

## ФИЗИКА ЗЕМЛИ, АТМОСФЕРЫ И ГИДРОСФЕРЫ

### Структурная функция энтропии и масштабы турбулентности

В. П. Юшков

*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет,  
кафедра физики атмосферы. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.  
E-mail: yushkov@phys.tsu.ru*

Статья поступила 11.10.2011, подписана в печать 06.02.2012

Исследуется поведение структурной функции скорости звука и локальной энтропии в инерционном интервале турбулентности. На экспериментальном материале длительных измерений в пограничном слое атмосферы показано значимое отклонение показателя степенной зависимости этих характеристик от 2/3. При этом значение 2/3 является предельной величиной, до которой показатель степени может изменяться при различных «режимах» турбулентности. На основе размерных соображений предложены аналитические выражения для внутреннего и «энергетического» масштабов адиабатических колебаний в турбулентной среде, а также связь этих масштабов со скоростью диссипации турбулентных флуктуаций энтропии и энергией адиабатических колебаний.

**Ключевые слова:** турбулентность, энтропия, скорость звука, структурная функция, скорость диссипации.  
**УДК:** 551.55.551.596. **PACS:** 92.60.Fm.

#### Введение

Представление о внутреннем и внешнем (интегральном) масштабах турбулентности считается общепринятым [1–4] и редко подвергается дополнительному анализу в работах по турбулентности. Однако границы инерционного интервала, на которых классическая теория турбулентности, часто именуемая теорией Колмогорова–Обухова (ниже для краткости ТКО), перестает работать, достаточно подвижны. Расширение ТКО на пристеночный или приземный (для атмосферы) слой хорошо известно как теория Монина–Обухова. Переход от колмогоровской турбулентности к турбулентности больших масштабов (анизотропной или «двумерной») изучен достаточно детально и в лабораторных и в натурных экспериментах (см., например, [5, 6] и цитирующую там литературу). Классические результаты Гранта и Сьюарта с соавторами, Гибсона, Понда и др. (подробно изложенные в классических монографиях [2, 3]), казалось бы, закрывают вопрос о поведении спектра турбулентных пульсаций скорости и температуры и на внутреннем масштабе. Однако те результаты измерений характеристик, не рассмотренных в ТКО, которые не совпадают с классической теорией и которые авторы традиционно относят к не-колмогоровской турбулентности (см., например, [7–9]), заставляют задуматься: все ли очевидно в области малых масштабов в классической теории и какие масштабы следует считать малыми (внутренними) для разных характеристик турбулентности?

В ТКО в качестве внутреннего масштаба для турбулентного поля скоростей используется величина  $l_* = \sqrt[4]{\nu^3/\varepsilon}$ , где  $\varepsilon$  — скорость диссипации, а  $\nu$  — кинематическая вязкость. Этот внутренний масштаб определяется просто как точка пересечения двух асимптот продольной структурной функции скорости [10], поэтому в широкой окрестности этой точки пересечения поведение структурной функции будет значимо

отличаться от колмогоровского «закона 2/3». Кроме того, внутренний масштаб не является постоянной величиной, а зависит от скорости диссипации, которая в атмосфере, например, может изменяться на несколько порядков [2]. Другая важная размерная характеристика ТКО, которая также выражается через скорость диссипации и кинематическую вязкость, — характерная скорость турбулентных флуктуаций  $v_* = \sqrt[4]{\varepsilon\nu}$ . В отличие от скорости диссипации, кинематическая вязкость не является изменяющейся характеристикой в атмосферном пограничном слое. Кроме кинематической вязкости важным размерным масштабным множителем, связанным с внутренней энергией турбулентных движений является скорость адиабатических движений — скорость звука  $c_s$ . Скорость звука в турбулентной среде испытывает флуктуации и является скаляром турбулентного поля, поэтому для анализа спектра флуктуаций этой характеристики можно воспользоваться классическим подходом Обухова, примененным им для описания флуктуаций температуры [11]. Скорость диссипации или выравнивания флуктуаций скорости звука можно обозначить как  $N_c$ . Тогда безразмерное число  $N_c/\varepsilon$  может входить в соотношения, вытекающие только из размерных соображений, в любых степенях или как эмпирическая функция.

Какую же роль в трансформации спектра турбулентных движений играют сжимаемые адиабатические колебания? Каков механизм, отвечающий за перераспределение энергии турбулентных движений по спектру? Классическая теория турбулентности рассматривает большей частью несжимаемые движения, однако на важную роль пульсаций давления и звуковых волн в теории турбулентности обращал внимание еще А. М. Обухов [12]. Квадрат скорости звука в атмосфере, как в идеальном газе, конечно, пропорционален температуре среды. Но эта температура является не термодинамической, а потенциальной, в том смысле, что она приведена к среднему по времени давлению

в данной точке среды и не может меняться быстро: с частотой звуковых волн. То есть эта температура является функцией локальной энтропии.

Турбулентные флюктуации энтропии/потенциальной температуры/скорости звука, которые генерируются на энергетическом масштабе за счет случайных источников/стоков тепла (например, радиационных), могут переходить по спектру за счет обмена быстрыми адиабатическими колебаниями, т. е. при рассеянии, поглощении и излучении звуковых волн, переносящих энергию и импульс (см., например, [10, 13]). А уже акустические волны в свою очередь затухают на внутреннем масштабе за счет вязкости и теплопроводности.

