Метод конечных элементов для решения скалярной задачи дифракции на двумерных рассеивателях сложной структуры

Д. А. Коняев

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
E-mail: [a] konyaev@physics.msu.ru

Статья поступила 20.03.2012, подписана в печать 24.04.2012.

Скалярная задача дифракции падающего поля на двумерных областях сложной структуры решена методом конечных элементов. Показано хорошее согласие результатов численного счета с точным решением задачи дифракции плоской волны на бесконечном цилиндре. В заключение представлены примеры, демонстрирующие основные возможности программы.

Ключевые слова: задача дифракции, метод конечных элементов, условия излучения.
УДК: 534.26. PACS: 43.20.Fn.

Введение

Цель настоящей работы состоит в реализации метода конечных элементов для решения скалярной задачи дифракции падающего поля на двумерных областях сложной структуры.

Существующие численные методы решения задачи дифракции можно разделить на два типа — основанные на сведении исходной дифференциальной задачи к интегральному уравнению и непосредственное решение краевой задачи сеточными методами [1–4]. Процедура решения задачи дифракции основана на рассмотрении краевой задачи. Наиболее универсальным является метод конечных элементов. Существует достаточно много коммерческих пакетов, реализующих этот метод. Типичным представителем таких пакетов является FEMLAB. Однако общим недостатком коммерческих продуктов является принцип черного ящика, вследствие чего модернизация данного продукта под конкретные задачи, с более сложными граничными условиями, не представляется возможной.

Основная сложность при применении метода конечных элементов к задаче дифракции заключается в неограниченности области и трудности учета условий излучения. Одним из возможных решений данной проблемы является постановка парциальных условий излучения [3] на конечном расстоянии от рассеивателей. Подобные условия излучения определяются сложным интегро-дифференциальным оператором и не учитываются в коммерческих конечно-элементных пакетах или свободно распространяемых программах.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу дифракции падающей плоской волны на рассеивателях сложной геометрии:

$$\begin{cases} \Delta(v+v_0)+k^2(x,y)(v+v_0)=0, & (x,y)\in\Omega,\\ \dfrac{\partial(v+v_0)}{\partial n}+p(x,y)(v+v_0)=h(x,y), & (x,y)\in\partial\Omega,\\ \lim\limits_{r\to\infty}\sqrt{r}\left(\dfrac{\partial v}{\partial n}-ikv\right)=0, \end{cases}$$

где $v_0=e^{-ikx}$ — падающая волна, v — рассеянное поле, удовлетворяющее условиям излучения Зоммерфельда.

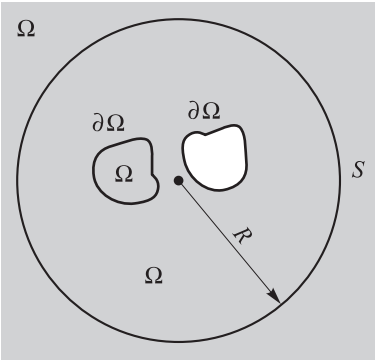

Рис. 1. Пример области, в которой решается задача дифракции. Область Ω (серый цвет) представляет собой двумерное пространство, из которого исключены подобласти, соответствующие непроницаемым рассеивателям

Область Ω, представленная на рис. 1, представляет собой двумерное пространство, из которого исключены подобласти (выделены цветом), соответствующие непроницаемым рассеивателям.

Ограничим область Ω внешней границей S — окружностью радиуса R. На окружности S возможна постановка точных граничных условий, которую осуществим, следуя [3]. Задача примет вид

$$\begin{cases} \Delta(v+v_0)+k^2(x,y)(v+v_0)=0, & (x,y)\in\Omega,\\ \dfrac{\partial(v+v_0)}{\partial n}+p(x,y)(v+v_0)=h(x,y), & (x,y)\in\partial\Omega,\\ \left.\dfrac{\partial v}{\partial r}\right|_{r=R}=\left(\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}\dfrac{\frac{dH_m^{(1)}(kr)}{dr}}{H_m^{(1)}(kr)}\times\right.\\ \left.\times\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}ve^{-im(\varphi-\pi/2)}\,d\varphi\right]e^{im(\varphi-\pi/2)}\right)\Bigg|_{r=R}. \end{cases}$$

Заменим точное условие приближенным условием на введенной окружности. Следуя [5],

$$v|_{(r-R)\ll 1}\approx A_1(\varphi)\frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}}+A_2(\varphi)\frac{e^{ikr}}{r^{3/2}}+\ldots\ .$$

Доказательство возможности такого разложения можно провести по аналогии с доказательством аналогичного утверждения для трехмерного случая, представленного в [6]. Следуя [5], запишем производную этой функции:

$$\frac{\partial v}{\partial r}\Big|_{(r-R)\ll 1} \approx ikA_1(\varphi)\frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} - \frac{1}{2}A_1(\varphi)\frac{e^{ikr}}{r^{3/2}} + \ldots \approx ikv - \frac{1}{2r}v.$$

