

# Профили коэффициента турбулентного обмена и концентрации взвеси в системе стратифицированных течений

Б. И. Самолюбов

*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет,  
кафедра физики моря и вод суши. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.  
E-mail: samolyubov@phys.msu.ru*

Статья поступила 22.02.2012, подписана в печать 13.03.2012.

Представлено теоретическое распределение коэффициента турбулентной диффузии для системы стратифицированных течений с учетом особенностей обмена в пограничных слоях и зонах с нулевым вертикальным градиентом скорости. Приведено решение уравнения диффузии взвеси с применением полученного распределения турбулентной вязкости. Представлены результаты апробации теоретического решения по данным натурных измерений распределений концентрации взвеси по всей глубине водоема в четырех системах течений.

**Ключевые слова:** стратифицированные течения, гидродинамическая устойчивость, турбулентный обмен, диффузия взвеси.

УДК: 556.556:532.5. PACS: 92.10.Lq, 92.10.Wa, 92.40.-t, 92.40.Ni.

## Введение

Коэффициент турбулентного обмена (или турбулентная вязкость) относится к числу ключевых параметров в математических моделях переноса импульса и примесей течениями в водохранилищах, озерах и морях. Этим обусловлена важность разработки методов определения коэффициента обмена для решения проблем геофизической гидродинамики, задач гидроэкологии, гидротехнического строительства и других [1–5]. Тем не менее существующие подходы к описанию турбулентной вязкости носят преимущественно полуэмпирический характер и не позволяют учесть одновременно особенности обмена в пограничных слоях и зонах с нулевым вертикальным градиентом скорости в системах стратифицированных течений [6, 7]. Под системой течений понимается совокупность потоков, развивающихся на разных глубинах от поверхности до дна и взаимодействующих между собой. В такие системы входят струи, придонные, стоковые, циркуляционные и другие течения. Цели данной работы сводятся к следующему. Получение теоретического распределения коэффициента турбулентной вязкости в системе течений, включающей зоны с нулевыми вертикальными градиентами скорости. Проверка возможности применения этого распределения в решении уравнения диффузии взвеси для получения профилей концентрации взвеси в системах течений.

### 1. Выражение коэффициента турбулентного обмена

Подход, применяемый для получения выражения турбулентной вязкости  $K_u$ , базируется на следующих положениях.

1. Значение  $K_u$  определяется произведением стандарта вертикальной компоненты пульсаций скорости течения  $\sigma_w = \langle w'^2 \rangle^{1/2}$  на масштаб турбулентности  $\ell$ , согласно полуэмпирической теории турбулентности [8, 9], с коэффициентом  $\alpha_1 = \text{const}$ .

2. Энергия (удельная, на единицу объема воды) вертикального турбулентного переноса  $\sigma_w^2$  в сдвиговых

слоях течения пропорциональна  $u_\tau^2 = \ell^2(\partial_z U)^2$  [6, 8, 9], а в зонах с  $\partial_z U = 0$  значение  $\sigma_w^2$  больше нуля [3, 10]. Здесь  $u_\tau = \ell|\partial_z U|$  — сдвиговая скорость.

3. В общем случае с  $|\partial_z U| \geq 0$ , учитывая влияние стратификации, энергия  $\sigma_w^2$  пропорциональна  $\phi_R(u_\tau + u_c)^2$  с коэффициентом  $\alpha_2 = \text{const}$ . Здесь  $\phi_R \leq 1$  — функция устойчивости [1, 6], убывающая с ростом числа Ричардсона  $Ri = N^2/(\partial_z U)^2$ , где  $N = (g(-\partial_z \rho)/\rho)^{1/2}$  — частота плавучести,  $\rho$  — плотность воды. Величина  $u_c$  — компонента скорости вертикального турбулентного переноса, обусловленная диффузией пульсационной энергии из зон ее продукции. Значение  $u_c$  максимально при  $\partial_z U = 0$  и равно нулю в зонах с максимумами  $\partial_z U = (\partial_z U)_{\text{MAX}}$ .