Коэффициент сглаживания или «диффузии» локальной энтропии, обозначаемый ниже как  $\gamma$ , подобен коэффициенту температуропроводности и вязкости в том смысле, что скорость выравнивания флюктуаций скорости звука пропорциональна лапласиану от флюктуаций [13]. Но этот коэффициент значительно превышает коэффициент поглощения звуковых волн — адиабатических колебаний  $\eta$ :  $\eta = \frac{4}{3}\nu + \xi + (C_p/C_v - 1)\chi$  (здесь  $\xi$  — вторая вязкость, а  $\chi$  — температуропроводность) [14]. По этой причине энергия адиабатических флюктуаций, которую, конечно, следует отличать от внутренней энергии, значительно меньше кинетической энергии турбулентных движений (на единицу массы), и спектр малых флюктуаций потенциальной или «звуковой» температуры в локально однородной и изотропной турбулентности подобен спектру термодинамической температуры (см., например, [15]), а при измерениях в инерционном интервале турбулентности между этими температурами практически не делается различий.

Однако появление малого безразмерного числа — числа Маха:  $v_*/c_s$  приводит к тому, что для разных характеристик турбулентности масштабы, получаемые только из соображений размерности, на которых поведение спектра или структурной функции начинает отличаться от «колмогоровского», могут существенно различаться. Если выразить энергию адиабатических колебаний  $E_s$  в турбулентной среде через  $c_*^2$  (на единицу массы), то через коэффициент  $\gamma$  и скорость звука  $c_s$  ее можно связать со скоростью диссипации флюктуаций энтропии  $N_s$  и двумя масштабами турбулентности — внутренним  $\lambda$  и внешним  $L$ . Так отношение  $\eta/c_*$  определяет масштаб длины  $\lambda$ , на котором адиабатические (звуковые) колебания затухают из-за влияния вязких потерь и который, поэтому, можно назвать внутренним масштабом для адиабатических колебаний. Поскольку пространственные флюктуации скорости звука выравниваются на масштабах, когда сам звук, т. е. адиабатические колебания скорости, температуры, давления еще не затухают (при, этом конечно, происходит их эффективное рассеяние), должен существовать и некоторый «внешний» масштаб  $L = \gamma/c_*$ , имеющий смысл масштаба когерентности адиабатических колебаний в турбулентной среде и связанный с выравниванием флюктуаций скорости звука, который должен быть много больше масштаба  $\eta/c_*$ .

Поскольку энергия адиабатических колебаний  $E_s$  много меньше кинетической энергии турбулентности, которую можно выразить через характерную скорость «энергетического» интервала  $u_*^2$ , то  $c_*^2/u_*^2 \ll 1$ . Если

предположить, что  $\gamma \sim \eta u_*^2/c_*^2$  и что  $u_*^2/c_*^2 \sim c_s/c_*$ , то  $L = \gamma/c_* = \eta u_*^2/c_*^3 = \eta c_s/c_*^2 \gg \lambda = \eta/c_*$ . При этом внешний для адиабатических колебаний пространственный масштаб корреляции  $L$  связан через скорость звука  $c_s$  с интегральным масштабом по времени  $\tau_k$ :  $L = c_s \tau_k$ . Этот временной масштаб затухания корреляций  $\tau_k = \gamma/(c_* c_s) = \eta/c_*^2$  для турбулентных неожиданных движений является внутренним временным масштабом, осреднение по которому приводит к неожиданности осредненных движений. А сам масштаб  $L$  имеет порядок длины волны максимума спектральной плотности адиабатических колебаний в турбулентной среде.

Можно ожидать, что в интервале между внутренним ( $\eta/c_* = \gamma/c_s$ ) и внешним ( $\gamma/c_*$ ) масштабами адиабатических колебаний, т. е. в диапазоне, где их влиянием на поле турбулентных движений уже нельзя пренебрегать, поведение структурных функций энтропии/скорости звука/потенциальной температуры будет отклоняться от колмогоровского «закона 2/3». Структурные функции этих функционально связанных характеристик и изучаются в настоящей работе.

## 1. Инструменты и место проведения измерений

Измерение характеристик турбулентности ультразвуковыми акустическими анемометрами стало широко распространенной практикой в последние годы, используется во множестве полевых измерений и потому может считаться надежным методом, не предъявляющим повышенных требований к анализу исходных данных и инструментальным ошибкам (см., например, [16]). Характерный размер измерительной головки акустического анемометра составляет около 10 см. Спектры турбулентных пульсаций скорости ветра и температуры, измеряемые такими приборами, в инерционном интервале масштабов с весьма хорошей точностью (порядка 1–5%) удовлетворяют ТКО (пропорциональны  $k^{-5/3}$ , см., например, [17, 18]), что позволяет говорить о надежном измерении таких характеристик турбулентности, как турбулентная кинетическая энергия, тепловая энергия турбулентности, скорости их диссипации, турбулентные потоки тепла и импульса. Преимуществом акустической анемометрии для данного исследования является то, что акустический анемометр измеряет собственно скорость звука. Следует обратить внимание, что прецизионные измерения температуры термометрами сопротивления (назовем в качестве примера классическую работу Кречмера [19] или относительно недавнюю работу [20]) в отличие от акустических измерений измеряют не только медленно меняющуюся компоненту температуры, но и ее адиабатические колебания.