Таким образом, при $r = R$ получим приближенные условия излучения [5]

$$\left(\frac{\partial v}{\partial r} - ikv + \frac{1}{2r}v\right)\Big|_{r=R} = 0.$$

В результате задача примет вид

$$\begin{cases} \Delta(v+v_0) + k^2(x,y)(v+v_0) = 0, & (x,y)\in\Omega, \\ \dfrac{\partial(v+v_0)}{\partial n} + p(x,y)(v+v_0) = h(x,y), & (x,y)\in\partial\Omega, \\ \left(\dfrac{\partial v}{\partial r} - ikv + \dfrac{1}{2r}v\right)\Big|_{r=R} = 0. \end{cases}$$

2. Численный алгоритм решения задачи дифракции, основанный на методе конечных элементов

Численный алгоритм решения задачи дифракции, основанный на методе конечных элементов, можно разбить на три части: построение треугольной сетки в заданной области, сборка матрицы дискретной задачи, решение системы линейных алгебраических уравнений. Два последних пункта собственно и представляют собой метод конечных элементов. Далее рассматривается каждая из этих частей.

2.1. Построение треугольной сетки

Для построения сетки в программе реализован метод граничной коррекции, позволяющий строить треугольные сетки в областях следующего вида.

Основная область Ω задается неравенством $F(r,\theta,\varphi) \leqslant 0$ (в двумерном случае $F(r,\varphi)\leqslant 0$). На область наложены следующие ограничения: функция в левой части неравенства является гладкой, что обеспечивает отсутствие «ребер» и «особых точек» на границе. Предполагается, что точка $(0,0,0)$ лежит внутри области, т. е. известно, что $F(0,0,0)\leqslant 0$ (существует возможность в качестве «центра» области задать произвольную точку (x,y,z)). Аналогичным образом (неравенством) можно задать «вырезы» и «вставки» (отличаются от вырезанных подобластей наличием согласованной сетки внутри подобласти).

Подробнее ознакомиться с методами триангуляции можно в [7, 8, 12, 13].

2.2. Метод конечных элементов

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} Lu = f, & (x,y)\in\Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = \Psi u, & (x,y)\in\partial\Omega, \end{cases}$$

где u, f — функции r, Ω — произвольная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Заметим, что и задача и последующие выкладки, вплоть до сборки матриц, справедливы как для двумерного, так и для трехмерного случая. Будем рассматривать $\Psi u = -pu + h$ и $\mathcal{L}u = -(\nabla^2 - k^2)u$, где p, h, k — функции r'', а также рассмотрим задачу в слабой постановке согласно [9]. Найдем функцию $u\in L_2(\Omega)$ такую, что

$$(\mathcal{L}u, v)_{L_2(\Omega)} - (f,v)_{L_2(\Omega)} + \left(\frac{\partial u}{\partial n}, v\right)_{L_2(\partial\Omega)} - (\Psi u, v)_{L_2(\partial\Omega)} = 0.$$

Воспользуемся первой формулой Грина:

$$0 = (\nabla u, \nabla v)_{L_2(\Omega)} - \left(\frac{\partial u}{\partial n}, v\right)_{L_2(\partial\Omega)} - \\ - (f,v)_{L_2(\Omega)} + \left(\frac{\partial u}{\partial n}, v\right)_{L_2(\partial\Omega)} - (\Psi u, v)_{L_2(\partial\Omega)} = \\ = \int\limits_{\Omega}\left\{\nabla u\nabla\overline{v} + k^2 u\overline{v}\right\} dV - \int\limits_{\Omega} f\overline{v} - \oint\limits_{\partial\Omega}(h\overline{v} - pu\overline{v})\, dS.$$

Пусть теперь Ω — двумерная область ($dV = dx\,dy$), удовлетворяющая требованиям, предъявляемым к области при использовании выбранного способа построения триангуляции. Далее при помощи этого способа, строится треугольная сетка внутри Ω. Введем набор кусочно-линейных функций v_n с конечным носителем, таких, что они принимают значение, равное единице в узле сетки с номером n, равны нулю везде, кроме ω_n, а на ω_n являются линейными функциями вида $ax + by + c$ [9]. Пример ω_n и функции v_n представлен на рис. 2.