4. Принимается, как и в [6], что изменение энергии  $\sigma_w^2$  за счет влияния стратификации равно (с коэффициентом  $\alpha_3 = \text{const}$ ) работе  $\ell^2 N^2$  при массопереносе на высоту  $\ell$ .

С учетом положений 2, 3 удельную энергию  $\sigma_w^2$  можно выразить в виде

$$\sigma_w^2 = \alpha_2 \phi_R (u_\tau + u_c)^2. \quad (1)$$

Согласно положению 4, разность значений  $\sigma_w^2$  при  $\phi_R = 1$  и  $\phi_R < 1$  равна

$$\sigma_w^2|_{\phi_R=1} - \sigma_w^2 = \alpha_3 \ell^2 N^2. \quad (2)$$

Из (1), (2) с  $\ell^2 = \alpha_4 \sigma_w^2 / (|\partial_z U| + (u_c/\ell))^2$  (по [6, 9] и положениям 2, 3) следует  $\phi_R$  в виде

$$\phi_R = \left( 1 + \alpha_2^* \left( \frac{N^2 \ell^2}{(u_\tau + u_c)^2} \right) \right)^{-1}, \quad (3)$$

где  $\alpha_2^* = \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 = \text{const}$ . Из (1), (3) с  $K_u = \alpha_1 \sigma_w \ell$  (положение 1) находим  $K_u$  в виде

$$K_u = \frac{c_\alpha \cdot (u_\tau + u_c) \ell}{(1 + \alpha_2^* Ri_d)^{1/2}}, \quad (4)$$

где  $c_\alpha = \alpha_1 (\alpha_2^*)^{1/2} \cong 1$ ,  $\alpha_2^* = 0.4$ ,

$$Ri_d = \frac{N^2 \ell^2}{(u_\tau + u_c)^2} \quad (5)$$

— модифицированное число Ричардсона, которое, в отличие от градиентного числа  $Ri$ , конечно при  $\partial_z U = 0$ . Перечисленными в положении 3 свойствами скорости переноса  $u_c$  обладает функция  $u_c = 0.02 \cdot \bar{U}_{FD} \cdot (1 - |\partial_z U|/|\partial_z U|_{MAX})$ . Здесь  $\bar{U}_{FD}$  — средний по глубине модуль скорости  $U$ , а 0.02 — минимальное известное значение  $\sigma_w/\bar{U}_{FD}$  [3, 6, 10].

## 2. Профиль масштаба турбулентности

Масштаб  $\ell$  зависит от высот придонных пограничных слоев и слоев смешения, которые зависят от устойчивости плотностной стратификации вод. Профиль масштаба турбулентности  $\ell$  получается путем сшивания его распределений в трех областях (придонной, центральной и приповерхностной) в виде

$$\ell = \begin{cases} \frac{\kappa z}{1 + \kappa z/L_a}, & z \leq z_m; \\ \ell_{mix}, & z_m \leq z \leq z_{ju}; \\ \frac{\kappa(H-z)}{1 + \kappa(H-z)/L_{as}}, & z_{ju} \leq z \leq H. \end{cases} \quad (6)$$

Здесь  $z_m$  — уровень максимума скорости придонного течения (реперные уровни показаны на рисунке, *a*);  $z_{ju}$  — уровень верхней границы струи, ближайшей к поверхности воды;  $L_a, L_{as}$  — интегральные масштабы обмена при  $z \leq z_m$  и  $z_{ju} \leq z \leq H$ . Выражение  $\ell$  при  $z \leq z_m$  следует из [1, 3], а при  $z_{ju} \leq z \leq H$  — аналогично, но для роста  $\ell$  с глубиной  $H - z$ .