Расчет пространственной структурной функции случайных характеристик в потоке (жидкости или газа) может осуществляться в одной точке измерений на основе гипотезы Тейлора о «замороженности» турбулентных флюктуаций: если турбулентные характеристики изменяются во времени достаточно медленно (в отличие от акустических колебаний), то они переносятся средним потоком. Зная скорость среднего потока, можно определить пространственную структурную функцию случайной характеристики по временным измерениям в одной точке, если эти измерения принадлежат одному

статистическому ансамблю (например, скорость ветра должна быть постоянной, что не всегда очевидно при длительном осреднении). Наглядным примером справедливости гипотезы Тейлора могут быть летящие по небу при достаточной скорости ветра небольшие кучевые облака. Энтропия, как медленно меняющаяся термодинамическая характеристика, сохраняющаяся в каждой частице жидкости некоторое время, как раз относится к таким характеристикам, а измерение турбулентных флуктуаций скорости звука или акустической температуры по одноточечным измерениям вполне оправдано и многие измерения спектров турбулентности используют именно эту схему как простейшую (см., например, [17]). Следует отметить, что в пограничном слое атмосферы ветровой поток, конечно, не является в достаточной степени однородным и стационарным, особенно при малой скорости ветра, поэтому флуктуации скорости ветра на этих же масштабах времени (мезомасштабная турбулентность) могут приводить к некоторым ошибкам расчета структурной функции по одноточечным измерениям [21, 22]. Эти ошибки, однако, в первом приближении имеют случайный характер и не являются систематическими. С другой стороны, если мезомасштабная турбулентность влияет существенно на поведение структурной функции энтропии, то изучение этого влияния является целью настоящей работы.

С 2005 г. в Москве на физическом факультете МГУ ведутся непрерывные дистанционные измерения скорости ветра и температуры в пограничном слое атмосферы. Параллельно для контроля дистанционных измерений и измерения турбулентных потоков ведутся измерения скорости ветра и температуры с помощью высокочастотных ультразвуковых анемометров (USA-1s, фирмы МЕТЕК). Такие же измерения проводятся и в загородной зоне на Звенигородской научной базе ИФА РАН. Дополнительные измерения, проведенные во время полевых экспедиций ИФА РАН и физического факультета МГУ в приземном слое [18] над практически идеально ровной поверхностью, позволили подтвердить полученные закономерности. Длительное проведение таких измерений во все сезоны в круглогодичном режиме позволяют говорить о высокой степени повторяемости полученных результатов и широких возможностях для параллельной проверки.

## 2. Поведение структурной функции скорости звука в инерционном интервале турбулентности и оценка источников ошибок измерений

Из многочисленных наблюдений известно, что внутренний масштаб температуры составляет менее или около 1 мм и соответственно он не может быть измерен прибором с размером измерительной части около 10 см. Однако, как предполагалось, на масштабах около 10 см, т. е. между  $\lambda$  и  $L$ , может наблюдаться отклонение от «закона 2/3» для структурной функции скорости звука и по характеру отклонения от этого закона можно будет судить о поведении структурной функции акустической температуры/энтропии в окрестности этого масштаба.

Будем пока предполагать, что скорость ветра остается постоянной на ансамбле измерений, и говорить об условных единицах пространственного масштаба,