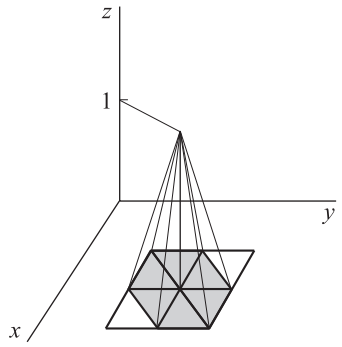

Рис. 2. Пример ω_n и функции n_n

Приблизим при помощи этой последовательности функции v, h, f, k^2 и p:

$$u = \sum_{i=1}^{N} C_i v_i, \quad v = \sum_{i=1}^{N}\widetilde{C}_i v_i, \quad h = \sum_{i=1}^{N} h_i v_i, \quad f = \sum_{i=1}^{N} f_i v_i,$$
$$k^2 = \sum_{i=1}^{N} k_i v_i, \quad p = \sum_{i=1}^{N} p_i v_i.$$

Тогда уравнение примет вид

$$0 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} C_i\widetilde{C}_i^{*}\left\{\int\limits_{\Omega}\nabla v_i\nabla v_j\, dV + \sum_{l=1}^{N}\int\limits_{\Omega} k_l v_l v_i v_j\, dV + \right. \\ \left. + \sum_{l=1}^{N}\oint\limits_{\partial\Omega} p_l v_i v_j v_l\, dS - \oint\limits_{\partial\Omega} h_j v_j v_i\, dS - \int\limits_{\Omega} f_j v_i v_j\, dV\right\}$$

(заметим, что v_j — действительная функция, поэтому $v_j = \overline{v}_j$).

Заметим, что

$$\int\limits_{\Omega} \ldots dV = \sum_{s=1}^{S} \int\limits_{\omega_s} \ldots dV.$$

Введем следующие обозначения:

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \ldots \\ C_N \end{pmatrix}, \quad \widetilde{C} = \begin{pmatrix} \widetilde{C}_1 \\ \widetilde{C}_2 \\ \ldots \\ \widetilde{C}_N \end{pmatrix}, \quad \widehat{F} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \ldots \\ f_N \end{pmatrix}, \quad \widetilde{F} = M \cdot \widehat{F},$$

$$(K)_{i,j} = \int\limits_{\Omega} \nabla v_i \nabla v_j \, dV, \quad (M)_{i,j} = \sum_{s=1}^{S} \int\limits_{\omega_s} v_i v_j \, dV,$$

$$(H)_i = \sum_{B_1B_2 \in \partial\Omega \cap \omega_s} \int\limits_{B_1B_2} v_i h_j \, dV, \quad (T)_{i,j} = \sum_{s=1}^{S} \sum_{l=1}^{N} \int\limits_{\omega_s} k_l v_i v_j v_l \, dV,$$

$$(P)_{i,j} = \sum_{B_1B_2 \in \partial\Omega \cap \omega_s} \sum_{l=1}^{N} \int\limits_{B_1B_2} p_l v_i v_j v_l \, dV.$$

Отметим, что в случае наличия нескольких границ вместо матриц P и H будут массивы аналогичных матриц, соответствующих каждой границе. Методика вычисления полученных интегралов представлена в [9].

В новых обозначениях уравнение примет вид

$$\widetilde{C}^{*T}(K + T + P)C - \widetilde{C}^{*T}(\widetilde{F} + H) = 0.$$

Эта задача эквивалентна системе линейных уравнений

$$AC = F,$$

где введены обозначения $A = K + T + P$ и $F = \widetilde{F}H$.

Итак, для нахождения численного решения остается решить систему линейных алгебраических уравнений $AC = F$.

Заметим, что все ранее введенные матрицы могут обладать весьма большой размерностью, которая напрямую зависит от числа узлов сетки. Это свойство матриц вносит серьезные ограничения как на их хранение в памяти вычислительной машины, так и на выбор метода решения получившейся системы линейных уравнений. В программе для хранения разреженных матриц большой размерности и операций над ними используется разреженный строчный формат, который подробно описан в [10]. Для решения систем линейных алгебраических уравнений в работе реализован обобщенный метод минимальных невязок (GMRES). Описание метода и алгоритм подробно разобраны в [11].

3. Тестирование программы

Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} \Delta(v + v_0) + k^2(v + v_0) = 0 & \text{в } \Omega, \\ \dfrac{\partial(v + v_0)}{\partial n} = 0 & \text{в } \partial\Omega, \\ \lim\limits_{r \to \infty} \sqrt{r} \left(\dfrac{\partial v}{\partial n} - ikv \right) = 0, \end{cases}$$

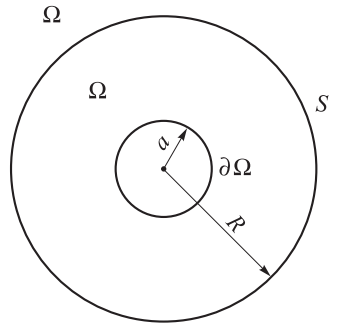

Рис. 3. Область к тестевой задаче дифракции на цилиндре

где $v_0 = e^{-ikx}$, а область Ω, представленная на рис. 3, представляет собой область вне окружности радиуса a.