В центральной части (от  $z_m$  до  $z_{ju}$ ) масштаб  $\ell$  равен среднему по его значениям в  $n_\ell$  слоях смешения придонного потока и струй в виде

$$\ell_{mix} = 0.06 \cdot n_\ell^{-1} \sum_{i=1}^{n_\ell} \Delta z_{mi}.$$

В этом выражении учитывается пропорциональность масштаба  $\ell$  и толщины слоя смешения с точностью до коэффициента 0.06 по [3, 11]. Толщина слоя смешения равна разности ординат верхней границы и максимума скорости конкретного течения. Значения  $L_a$  и  $L_{as}$  находятся из условий сшивания профилей  $\ell$  (6) на границах слоев по формулам

$$L_a = \frac{\kappa z_m \ell_{mix}}{\kappa z_m - \ell_{mix}}, \quad L_{as} = \frac{\kappa \ell_{mix} (H - z_{ju})}{\kappa (H - z_{ju}) - \ell_{mix}}.$$

## 3. Решение уравнения диффузии взвеси

Распределение концентрации взвеси находилось из системы уравнений диффузии и неразрывности (в рамках плоской задачи) вида

$$\partial_t S + \partial_x US + \partial_z (W - \omega_f) S = -\partial_z \langle W' S' \rangle, \quad (7)$$

$$\partial_x U + \partial_z W = 0. \quad (8)$$

В (7)  $U$  и  $W$  — продольная и вертикальная компоненты скорости течения,  $S$  — концентрация взвеси,

$S'$  и  $W'$  — пульсации  $S$  и  $W$ ,  $\omega_f = \sum_{i=1}^{\Phi_{fr}} \omega_{fi} V_i$  — средневзвешенная гидравлическая крупность (скорость оседания) частиц,  $\omega_{fi}$  и  $V_i$  — крупность и объемная концентрация частиц конкретной фракции (диапазона размеров),  $\Phi_{fr}$  — число фракций.

Уравнение (7) решается в квазистационарном приближении с заменой (в приближении Буссинеска)  $\langle W' S' \rangle = -K_s \partial_z S$ , где  $K_s = K_u / Sc$  — коэффициент обмена для взвеси,  $Sc$  — число Шмидта. Интегрирование (7) проводится по  $z$  от  $z_k$  и выше, где  $z_k \ll H$  — ближайший ко дну уровень регистрации  $S$ . Граничные условия: а) у поверхности при  $z = H - 0.5$  м (параметры с подстрочным индексом  $H$ )  $K_s \partial_z S = (K_s \partial_z S)_H$ ,  $S = S_H$ ,  $W = W_H$ ,  $\omega_f = \omega_{fH}$  и б) у дна при  $z = z_k$  (параметры с индексом  $k$ )  $S(z_k) = S_k$ .

Значения  $W$  и соответственно  $W_H$  определяются по уравнению (8).

С учетом приближения [3]

$$\int_z^H US dz \cong H \bar{U}_{FD} \bar{S}_{FD} \left(1 - \frac{z}{H}\right)$$

интеграл второго слагаемого слева в (7) не включает  $S(z)$ . Здесь  $\bar{U}_{FD}$ ,  $\bar{S}_{FD}$  — средние по глубине значения  $U$  и  $S$ . Такая замена позволяет свести первый интеграл уравнения (7) к виду, имеющему решение в квадратурах, и получить распределение концентрации  $S$  в виде

$$S = e^{-F} \left( S_k + \int_{z_k}^z \phi e^F dz \right), \quad (9)$$

где

$$F = \int_{z_k}^z \frac{\omega_f - W}{K_s} dz, \\ \phi = \frac{-\partial_x (Q_{FD} \bar{S}_{FD}) (1 - z/H) + (\partial_x Q_{FD} + \omega_{fH}) S_H - \langle W' S' \rangle_H}{K_s}.$$

Здесь  $Q_{FD} = \bar{U}_{FD} H$  — расход воды на единицу ширины потока всей глубине.

Число Шмидта во всех случаях было близким к единице. Скорость  $\omega_f$  определялась найденным в данной работе выражением  $\omega_f = \omega_{fu} + k_{\omega R} Ri_d + (\omega_f)_{min}$  с учетом связи агрегации частиц и устойчивости течения [3, 12]. Здесь