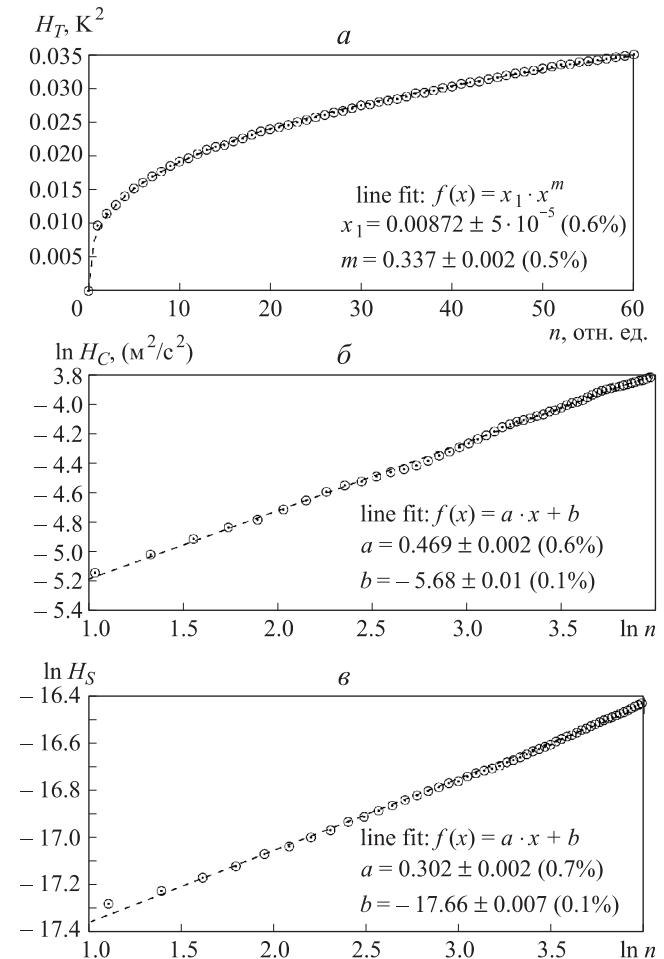


Рис. 1. Поведение структурной функции акустической температуры (а), скорости звука (б) и энтропии (в) в окрестности нуля. Структурная функция акустической температуры (пропорциональна квадрату скорости звука) представлена в линейных координатах. Измерения в городской среде (Москва, МГУ, 13.06.2010, 00:15–00:45). По оси абсцисс отложены единицы временного интервала  $\delta t = 0.1$  с ( $\Delta x = \bar{U} \delta t \cdot n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ), по оси ординат  $H_T(n)$ . Структурная функция скорости звука по измерениям в загородной местности (ЗНС ИФА РАН, 27.06.2005, 12:15–12:45,  $z = 15$  м) представлена в логарифмических координатах:  $\ln H_C(\ln n)$ . Частота дискретизации 15 Гц ( $\delta t = 0.065$  с). Структурная функция безразмерной энтропии  $H_S$ :  $S = \ln(T_a/T_0)$  представлена по измерениям в приземном слое ( $z = 2$  м) над опустыненной территорией (Харабали-2009, 12.08.2009, 15:15–15:45) с повышенной частотой дискретизации (50 Гц) в логарифмических координатах

который, например, при частоте дискретизации измерений 10 Гц и скорости ветра в 1 м/с составляет 10 см. На рис. 1, а представлен пример одного из первых пробных расчетов структурной функции акустической температуры  $T_a$  при устойчивой стратификации (в ночных условиях) в городской точке измерений (МГУ). Структурная функция акустической температуры  $H_T$  определялась осреднением за 30 мин квадрата разницы измерений в два близких момента времени:  $H_T(n) = \langle (T_a(t + \delta \cdot n) - T_a(t - \delta \cdot n))^2 \rangle$ , где  $\delta = 0.1$  с (при частоте дискретизации измерений 10 Гц),  $n$  — целое

число. Первые же измерения показывают, что если структурная функция и аналитична в нуле (описывается параболой), то только на очень малых масштабах, недоступных проводимым измерениям. Аппроксимация же структурной функции степенной зависимостью хорошо описывает все точки измерений. Однако при этом наблюдается значимое отклонение поведения структурной функции от «закона 2/3» ( $m \neq 0.67$ ).

Конечно, городские измерения характеризуются существенно большими значениями турбулентных пульсаций температуры, и скорости ветра. Можно было бы предположить, что значимую роль в изменении структурной функции с расстоянием играют мезомасштабные колебания скорости ветра во время измерений. Однако на рис. 1, б показан еще один пример структурной функции, полученной в загородных условиях (на ЗНС ИФА РАН) с чуть большей частотой дискретизации (15 Гц,  $\delta = 0.065$  с). График на рис. 1, б представлен в логарифмическом масштабе:  $\ln H_c = f \ln n$ . В этом случае влияние скорости ветра переходит на свободный член этой функциональной связи. Очевидно, что линейная зависимость (степенная в линейных координатах) в данном случае вполне обоснована. На этом графике, в отличие от рис. 1, а, представлена уже структурная функция не акустической температуры, а скорости звука  $c_s = \sqrt{\chi R_\mu T_a}$ ,  $\chi = C_p/C_v$ . Как и следовало ожидать, поскольку малые флуктуации функционально связанных характеристик пропорциональны, поведение структурной функции оказывается подобным, но в данном случае с другим показателем степени. При этом видно, что поведение структурной функции скорости звука значительно отличается от закона Колмогорова–Обухова, однако степень «наклона» структурной функции, измеряемая по отношению к логарифму временного интервала, не повышается до 1, а понижается (т. е. меньше 2/3), что делает структурную функцию изменяющейся в нуле еще более быстро:  $\frac{\partial H}{\partial n}|_{n \rightarrow 0} = 1/n^{1-a}$ , где  $a < 2/3$ .

По результатам множества предварительных экспериментов можно сделать вывод, что подобрать одинаковое поведение структурной функции при  $n \rightarrow 0$  по измерениям в разные моменты времени и в разных точках наблюдений не удается, как и невозможно определить масштаб, на котором структурная функция скорости звука (акустической температуры) изменялась бы медленнее. Даже увеличение частоты дискретизации до 50 Гц (рис. 1, в), когда «расстояние» между измерениями меньше размера самого прибора, не выявляет области, в которой для структурной функции энтропии (или связанных с ней характеристик скорости звука / акустической температуры)  $a > 2/3$ . В последнем случае (на рис. 1, в) показано поведение структурной функции безразмерной энтропии в логарифмических координатах по измерениям в приземном слое атмосферы над практически идеально ровной поверхностью (в экспедиции «Харабали-2009», высота точки измерений 2 м).

Одновременно обращает на себя внимание четкий рисунок степенной зависимости: это не «область» точек вокруг регрессионной прямой в логарифмических координатах, а закономерность, выполняющаяся все более строго при увеличении интервала усреднения. Были

проведены эксперименты по изменению длительности периода осреднения от 3 до 30 мин, которые показали строгое выполнение степенного закона с постепенным увеличением точности аппроксимации, определяемой по доверительному интервалу коэффициентов линейной регрессии, при увеличении периода статистического осреднения. Наклон регрессионной прямой в логарифмических координатах, т. е. показатель степенной зависимости структурной функции от расстояния между точками наблюдений, можно определить с точностью лучше чем 1% (доверительный интервал для коэффициентов показан на рис. 1).

