как функция:  $\epsilon(N) \sim O(\frac{1}{\sqrt{N}})$ ,  $N \rightarrow \infty$ . Определить такую зависимость при моделировании важно, ведь она фактически гарантирует сходимость результата в пределе и отсутствие каких-либо систематических ошибок. И такое изучение было проведено. Усредненная по всем направлениям  $\mathbf{r}$  относительная ошибка измерений демонстрировала нужную гауссоподобную зависимость от числа экспериментов.

Таким образом, получено полное совпадение результатов с квантово-механическим распределением вероятности измерения проекции  $j$  на направление  $\mathbf{r}$ , если спин ориентирован вдоль  $\mathbf{n}$ :

$$P_n(\mathbf{r}, j) = \frac{1}{2}(1 + j(\mathbf{r}\mathbf{n})). \quad (2)$$

Это указывает на правомерность модели, ведь все измерения были проведены для ансамблей макроскопических систем. Никакой специфической динамики, напомним, в модели нет. Все определяется только процедурой измерения.

### 3. Двухчастичное синглетное состояние

Рассмотрим теперь физическую систему из двух квазичастиц. Причем интерес для нас будет представлять синглетное состояние, т.е. с полным спином, равным нулю. Значит,  $S_r = S_{1r} + S_{2r} = 0$  для любого  $\mathbf{r}$ , где  $S_{1r}$  и  $S_{2r}$  — зарегистрированные значения проекции спина для первой и второй частицы. Данное равенство предполагает жесткую корреляцию между результатами измерения для первой и второй частицы вне зависимости от того, как далеко друг от друга они расположены в момент измерения. Это является ключевым пунктом в знаменитом парадоксе Эйнштейна–Подольского–Розена [8] и в неравенствах Белла [9, 10]. Подобный эксперимент можно провести и в рамках данной модели. Что касается параметра Белла, то поработать мы будем в варианте [11].

Элементарное состояние синглетной системы подразумевает жесткую корреляцию между частицами. МСС для второй частицы будет зеркальной копией МСС для первой частицы. То есть каждый слой в таких совокупностях сфер для второй частицы повторяет слой для первой с точностью до смены ориентации на противоположную:  $\mathbf{R}_1^k + \mathbf{R}_2^k = 0$ . Здесь  $\mathbf{R}_1^k$  и  $\mathbf{R}_2^k$  — векторы ориентации  $k$ -го слоя для первой и второй частицы. Кроме того, ограничение синглетного состояния влияет и на функции  $\varepsilon(\mathbf{r})$ . Для частиц они удовлетворяют условию  $\varepsilon_1(\mathbf{r}) = \varepsilon_2(-\mathbf{r})$ . Все это означает, что номера активных слоев в МСС для первой и второй частицы совпадают.

Таким образом, для задания множества элементарных состояний, соответствующих синглетному квантовому состоянию двухуровневой системы, достаточно задать множество элементарных состояний для первой частицы. Генерация параметров производится только для одной МСС. Единственное отличие заключается в том, что квантовое состояние для синглета описывается МСС, у которых магнитные полюса слоев разбросаны случайно и независимо уже по всей сфере. Каждый слой оснащен функцией  $\varepsilon(\mathbf{r})$ , выделяющей среди них активный. Как и для одночастичного состояния, функции  $\varepsilon(\mathbf{r})$  случайны и удовлетворяют условиям, описанным выше.

Что касается непосредственной численной реализации, процедура отыскания активного слоя одночастичного состояния уже была описана. Для двухчастичного случая возможно несколько эквивалентных вариантов моделирования процедуры измерения, но главной остается идея о зеркальном отражении каждого слоя сфер различных частиц. Это относится именно к процедуре приготовления состояния.

Вероятностную меру можно приписать только событиям, принадлежащим некоторой  $\sigma$ -алгебре. Такое вероятностное пространство синглетного состояния определяется следующими условиями.

1. Фиксированы векторы  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ , которые определяют направление измерений спина для частиц. Они задаются при моделировании.