Решение этой задачи можно записать в следующем виде [2]:

$$v_{\text{ex}} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{J'_m(ka)}{H_m^{(1)\prime}(ka)} \right) H_m^{(1)}(kr) e^{im(\varphi - \pi/2)}.$$

Рассмотрим задачу с приближенными условиями излучения. Ограничим область внешней границей S, окружностью радиуса R и заменим условие излучения на бесконечности, приближенным условием на этой окружности:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial r} - ikv + \frac{1}{2r} v \right) \Bigg|_{r=R} = 0. \qquad (1)$$

Используя аппарат, который применяется для решения точной задачи, нетрудно получить решение приближенной задачи:

$$v_{\text{appr}} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{J'_m(ka)}{H_m^{(1)\prime}(ka) + \delta_m} \right) \times$$
$$\times \left\{ H_m^{(1)}(kr) + \varepsilon_m H_m^{(2)}(kr) \right\} e^{im(\varphi - \pi/2)},$$

где введены следующие обозначения:

$$\varepsilon_m = -\frac{H_m^{(1)\prime}(kR) - \left(ik - \frac{1}{2R}\right) H_m^{(1)}(kR)}{H_m^{(2)\prime}(kR) - \left(ik - \frac{1}{2R}\right) H_m^{(2)}(kR)}, \quad \delta_m = \varepsilon_m \cdot H_m^{(2)\prime}(ka).$$

При $R \to \infty$ получим, что $\varepsilon_m \to 0$, а следовательно, и $\delta_m \to 0$. Отсюда следует, что $v_{\text{appr}} \to v_{\text{ex}}$ при $R \to 0$.

Сравним на сетке точное решение v_{appr} приближенной задачи с ее численным решением v_{num}.

1. При $h_{\text{grid}} = 0.35$, $R = 5$, $a = 1$, $k = 1$ получаем $\frac{\|v_{\text{num}} - v_{\text{appr}}\|_C}{\|v_{\text{num}}\|_C} \approx 0.1 = 10\%$. Под h_{grid} понимается линейный размер шаблона исходной сетки (в данном случае берется квадрат со стороной равной h_{grid}).

2. При $h_{\text{grid}} = 0.15$, $R = 5$, $a = 1$, $k = 1$ получаем $\frac{\|v_{\text{num}} - v_{\text{appr}}\|_C}{\|v_{\text{num}}\|_C} \approx 0.01 = 1\%$.

Сравним решение приближенной задачи с решением задачи в точной постановке (с условием излучения на бесконечности).

1. При $h_{\text{grid}} = 0.35$, $R = 5$, $a = 1$, $k = 1$ получаем $\frac{\|v_{\text{appr}} - v_{\text{ex}}\|_C}{\|v_{\text{ex}}\|_C} \approx 0.01 = 1\%$.

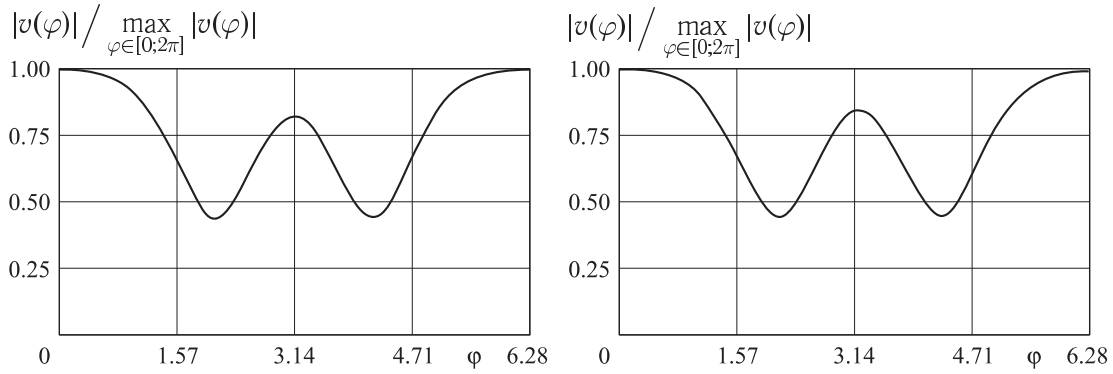

Рис. 4. Диаграммы направленности для численного решения (слева) и для решения точной задачи (справа)

2. При $h_{\text{grid}} = 0.15$, $R = 30$, $a = 1$, $k = 1$ получаем $\frac{\|v_{\text{appr}} - v_{\text{ex}}\|_C}{\|v_{\text{ex}}\|_C} \approx 3 \cdot 10^{-4} = 0.03\%$.

В заключение сравним решение задачи в точной постановке с численным решением задачи в приближенной постановке.

При $h_{\text{grid}} = 0.15$, $R = 5$, $a = 1$, $k = 1$ получаем $\frac{\|v_{\text{num}} - v_{\text{ex}}\|_C}{\|v_{\text{num}}\|_C} \approx 0.029 = 2.9\%$.

На рис. 4 представлены диаграммы направленности для численного решения (слева) и для решения точной задачи (справа).