Точность расчета структурной функции в окрестности нуля, конечно, ограничена ошибками сглаживания и дискретизации. Ошибка сглаживания связана с размером измерительного объема  $\Delta x$  (около 10 см) и временем проведения одного измерения  $\Delta t$  (менее 0.1 с). Пространственные и временные масштабы осреднения приближенно согласованы через скорость ветра, т. е.  $\Delta x \sim \bar{V}\Delta t$ . Влияние ошибки сглаживания, по-видимому, не является критическим, поскольку поведение структурной функции на масштабах  $\Delta x \sim \delta x$  не отличается от поведения на масштабах  $\Delta x \gg \delta x$ . Другими словами, поведение структурной функции энтропии и скорости звука можно оценить по ее поведению при  $\Delta x \gg \delta x$ .

Влияние ошибки дискретизации учесть сложнее, так как точно не известны аппаратная погрешность и источники ошибок измерений. Грубо можно оценить ее по последнему знаку измерений: 0.01 К. Это достаточно большая величина, сопоставимая с величиной вариаций температуры на масштабах  $\delta x$ . Уменьшить величину случайной ошибки позволяет процедура статистического осреднения. Если ошибки измерений не являются систематическими и приближенно нормально распределены (отсутствуют грубые ошибки измерений), оценка среднеквадратичного отклонения измеряемой средней характеристики (т. е. структурной функции) уменьшается приблизительно как  $\sim 1/\sqrt{N}$  и, например, для получасовой серии измерений при частоте дискретизации измерений 10 Гц  $N = 18000$ . Систематическая ошибка исключается использованием разности двух близких измерений одним прибором. Остаются, однако, аппаратурные ошибки искажения спектра флуктуаций температуры. Качественно оценить эти ошибки можно увеличением частоты дискретизации (до 50 Гц) по изменению поведения структурной функции в окрестности нуля. Как видно на рис. 1, в, такое искажение действительно имеет место, но только в окрестности предельных значений:  $\Delta x \approx \delta x$ . Это искажение больше в условиях малой интенсивности турбулентности: малой скорости ветра или малых флуктуаций температуры, а также вблизи поверхности. В городской среде и на высоте  $> 50$  м в загородной зоне такие искажения незначительны (см. рис. 1, б и 2, б).

Конечно, значительно большие искажения структурной функции, связанные с влиянием подстилающей поверхности, крыш зданий в городской среде, не должны приниматься в расчет. То есть при измерениях должно выполняться условие  $\Delta x \ll z$ , или  $\Delta t = 2\delta \cdot n \ll z/\bar{V}$ . Такое изменение спектров при переходе к анизотропной турбулентности изучалось во многих эксперименталь-

ных работах (см., например, [4, 17]). По нашим измерениям видно, что искажения поведения структурной функции невелики и при  $\Delta t \lesssim z/\bar{V}$ .

Точное определение наклонов по графикам в логарифмических координатах (показателя степени) позволяет исследовать их поведение в суточном ходе, чтобы сопоставить значения наклонов с интенсивностью турбулентности или скоростью диссипации. На рис. 2 показан пример таких измерений для одного летнего дня (9 июля 2005 г.) с ясной погодой, умеренным ветром и выраженным суточным ходом температурной стратификации. По оси ординат показаны значения наклона  $a$  в регрессионном уравнении  $\ln H = a \ln n + b$ , а по оси абсцисс — время дня (местное) в часах. Зависимость структурной функции от средней скорости ветра  $\bar{V}$  (а также от средней скорости диссипации  $\bar{\varepsilon}$ ), входит в свободный член регрессионной прямой. Конечно, в пограничном слое средняя скорость ветра определяет и интенсивность турбулентности или скорость диссипации за счет эффектов сдвиговой неустойчивости и обтекания крупных зданий, однако это влияние опосредовано (изменяет  $b$ ), а целью данного сопоставления является лишь качественный анализ возможной природы связи между наклоном степенной зависимости и режимом турбулентности в АПС. На рис. 2, *a* представлено все множество измерений наклонов за одни сутки с интервалом осреднения в 6 мин. Обращают на себя внимание следующие два обстоятельства.

1. Стохастический характер наклонов. Эта стохастичность, по-видимому, характеризует перемежаемость турбулентности, т. е. быстрое изменение скорости диссипации, в соответствии с классическими представлениями ТКО.

2. Почти все измерения наклонов лежат в диапазоне 0–2/3 (0.67), изменяясь при этом на порядок величины. То есть закон Колмогорова–Обухова является предельным случаем измеренных степенных зависимостей. Это положение также соответствует ТКО, если принять во внимание, что закон КО говорит о предельных свойствах структурной функции скалярных характеристик в неожиданных течениях. В то же время существенное отклонение от «закона 2/3» говорит о возможности изучать скорость диссипации флюктуаций энтропии по поведению ее структурной функции.