2. Фиксирован интервал  $d\varepsilon$ , где  $-1/2 \leq \varepsilon \leq +1/2$ . Либо  $\varepsilon(\mathbf{r}_1) \in d\varepsilon$ , либо  $-\varepsilon(\mathbf{r}_1) \in d\varepsilon$ . На этом этапе происходит генерация параметров слоя МСС первой частицы:  $\mathbf{R}_1^{(k)}$  и  $\varepsilon_k(\mathbf{r}_1)$ .

3. Фиксирован номер  $k$  активного слоя. Это достигается вычислением по сгенерированным параметрам величины  $\rho = (\mathbf{R}_1^{(k)} \mathbf{r}_1) + \varepsilon_k(\mathbf{r}_1)$ .

4. Каждое подмножество состоит из всех МСС, принадлежащих  $\{\varphi\}^0$ , для слоев которых выполняется одно из условий

$$\begin{aligned} |(\mathbf{R}_1^{(k')} \mathbf{r}_1) + \varepsilon(\mathbf{r}_1)| &\geq 1/2, & k' = k, \\ |(\mathbf{R}_1^{(k')} \mathbf{r}_1) + \varepsilon(\mathbf{r}_1)| &< 1/2, & k' \neq k. \end{aligned} \quad (3)$$

Эти случаи соответствуют разным подмножествам. Номера активных слоев для обеих частиц совпадают.

5. Для активных слоев подмножества различаются еще по двум параметрам  $j_1$  и  $j_2$ , которые определяют результат единичного измерения и значения проекций спина:  $j_1 = +1$ , если  $(\mathbf{R}_1^{(k)} \mathbf{r}_1) > 0$ ;  $j_1 = -1$ , если  $(\mathbf{R}_1^{(k)} \mathbf{r}_1) \leq 0$ ;  $j_2 = +1$ , если  $(\mathbf{R}_2^{(k)} \mathbf{r}_2) > 0$ ;  $j_2 = -1$ , если  $(\mathbf{R}_2^{(k)} \mathbf{r}_2) \leq 0$ . Если же слой не активный, т.е. неравенство  $|(\mathbf{R}_1^{(k')} \mathbf{r}_1) + \varepsilon(\mathbf{r}_1)| \geq 1/2$  не выполнено, происходит переход на новый слой, а значит генерируются новые параметры.

Легко проверить, что любое элементарное состояние из множества  $\{\varphi\}^0$ , независимо от направлений  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ , принадлежит некоторому из таких вероятностных подмножеств.

Полученные в результате единичных экспериментов данные образуют статистику, по которой и определяются распределения вероятностей. Такие измерения были получены для различных направлений  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ , чтобы их можно было сравнить с квантово-механическим распределением для спина. Мощность статистики равнялась  $W = 10\,000\,000$ . Это обеспечило хорошую точность. В табл. 2 представлен один из четырех результатов моделирования. Для вероятностей регистрации отрицательных  $P_{--}$  и знакопеременных  $P_{+-}$  и  $P_{-+}$  значений проекций получены аналогичные по точности соответствия с выражением из квантовой теории

$$P_{j_1 j_2}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{4}(1 - j_1 j_2(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)), \quad (4)$$

описывающим вероятность обнаружить у первой частицы по направлению  $\mathbf{r}_1$  проекцию спина, равную  $j_1/2$ , а у второй — значение  $j_2/2$  по направлению  $\mathbf{r}_2$ .

Отметим, что при моделировании получился результат: при  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$  и  $j_1 = j_2$  вероятность равна нулю. Таким образом, в рамках заданной модели для синглетного состояния был успешно поставлен ЭПР-эксперимент.