Итак, видно, что на этой тестовой задаче программа показала неплохой результат, при крайне грубой аппроксимации краевыми условиями (1) соответствующих парциальных условий излучения. Ниже приведены примеры задач дифракции, решаемые с помощью разработанной программы.

4. Демонстрация возможностей программы

Рассматривается следующая задача:

$$\begin{cases} \Delta(v + v_0) + k^2(v + v_0) = 0, & (x, y) \in \Omega, \\ \dfrac{\partial(v + v_0)}{\partial n} = 0, & (x, y) \in \partial\Omega, \\ \left(\dfrac{\partial v}{\partial r} - ikv + \dfrac{1}{2r}v\right)\Big|_{r=R} = 0, \end{cases}$$

где Ω — область в общем случае несвязная (внешности вырезов и вставки различной формы), удовлетворяющая требованиям, предъявляемым к области при триангуляции; R — радиус исходной области, являющейся кругом, на границе которого ставятся условия излучения для рассеянного поля; $v_0 = e^{-ikx}$ — падающая на рассеиватель волна.

Введем обозначение $u = v + v_0$, тогда задача примет вид

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0, & (x, y) \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0, & (x, y) \in \partial\Omega, \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial r} - iku + \dfrac{1}{2r}u\right)\Big|_{r=R} = \\ \quad = \left(-ik(\cos\varphi + 1) + \frac{1}{2R}\right) e^{-ikR\cos\varphi}. \end{cases}$$

В качестве первого примера рассмотрим рассеяние на эллипсе. Зададим следующие параметры: $R = 6$, $h_{\text{grid}} = 0.15$, $k = 3$; полуоси эллипса: $a = 2$, $b = 1$. Пусть эллипс находится в начале координат. Результаты работы программы для этого случая представлены на рис. 5.

В качестве второго примера рассмотрим рассеяние на фигуре заданной уравнением

$$F(r, \varphi) = \sqrt{\frac{1}{\cos^2(2\cos\varphi) + \cos^2(2\sin\varphi)}} - r^2.$$

Назовем условно эту фигуру фигурой № 1. Зададим следующие параметры: $R = 6$, $h_{\text{grid}} = 0.15$, $k = 3$. Центр фигуры поместим в начало координат. Результаты работы программы в этом случае представлены на рис. 6. Несимметричность в диаграмме рассеяния составляет не более 5%.

В качестве третьего примера рассмотрим рассеяние на двух эллипсах. Зададим следующие параметры: $R = 9$, $h_{\text{grid}} = 0.15$, $k = 3$; полуоси первого эллипса: $a = 2$, $b = 1$. Поместим центр этого эллипса в точку с координатами $(-2, -2)$. Полуоси второго эллипса: $a = 1$, $b = 2$. Поместим центр этого эллипса в точку с координатами $(2, 2)$. Результаты работы программы в этом случае представлены на рис. 7.

В качестве четвертого примера рассмотрим рассеяние на эллипсе и фигуре № 1. Зададим следующие параметры: $R = 6$, $h_{\text{grid}} = 0.15$, $k = 3$; полуоси эллипса: $a = 1$, $b = 2$. Поместим центр этого эллипса в точку с координатами $(2, 0)$, а центр фигуры № 1 — в точку с координатами $(-2, 0)$. Результаты работы программы в этом случае представлены на рис. 8. Необходимо отметить, что в данном случае волна падает со стороны фигуры № 1, при этом можно наблюдать приблизительную симметрию относительно оси OX (относительно $\varphi = \pi$ и $\varphi = 0 + 2\pi n$, где $n = 1, 2$).

Заключение

В настоящей работе была реализована программа, позволяющая решать скалярную задачу дифракции на двумерных областях сложной структуры. Было проведено тестирование программы, показывающее хорошее согласие результатов численного рассчета с точным решением задачи дифракции плоской волны на бесконечном цилиндре. Затем были представлены примеры, демонстрирующие основные возможности программы. В отличие от других используемых методов метод конечных элементов обладает значительно более высокой универсальностью, позволяя рассматривать задачу