Важно подчеркнуть, что сама степенная зависимость структурной функции энтропии от «расстояния» выполняется строго, т. е. в логарифмических координатах это прямая с высокой степенью точности, а не просто линейный участок аппроксимирующей кривой или вытянутое «облако» точек. Чтобы подчеркнуть это свойство, на рис. 2, *б* построено три примера (подобраны сильно различающиеся случаи), которые показывают точное сохранение степенной зависимости (линейность в логарифмических координатах) при существенном изменении наклона регрессионной прямой.

Важно подчеркнуть, что сама степенная зависимость структурной функции энтропии от «расстояния» выполняется строго, т. е. в логарифмических координатах это прямая с высокой степенью точности, а не просто линейный участок аппроксимирующей кривой или вытянутое «облако» точек. Чтобы подчеркнуть это свойство, на рис. 2, *б* построено три примера (подобраны сильно различающиеся случаи), которые показывают точное сохранение степенной зависимости (линейность в логарифмических координатах) при существенном изменении наклона регрессионной прямой.

### 3. Структурная функция и скорость диссипации

Полученные результаты вовсе не противоречат классическим представлениям ТКО, хотя и значительно меняют наше представление о границах ее применимости. Существование участка колмогоровского спектра в измерениях флюктуаций температуры акустическими анемометрами является одной из предпосылок широкого использования этих измерений для оценки потоков тепла и изучения мелкомасштабной турбулентности и продемонстрировано в десятках исследований (см., например, библиографию в работах [16, 17]), в том числе и самим автором [18]. В последние годы проведено немало экспериментов, развивающих положения классической теории за границами колмогоровского «закона 2/3», хотя многие общие представления о поведении турбулентных характеристик остаются теми же и лишь подтверждаются новыми измерениями.

Тщательные и прецизионные эксперименты позволили измерить универсальное поведение спектров скоростей и температур в «вязком» подинтервале [2], но эти измерения, проводимые с помощью малоинерционных и микроскопических датчиков, показавшие прекрасное согласие спектров термодинамической температуры с законом  $-5/3$  вплоть до масштабов в доли миллиметров, заставляют задуматься об измерениях

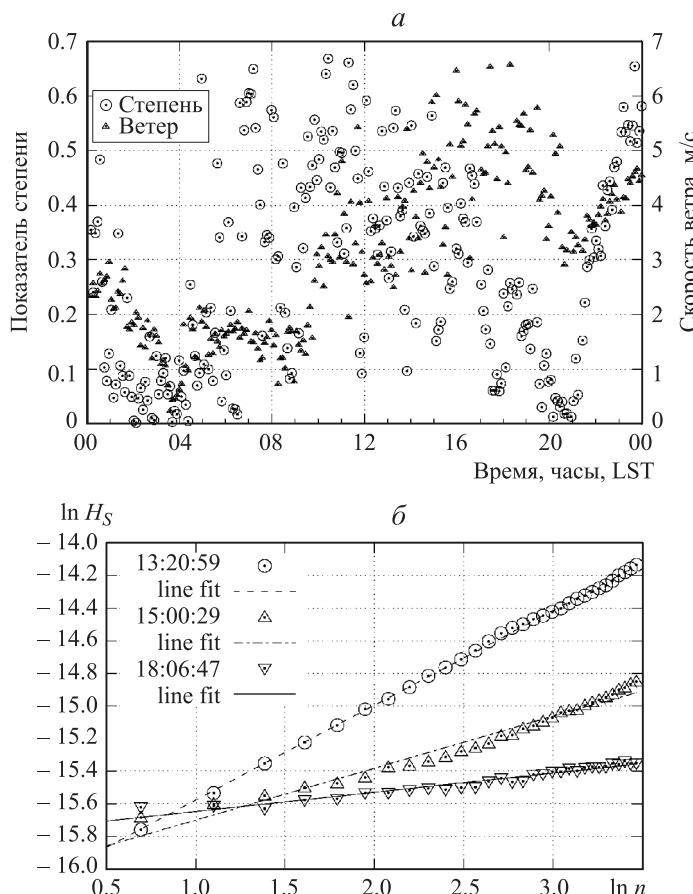


Рис. 2. Изменчивость показателя степени структурной функции энтропии и скорости звука. Примеры поведения «наклонов» (показателя степени) структурной функции скорости звука  $a$  ( $\ln H_c = a \ln n + b$ ) в течение дня в загородной местности (ЗНС ИФА РАН, 9 июля 2005 г.) показаны на рис. *a*. Треугольниками показаны значения скорости ветра во время измерения структурной функции. Интервал усреднения 6 мин. На нижнем рис. *б* представлены три частных примера зависимости структурной функции безразмерной энтропии от расстояния (в логарифмических координатах) в интервале от 13 до 18 ч местного времени

одновременно с несжимаемыми турбулентными и адиабатическими колебаниями температуры, в то время как законы ТКО сформулированы только для несжимаемого турбулентного движения.

Наиболее известными проявлениями отклонения поведения структурных функций от закона 2/3 являются измерения этих функций для показателя преломления [9]. Их отклонение от колмогоровского закона было обнаружено еще в начале 1970-х гг. в экспериментах по прохождению лазерных пучков в турбулентной среде и по флюктуациям углового распределения интенсивности света в астрофизических наблюдениях. Эти результаты были обобщены, например, в работе Хилла и Клиффорда [7]. Впрочем, и классические измерения структурных функций термодинамической температуры над нагретой поверхностью в приземном слое с помощью термометров сопротивления показывают их комплексный характер поведения (т. е. разные показатели степени на разных участках структурной функции температуры) [20].