Вторым важным этапом при моделировании синглетного состояния являлась проверка корреляционных свойств. Для этого определим функцию корреляции

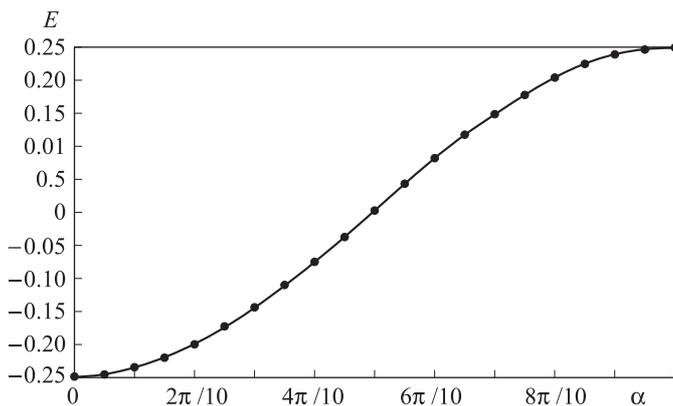
Таблица 2  
**Зависимость вероятности регистрации одинаковых значений проекций двух спинов  $P_{++}$  для синглетного состояния на направления  $r_1$  и  $r_2$  соответственно в зависимости от угла  $\theta$  между ними**

Полярный угол $\theta$	Квантово-механический результат, %	Итоги моделирования, %
0	0.000	0.000
$\pi/10$	1.223	1.215
$2\pi/10$	4.774	4.804
$3\pi/10$	10.30	10.30
$4\pi/10$	17.27	17.25
$5\pi/10$	25.00	24.99
$6\pi/10$	32.72	32.70
$7\pi/10$	39.69	39.64
$8\pi/10$	45.22	45.19
$9\pi/10$	48.77	48.80
$\pi$	50.00	50.04

частиц  $E(r_1, r_2)$  — среднее значение произведения проекции спинов двух частиц на направления  $r_1$  и  $r_2$ :

$$E(r_1, r_2) = \frac{1}{4} \sum_{j_1, j_2} j_1 j_2 P_{j_1 j_2}(r_1, r_2). \quad (5)$$

Используя вычисленные значения вероятностей, можно определить экспериментальное значение этой величины. В квантовой теории эта функция имеет вид  $E(r_1, r_2) = -\frac{1}{4}(r_1 r_2) = -\frac{1}{4} \cos \theta$ , где  $\theta$  — угол между  $r_1$  и  $r_2$ . Как видно из рисунка, результаты совпадают. Полученные в результате численного моделирования точки точно ложатся на квантово-механическую синусоиду.



Зависимость функции корреляции  $E(r_1, r_2)$  для синглетного состояния от угла  $\alpha$  между векторами  $r_1$  и  $r_2$ . Точки на графике — результаты моделирования. Плавная кривая описывает квантово-механический результат

Знание функций корреляции позволяет вычислить параметр Белла. Он, как известно, определяется корреляциями по четырем направлениям:  $a$  и  $a'$  для

первой частицы и  $b$  и  $b'$  — для второй. Максимальное отклонение численно рассчитанного значения этого параметра от ограничений Белла наблюдается, так же как и в случае квантовой механики, при углах  $\theta_a = \frac{\pi}{8}$ ,  $\theta_{a'} = \frac{3\pi}{8}$ ,  $\theta_b = 0$  и  $\theta_{b'} = \frac{\pi}{4}$ .

Результат компьютерного моделирования:

$$S = 0.707. \quad (6)$$

Таково и максимальное значение параметра Белла в квантовой механике, тогда как в классической теории оно не может превышать  $1/2$ .

### Заключение

Все результаты численного моделирования предложенной в работе [7] системы совпали с квантово-механическими. Хотя данная система является макроскопической и никакой квантовой динамикой не обладает. Ни квантовая логика, ни квантовая теория вероятностей при этом не использовались. И никакого действия на расстоянии в системе нет. Каждый физический результат имеет вполне материальную локальную причину. Это противоречит модному сейчас утверждению, что современные эксперименты доказывают отсутствие локальной физической реальности, являющейся причиной квантовых явлений.

С другой стороны, предложенная модель не противоречит утверждению Эйнштейна, что описание физических явлений с помощью квантового состояния не является полным. В данном варианте алгебраического подхода эта неполнота восполняется привлечением к описанию нового понятия — элементарное состояние.