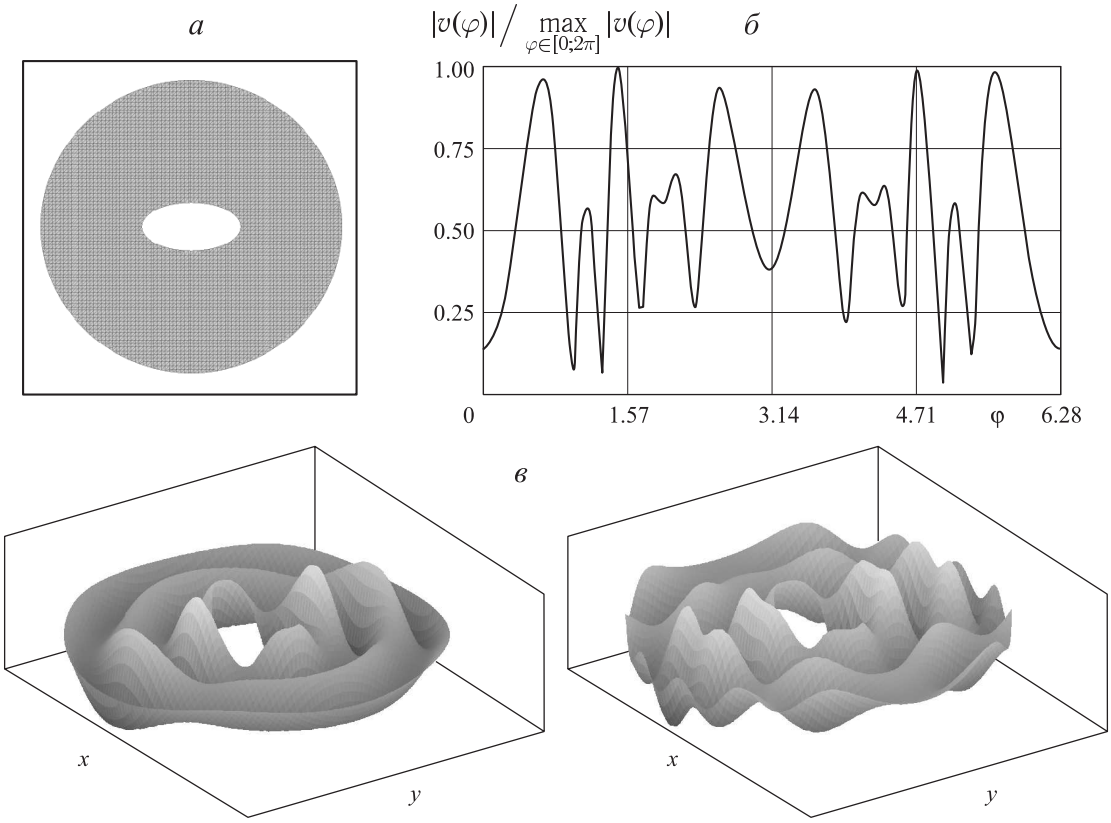

Рис. 5. Треугольная сетка для задачи рассеяния на эллипсе (*а*), диаграмма направленности для задачи рассеяния на эллипсе (*б*), полное (слева) и рассеянное (справа) волновые поля для задачи рассеяния на эллипсе (*в*)

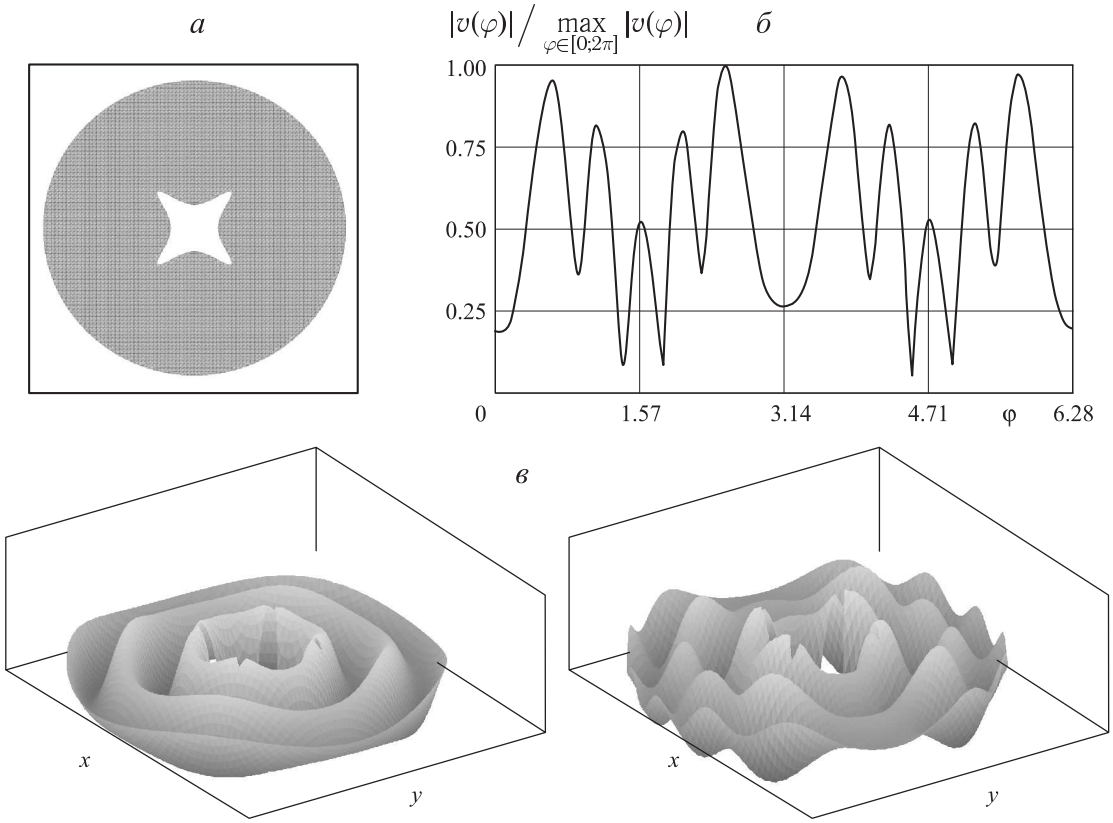

Рис. 6. Треугольная сетка для задачи рассеяния на фигуре № 1 (*а*), диаграмма направленности для задачи рассеяния на фигуре № 1 (*б*), полное (слева) и рассеянное (справа) волновые поля для задачи рассеяния на фигуре № 1 (*в*)