Соответствие «закона 2/3» для корреляционных функций и «закона -5/3» для спектров строго выполняется, только если внутренний масштаб стремится к нулю, а внешний — к бесконечности. Для конечного внутреннего масштаба, поскольку поведение структурных функций и спектральных плотностей связано формулами обращения, необходимо знать этот внутренний масштаб и поведение спектра турбулентных флюктуаций на вязком подинтервале [10]. Было предложено несколько модельных способов «обрезания» спектров турбулентных флюктуаций скорости и температуры на высокочастотной границе [2, 23]. Однако все они остаются на сегодняшний день эмпирическими. Теоретические расчеты, проведенные для некоторых модельных спектров турбулентности, указывают на влияние высокочастотной границы и отклонение структурных функций от «закона 2/3» вплоть до масштабов в  $50l_*$ . Хотя настоящие измерения структурной функции энтропии проводились вдали от классического вязкого подинтервала, наблюдавшие закономерности и их точное выполнение заставляют предположить либо появление еще одного масштаба для флюктуаций энтропии, значение которого может существенно отличаться от значения внутреннего масштаба  $l_*$ , либо необходимость привлечения дополнительных соображений, высказанных во введении, что также говорит о разности поведения флюктуаций термодинамической и потенциальной температуры.

ТКО рассматривает распределение скалярных характеристик в турбулентном поле скоростей единообразно, на основе предположения о выравнивании случайных флюктуаций на малых расстояниях посредством процесса перемешивания типа диффузии (или теплопроводности), и нет оснований считать, что энтропия не может выравниваться в пространстве за счет стохастического обмена адиабатическими колебаниями аналогичным образом. Соответственно и для этой скалярной характеристики можно ввести понятие скорости диссипации. Значение и размерность скорости диссипации при этом зависят от выбранной характеристики. Например, для безразмерной энтропии  $\ln \frac{T_a}{T_0}$  (здесь  $T_a$  — «акустическая» температура, а  $T_0$  — ее среднее значение)

размерность скорости диссипации — обратная секунда. Термодинамическая энтропия связана с этой характеристикой через теплоемкость  $C_p$ . Для флюктуаций скорости звука размерность скорости диссипации  $N_c$ , как было сказано, совпадает с размерностью  $\varepsilon$  — скорости диссипации турбулентных флюктуаций скоростей. Появление безразмерной величины  $\varepsilon/N_c$  приводит, если пользоваться терминологией теории размерности, к появлению эмпирической функции  $f(\varepsilon/N_c, v_*/c_s)$ . Понятно, что для изучения связи между турбулентными флюктуациями скорости звука и турбулентными флюктуациями скоростей несжимаемого движения одной «теории размерностей» недостаточно.

Можно предположить, что турбулентные флюктуации энтропии выравниваются наиболее быстро среди других термодинамических характеристик — скаляров поля турбулентности [13] и причиной такого выравнивания является обмен адиабатическими колебаниями, а не молекулярные процессы типа теплопроводности или вязкости. Общефизические соображения подсказывают, что при стохастическом перемешивании в однородной и изотропной турбулентной среде может иметь место флюктуационно-диссипационное соотношение: скорость диссипации флюктуаций энтропии будет пропорциональна энергии адиабатических колебаний. В обозначениях, приведенных в начале работы, это означает, что  $N_c = (c_s^2/\gamma)E_s$ . Некоторые экспериментальные обоснования для такого вывода приведены в [18].

Характерное «энергетическое» значение волнового числа адиабатических колебаний  $k_*$ , которому соответствует максимум их энергии (или максимум спектральной плотности) связано с  $c_*$  соотношением  $c_* = \gamma k_*$ , при этом  $c_* c_s = \gamma k_* c_s = \gamma \omega_* \sim u_*^2$ . Обратная к  $k_*$  величина является внутренним масштабом для турбулентных флюктуаций (масштабом однородности) и внешним или «энергетическим» для адиабатических. Понятно, что масштабом длины для флюктуаций энтропии, если исходить только из соображений размерности, может быть любая комбинация вида  $(\gamma/c_*)f(E_s/u_*^2)$ . Все зависит от того физического смысла, который вкладывается в понятие характерного масштаба.

## Заключение

Проведенные расчеты показывают, что поведение структурных функций характеристик, функционально связанных с энтропией воздушных частиц, в пограничном слое атмосферы существенно отличается от асимптотических законов ТКО. Масштабы, на которых проявляются эти отклонения, не являются микроскопическими. Поведение показателя степени структурных функций демонстрирует стохастическую природу турбулентного перемешивания — явление перемежаемости.

Поскольку энтропию можно выразить также через логарифм потенциальной плотности, т. е. плотности, адиабатически приведенной к постоянной температуре, такая характеристика может быть сопоставлена с плотностью вероятности обнаружить частицу жидкости единичной массы в данной точке пространства. А это в свою очередь открывает путь к вероятностному описанию атмосферных движений как процесса динамико-стохастического перемешивания воздушных

масс или Лагранжевых «частиц» сплошной среды. Изучение макротурбулентных (синоптических) флюктуаций энтропии и ее пространственного распределения позволит перейти к описанию *динамики вероятности*, т. е. к описанию медленных изменений вероятностных распределений этих частиц. Эта область исследований объединяет классическое гидродинамическое описание, в котором нет вероятности, и классическую статистическую теорию, в которой распределение вероятности должно быть заданным, а статистический процесс чаще всего – стационарным.