Распределения вероятностей и корреляционных функций были получены исключительно в рамках классической теории вероятностей. Еще раз напомним, что в эксперименте для каждого прибора, т. е. для каждого направления  $r$ , конструировалась своя  $\sigma$ -алгебра, и она была жестко с ним закреплена. Универсального же распределения в данной модели нет, так что этот аргумент, предъявляемый многими физиками к доказательству самого Белла, в нашем случае неправилен. А между тем полученный результат нарушает неравенства Белла.

Что же касается локальности модели, причина корреляций между результатами измерений для первой и второй частицы формируется не в момент измерения, а в момент приготовления синглетного состояния. Конкретно эта корреляция обусловлена тем, что у обеих частиц в каждом элементарном состоянии номера активных слоев в МСС совпадают. Конечно, предполагается, что каждый из двух измерительных приборов может самостоятельно обнаруживать этот активный слой у своей частицы.

Для обработки данных и установления корреляций между результатами измерений для первой и второй частицы результаты должны быть собраны в одном месте. В этом смысле этот этап с необходимостью будет нелокальным. Однако это не является особенностью квантового эксперимента, то же самое справедливо и для классического. Нелокальность, таким образом, проявляется только на этапе обработки, но не измерения.

Для этой модели характерна специфическая процедура измерения, однако ни одного подгоночного пара-

метра в ней нет. Поэтому описанная процедура может быть рассмотрена как действующая модель квантового измерения, а не как его имитация. А значит, она пригодна для проведения экспериментов с целью проверки тех или иных утверждений относительно квантовых систем, в особенности опровергающих.

Автор признателен профессору Д. А. Славнову за ценные замечания и полезные обсуждения.

### Список литературы

1. Славнов Д.А. // ТМФ. 2006. **149**, № 3. С. 457.
2. Славнов Д.А. // ЭЧАЯ. 2007. **38**, № 2. С. 295.
3. Диксмье Ж.  $C^*$ -алгебры и их представления. М., 1974.
4. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. М., 1974.
5. Эмх Ж. Алгебраический подход в статистической механике и квантовой теории поля. М., 1976.
6. Наймарк М.А. Нормированные кольца. М., 1968.
7. Славнов Д.А. // ЭЧАЯ. 2010. **41**, № 5. С. 1425.
8. Эйнштейн А., Подольский Б., Розен Н. // УФН. 1936. **16**, № 4. Р. 440.
9. Bell J.S. // Physics. 1965. **1**, N 3. P. 195.
10. Bell J.S. On the Einstein–Podolsky–Rosen paradox. Speakable and unspeakable in quantum mechanics // Collected papers on quantum philosophy. Cambridge, 1993. P. 139.
11. Clauser J.F., Horne M.A., Shimony A. // Phys. Rev. Lett. 1969. **23**, N 15. P. 880.

## Two-level systems simulation

A. V. Ustinov

*Department of Quantum Theory and High Energy Physics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.*

*E-mail: richard\_zonne@mail.ru.*

With the use of numerical methods a computer model of a macroscopic two-level system was constructed, which consists of the classic components, but it reproduces the quantum distributions. A key role is given to modeling the measurement procedure in the system. The model was created on the basis of some variant of the algebraic approach to quantum theory. There are no specific dynamics and adjustable parameters in the system. The result is based on the classical theory of probability. Particular attention is paid to the requirement of measurability of the probability space. The correlation properties of the system were studied during the simulating the two-particle singlet state. Finally, limits on the value of Bell in this model were obtained. All these results are consistent with the predictions of quantum mechanics. However, the model is built under the concept of locality and causality. The further applications of simulation results to study various properties of quantum systems are possible.

*Keywords:* two-level system, the algebraic approach to quantum theory, singlet state, correlation function, Bell inequality.

PACS: 03.65.Ud.

*Received 11 January 2012.*

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 4(2012).

### Сведения об авторе

Устинов Алексей Викторович — аспирант; e-mail: richard\_zonne@mail.ru.