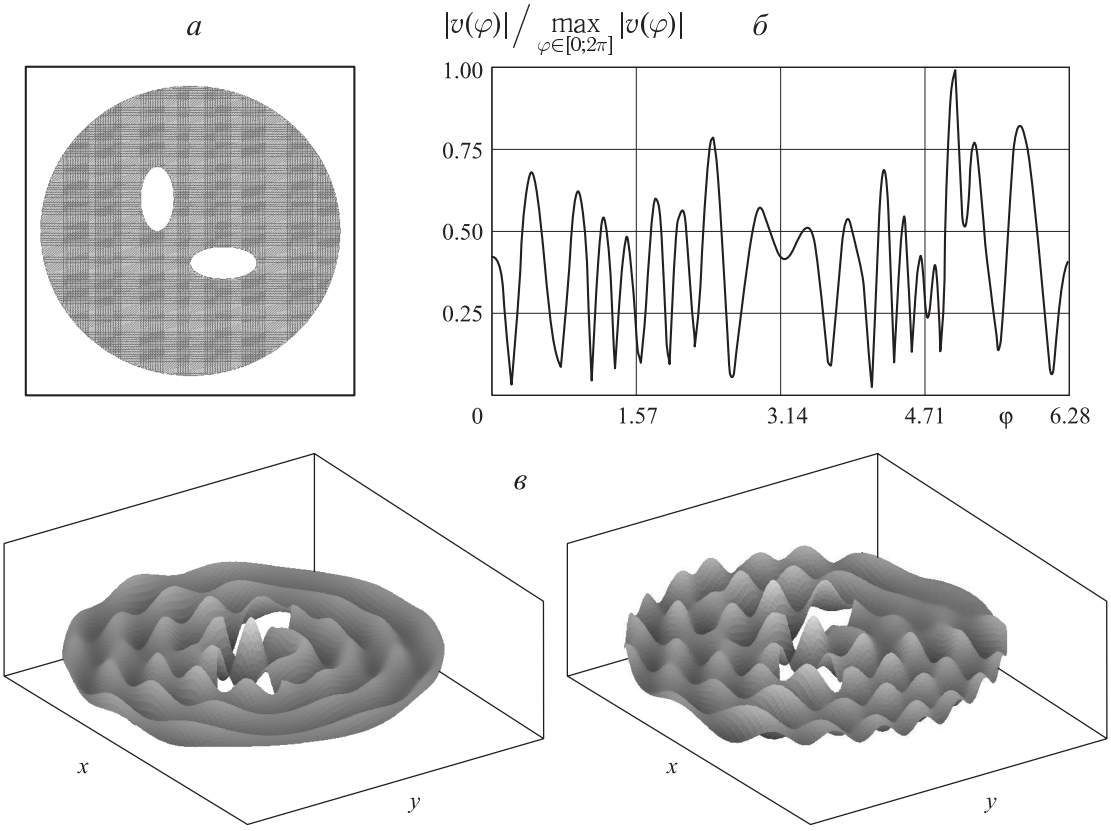

Рис. 7. Треугольная сетка для задачи рассеяния на двух эллипсах (*а*), диаграмма направленности для задачи рассеяния на двух эллипсах (*б*), полное (слева) и рассеянное (справа) волновые поля для задачи рассеяния на двух эллипсах (*в*)