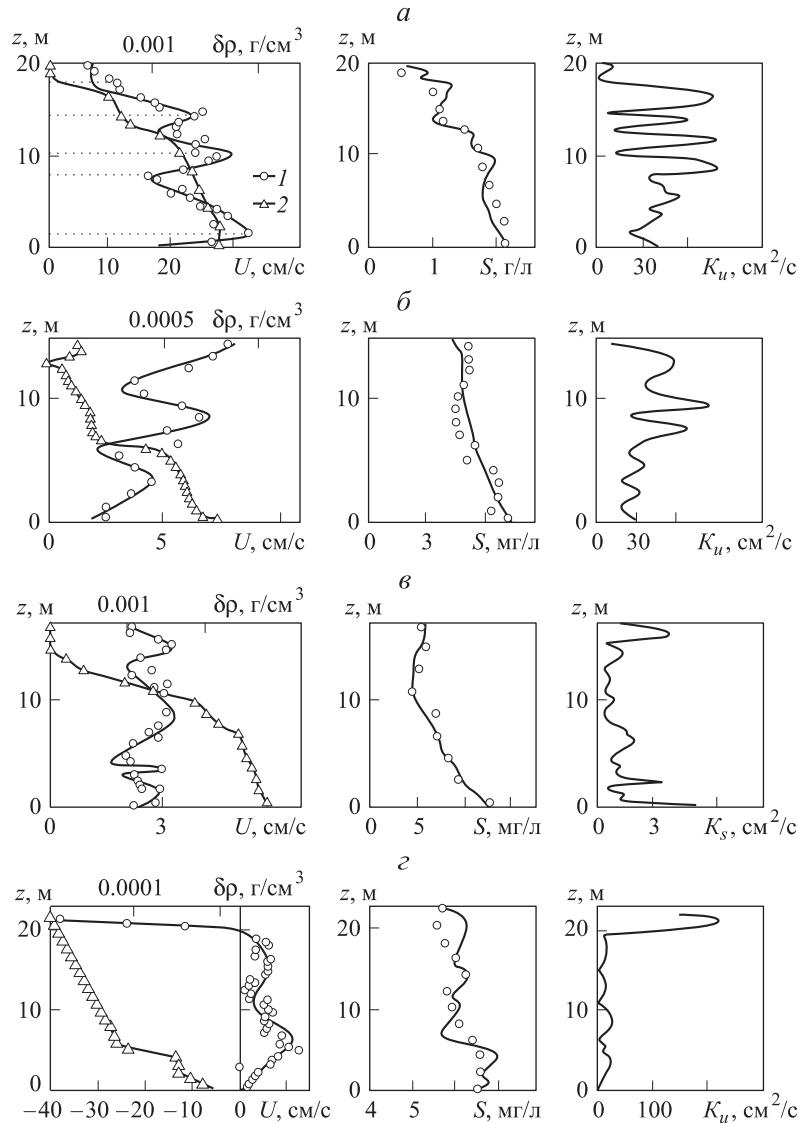
$$(\omega_f)_{min} = 2.3 \cdot 10^{-4} \text{ см/с}, \\ k_{\omega R} = 1.1 \cdot 10^{-3} \left[ \left( \frac{U_{FD}}{(U_{FD})_{min}} \right)^{3/2} - 1 \right], \quad (U_{FD})_{min} = 2 \text{ см/с}, \\ \omega_{fu} = \omega_{fu}(U, Ri_d, \nu, \rho_s)$$

по [3],  $\nu$  — кинематическая молекулярная вязкость воды,  $\rho_s$  — плотность материала взвеси.

Турбулентный поток массы взвеси у поверхности  $\langle W' S' \rangle_H$  находился по выражению

$$\langle w' s' \rangle_H = \omega_{fH} S_H \left[ 1 - 0.073 \exp \left( 3.5 \cdot 10^4 \frac{S_H}{\rho_s} \right) \right],$$

полученному и проверенному по данным измерений (при апробации модели). Согласно этому выражению, отклонение  $\langle W' S' \rangle_H$  от диффузионного тождества  $\langle w' s' \rangle_H = \omega_{fH} S_H$  экспоненциально увеличивается с ростом приповерхностной концентрации  $S_H$ . Для равнинных водохранилищ и озер с  $S_H \leq 25$  мг/л это отклонение не превышает 10%.