Отметим еще, что энтропия, строго говоря, не является характеристикой гидродинамического движения, поскольку как функция двух компонент вектора состояния при гидродинамическом описании не дает никакой дополнительной информации, и наоборот, знание ее пространственного распределения не позволяет определить «вектор состояния» (совокупность гидродинамических характеристик). Эта ситуация чем-то напоминает принцип неопределенности: изменение плотности числа частиц жидкости (единичной массы) в некоторой точке при макроскопическом описании связано с дивергенцией поля скоростей, а она не может быть определена, если рассматриваются только несжимаемые движения. Неопределенность поля скоростей турбулентного движения связана, конечно, с нарушением баланса притоков и стоков тепла, нарушением равновесного квазистационарного движения, сохраняющего импульс и момент импульса, и с существованием быстрых адиабатических колебаний, переносящих импульс и энергию.

Малая величина энергии адиабатических колебаний не делает малой их роль в турбулентном перемешивании, поскольку адиабатические движения лишь переносят энергию между турбулентными несжимаемыми движениями разных масштабов. В конечном счете цель настоящей работы — подчеркнуть, исходя из экспериментальных наблюдений, важную роль адиабатических колебаний в переносе энергии турбулентных движений по спектру. Эта роль, несмотря на более чем столетнюю историю теории турбулентности, пока не оценена. Отличие полученных результатов от ожидаемого поведения лишь показывает незавершенность теоретических построений классической теории турбулентности.

### Entropy structure function and the turbulence scales

V. P. Yushkov

*Department of Physics of Atmosphere, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University,  
Moscow 119991, Russia.  
E-mail: yushkov@phys.msu.ru.*

The structure functions of sound speed or local entropy in the turbulent atmosphere are analyzed. By long-term measurements in the atmospheric boundary layer the power dependence of these characteristics in the inertial sub-range is significantly diverged from the « $2/3$  law». The behavior of the structure functions indicates deviation from the asymptotic Kolmogorov–Obukhov law on scales, which significantly exceed Taylor microscale. The exponent of  $2/3$  is regarded as the limit value, which can be reached under different synoptic conditions. Analytical expressions for the internal and «energy» scales of entropy fluctuations, as well as for relation of these scales with entropy dissipation rate and adiabatic fluctuations energy are proposed.

*Key words:* turbulence, entropy, structure functions, dissipation rate, scales.

PACS: 92.60.Fm.

*Received 11 October 2011.*

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 4(2012).

### Сведения об авторе

Юшков Владислав Пролетаревич — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник; тел.: (495) 939-15-41, e-mail: yushkov@phys.msu.ru.

### Список литературы

1. Обухов А.М. Турбулентность и динамика атмосферы. Л., 1988.
2. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Ч. 2. М., 1967.
3. Frish U. Turbulence. Cambridge, 1995. Пер.: Турбулентность. Наследие Колмогорова. М., 1998.
4. Lumley J.L., Panofsky H.A. The structure of Atmospheric Turbulence. Interscience Publ., 1964. Пер.: Структура атмосферной турбулентности. М., 1966.
5. Batchelor G.K. // Phys. Fluid Suppl. II. 1969. **12**. P. 233.
6. Boer G.J., Shepherd T.G. // J. Atm. Sci. 1983. **40**. P. 164.
7. Hill R.J., Clifford S.F. // J. Opt. Soc. Am. 1978. **68**, N 7. P. 892.
8. Boreman G.D., Dainty C. // J. Opt. Soc. Am. A. 1996. **13**, N 3. P. 517.
9. Golbraikh E., Kopeika N.S. // App. Opt. 2004. **43**, N 33. P. 6151.
10. Татарский В.И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М., 1967.
11. Обухов А.М. // Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз. 1949. **13**, № 1. С. 58.
12. Обухов А.М. // Докл. АН СССР. 1949. **66**, № 1. С. 17.
13. Юшков Е.В., Юшков В.П. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2011. № 6. С. 114.
14. Landau L.D., Lifshits E.M. Гидродинамика. М., 1988.
15. Katul G.G., Parlange M.B., Chu C.R. // Phys. Fluids. 1994. **6**, N 7. P. 2480.
16. Contini D., Donateo A., Belosi F. // J. Atmos. Ocean. Tech. 2006. **23**. P. 785.
17. Shulhua Liu, Heping Liu et al. // Bound. Layer Met. 2001. **98**. P. 83.
18. Юшков В.П. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2011. № 3. С. 105.
19. Кречмер С.И. // Докл. АН СССР. 1952. **84**, № 1. С. 55.
20. Aivalis K.G., Sreenivasan K.R., Tsuji Y. et al. // Phys. Fluids. 2002. **14**, N 7. P. 2439.
21. Mi J., Antonia R.A. // Exp. Therm. Fluid Sci. 1994. **8**. P. 328.
22. Anfossi D., Oettl D., Degrazia G., Goulart A. // Bound. Layer Met. 2005. **114**. P. 179.
23. Wilson D.K., Brasseur J.G., Gilbert K.E. // J. Acoust. Soc. Am. 1999. **105**, N 1. P. 30.