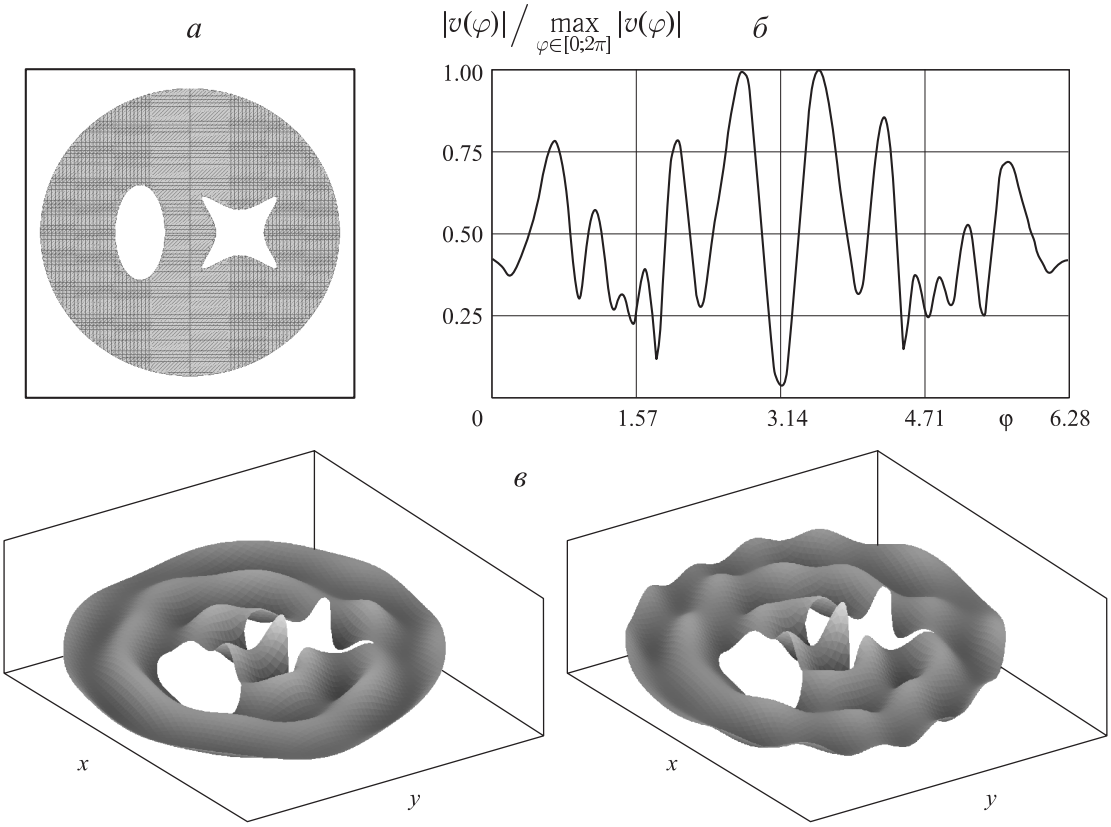

Рис. 8. Ттреугольная сетка для задачи рассеяния на эллипсе и фигуре № 1 (*а*), диаграмма направленности для задачи рассеяния на эллипсе и фигуре № 1, полное (слева) и рассеянное (справа) волновые поля для задачи рассеяния на эллипсе и фигуре № 1

в областях, имеющих особенности границы, в том числе область может иметь разрезы. Также возможно решение задачи дифракции, как на непроницаемых, так и на проницаемых рассеивателях с переменным показателем преломления.

Исследование задачи при более точном учете условий излучения и более общем характере рассеивателей будет предметом последующих работ.

Список литературы

1. *Галишникова Т.Н., Ильинский А.С.* Численные методы в задачах дифракции. М., 1987.
2. *Хенл К., Мауэ А., Вестпфаль К.* Теория дифракции. М., 1964.
3. *Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г.* Математические модели электродинамики. М., 1991.
4. *Еремин Ю.А., Свешников А.Г.* Метод дискретных источников в задачах электромагнитной дифракции. М., 1992.
5. *Ильгамов М.А., Гильманов А.Н.* Неотражающие условия на границах расчетной области. М., 2003.
6. *Колтон Д. Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М., 1987.
7. *Frey P.J., George P.L.* Mesh Generation Application to Finite Elements. 2000.
8. *Шайдуров В.В.* Многосеточные методы конечных элементов. М., 1989.
9. *Стренг Г. Фикс Дж.* Теория метода конечных. М., 1977.
10. *Писсанецки С.* Технология разреженных матриц. М., 1988.
11. *Баландин М.Ю. Шурина Э.П.* Методы решения СЛАУ большой размерности. Новосибирск, 2000.
12. *Галанин М.П., Щеглов И.А.* Разработка и реализация алгоритмов трехмерной триангуляции сложных пространственных областей: прямые методы. Препр. ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. М., 2006.
13. *Галанин М.П., Щеглов И.А.* Разработка и реализация алгоритмов трехмерной триангуляции сложных пространственных областей: итерационные методы. Препр. ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. М., 2006.

Solving diffraction problem on two dimensional domains with complex structure by finite element method

D.A. Konyaev

Department of Mathematics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.
E-mail: konyaev@physics.msu.ru.

The aim of this work is the realization of finite element method to solve scalar diffraction problem on two dimensional domains with complex structure. The testing of this program has carried out. It shows a good agreement of numerical calculated results with precise solution of diffraction problem on infinite cylinder. At the end examples, that demonstrate main abilities of the program, has presented.

Keywords: diffraction problem, finite element method, condition of radiation.
PACS: 43.20.Fn.
Received 20 March 2012.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 4(2012).

Сведения об авторе

Коняев Денис Алексеевич — аспирант; e-mail: konyaev@physics.msu.ru.