Профиля скорости  $U$  (кружки) и изменения плотности воды с глубиной  $\delta\rho$  (треугольники) относительно приповерхностного значения  $\rho(H - 0.5 \text{ м})$ , концентрации взвеси  $S$  и коэффициента турбулентного обмена  $K_u$  в четырех системах течений ( $\delta\rho = \rho(z) - \rho(H - 0.5 \text{ м})$ ):  $a$  — в системе с двумя струями, стоковым и доминирующим плотностным течениями (Нурекское водохранилище, 16.08.1980);  $b$  — в системе с преобладающим стоково-дрейфовым течением, струей над термоклином и плотностным потоком (Рузское водохранилище 28.06.2000);  $c$  — в системе с плотностным и стоковым течениями и с двумя струями в ступеньках термоклина (Истринское водохранилище 05.07.2000);  $d$  — в системе со сплонно-нагонным и плотностным потоками (оз. Онежское, Петрозаводская губа, 19.09.2007). Сплошные кривые на профилях  $U(z)$  и  $S(z)$  — теоретические (для  $U$  по [3], для  $S$  по модели, представленной в этой статье). Горизонтальные пунктирные линии на рис.  $a$  — уровни, которые, начиная с ближайшего ко дну, соответствуют максимуму скорости плотностного потока  $z_m$ , толщине этого потока  $z_{ju}$ , максимумам скоростей двух струй  $(z_{mj})_1$ ,  $(z_{mj})_2$  и верхней границе струи, ближайшей к поверхности воды,  $(z_{ju})_2$ .

Значение  $S_H$  оценивалось по придонной концентрации  $S_k$ . Для этого применялась найденная по экспериментальным данным зависимость  $S_H/S_k$  от скорости  $\overline{U}_{FD}$  в виде

$$\frac{S_H}{S_k} = \left( \frac{S_H}{S_k} \right)_C + 0.1 \left( \frac{\overline{U}_{FD}}{(\overline{U}_{FD})_{\min}} + 0.6 \right)^2 \times \\ \times \exp \left[ -0.04 \left( \frac{\overline{U}_{FD}}{(\overline{U}_{FD})_{\min}} + 0.6 \right)^2 \right],$$

где  $(S_H/S_k)_C = 0.15$ . Концентрация  $S_k(x)$  может быть

определенна по модели из [3]. На отдельных вертикалях в следующем разделе используются измеренные значения  $S_k$ . Распределения скорости  $U$  и плотности воды  $\rho$  входят в набор входных параметров.

#### 4. Сравнение теоретических и измеренных профилей концентрации взвеси

Проверка выражения турбулентной вязкости (4) проводилась путем сопоставления распределений  $S$ , найденных по (9) с  $K_u$  из (4), и профилей  $S$ , измеренных на Нурекском, Рузском, Истринском водохранилищах и на Онежском озере (рисунок) [3, 4].

В системе супензионных течений (Нурекское водохранилище) струи и стоковое течение отстают от придонного потока (рисунок, *a*). Значения  $K_u$  в струях в 2–3 раза больше чем в других потоках. Распределение  $S$  — квазиступенчатое, стандартное отклонение точек от кривой  $\varepsilon_s = 19\%$ .

В системе с термической стратификацией (Рузское водохранилище) стоково-дрейфовое течение опережает струю над термоклином и плотностный поток (рисунок, *b*). Постоянная составляющая распределения коэффициента  $K_u$  близка к амплитудам его пиков. Неоднородность профиля  $S$  максимальна в термоклине,  $\varepsilon_s = 11\%$ .

В системе медленных течений с термической стратификацией в Истринском водохранилище струи опережают другие потоки (рисунок, *в*). Профиль  $K_u$  содержит пики у дна и у поверхности. Концентрация  $S$  монотонно спадает с высотой,  $\varepsilon_s = 11\%$ .

В системе со слабой термической стратификацией в Онежском озере (рисунок, *г*) преобладает сгонно-нагонное течение, опережающее плотностной поток. Этую особенность системы течений отражает пик  $K_u$  у поверхности. Профиль  $S$  в основном близок к однородному с небольшим повышением концентрации в придонном потоке,  $\varepsilon_s = 6\%$ .

Сопоставление на рисунке проведено для четырех систем течений со скоростями  $\overline{U_{FD}} = 2\text{--}26$  см/с, соотношением концентраций  $S_H/S_k = 0.15\text{--}0.95$  при  $S_k = 6 \cdot 10^{-6}\text{--}2.1 \cdot 10^{-3}$  г/см<sup>3</sup>, гидравлическими крупностями  $\omega_{fk} = 5 \cdot 10^{-4}\text{--}3 \cdot 10^{-2}$  см/с, средними по глубине числами Ричардсона  $Ri_d = 0.4\text{--}12$  при глубинах  $H = 13\text{--}23$  м. Со средними по глубине значениями коэффициента турбулентного обмена  $K_u = 1\text{--}7$  см<sup>2</sup>/с.

Как следует из сравнения теоретических и измеренных профилей  $S$ , кривые, полученные по (9) с применением коэффициента обмена из (4), позволяют учсть основные особенности фактических распределений. Разброс точек относительно кривых  $S(z)$  на рисунке обусловлен приближениями квазистационарности, плоской задачи, однородности профиля масштаба турбулентности на промежуточных глубинах, а так-

же неучтенными эффектами вихреволнового переноса и неоднородности элементного состава взвеси.

## Заключение

Получено полуэмпирическое выражение коэффициента турбулентного обмена в системе течений. Учтены эффекты влияния плотностной стратификации, энергообмена в слоях с нулевыми градиентами скорости и изменения масштаба турбулентности.

Найдено решение уравнения диффузии взвеси по всей глубине водоема.

Проверка выражения турбулентной вязкости при расчетах концентрации взвеси в четырех системах течений подтвердила его практическую пригодность.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 11-05-01146).

## Список литературы

1. Mellor G.L., Yamada T. // Rev. Geophys. Space Phys. 1982. **20**. P. 851.
2. Umlauf L., Lemmin U. // Limnol. Oceanogr. 2005. **50**, N 5. P. 1601.
3. Самолюбов Б.И. Плотностные течения и диффузия примесей. М., 2007.
4. Самолюбов Б.И., Иванова И.Н. // Изв. РАН. Сер. физ. 2010. № 12. С. 1770.
5. De Cesare G., Boillat J.L. // XXX IAHR Congress AУTh. Thessaloniki, Greece, 24–29 August 2003. **1**, Theme C. P. 381.
6. Анисимова Е.П., Петров В.В., Сперанская А.А., Шитов М.В. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1992. № 5. С. 63.
7. Tuomi L., Myrberg K. // 8th Baltic Sea Congress. Transport and mixing in the Baltic Sea and other stratified basins. 22–26 August 2011. St. Petersburg, Russia. Abstr. P. 60.
8. Прандтль Л. Гидроаэромеханика. М.; Ижевск, 2002.
9. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М., 1973.
10. Kneller B.C., Bennett S.J. // J. Geophys. Res. 1999. **104**, N C3. P. 5381.
11. Turner J.S. // J. Fluid Mech. 1986. **173**. P. 431.
12. MacIntyre S., Alldredge A.L. // Limnol. Oceanogr. 1995. **40**, N 3. P. 449.

## Turbulent diffusivity and suspended sediment concentration profiles in the system of stratified currents

**Б. И. Самолюбов**

Department of Marine and Inland Water Physics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.

E-mail: samolyubov@phys.msu.ru.

This article introduces the theoretical expression of turbulent diffusivity for the system of stratified currents with taking into account the peculiarities of the exchange in the boundary layers and in the zones inside which the current velocity vertical gradient is equal zero. There is presented the solution of the equation of the diffusion of suspended sediments with utilization of the obtained expression of turbulent viscosity. The results of approbation of the theoretical solution on the base of data of natural measurements over the entire depth in four systems of currents are introduced.

**Keywords:** stratified currents, hydrodynamic stability, turbulent exchange, turbulent diffusion of suspended sediments.

PACS: 92.10.Lq, 92.10.Wa, 92.40.-t, 92.40.Ni.

Received 22 February 2011.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 4(2012).

## Сведения об авторе

Самолюбов Борис Исаевич — докт. физ.-мат. наук, профессор, гл. науч. сотрудник; тел: (495) 939-10-46, e-mail: samolyubov@phys.msu.ru.