

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Пионная конденсация в среде с массивными кварками во внешнем сферически-симметричном неабелевом хромомагнитном поле

А. М. Щелкачев

*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет,
кафедра теоретической физики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
E-mail: ashchelkachev@gmail.com*

Статья поступила 20.04.2012, подписана в печать 24.04.2012.

Рассмотрена пионная конденсация в асимметричной по аромату кварковой среде с массивными кварками во внешнем сферически-симметричном неабелевом хромомагнитном поле. Показано, что внешнее поле является катализирующим фактором для появления пионной конденсации, в то время как конечная масса кварков препятствует возникновению этого явления.

Ключевые слова: пионная конденсация, кварк.

УДК: 537.534. PACS: 11.10.-z.

Введение

Непертурбативные эффекты в квантовой хромодинамике при низких энергиях удается исследовать только на основе приближенных методов в рамках различных эффективных моделей. Хорошо известно, что физика легких мезонов описывается на основе четырехфермионных моделей, таких как, например, модель Намбу–Йона–Лазинио (НЙЛ), которая успешно применялась при рассмотрении динамического нарушения хиральной симметрии (ДНКС) и бозонизации (см. [1, 2] и цит. лит.; обзор (2+1)-мерных четырех夸ковых эффективных моделей см. в [3]). Подчеркнем, что именно в рамках четырехфермионных моделей удалось показать, что внешнее магнитное или хромомагнитное поле индуцирует ДНКС [4–9], а также продемонстрировать генерацию масс фермионов даже в случае слабого взаимодействия между кварками [10–13]. Недавно большой интерес вызвали эффекты дикварковой конденсации и цветовой сверхпроводимости. Первые исследования уравнений щели и свободной энергии Гинзбурга–Ландау для системы релятивистских фермионов привели к выводу о возможности возникновения состояний сверхпроводимости и цветовой сверхпроводимости в кварковой среде [14–16]. Было показано, что, подобно случаю конденсации кварков, дикварковая конденсация также может катализироваться сильными внешними (вакуумными) калибровочными полями [17–20]. Недавно обсуждалась возможность образования новой фазовой структуры, а именно пионного конденсата, в плотной кварковой среде за счет асимметрии ее изоспинового состава [21–23] (см. также [24–27]).

Общие положения

Будем рассматривать расширенную модель НЙЛ с двумя ароматами кварков. В D -мерном искривленном пространстве с сигнатурой $(+, -, -, -, \dots)$ лагранжиан теории имеет вид

$$\mathcal{L} = \bar{q} \left[i\gamma^\mu \nabla_\mu + \mu \gamma^0 \right] q + \frac{G_1}{2N_c} \left[(\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma^5 \tau q)^2 \right] + \frac{G_2}{N_c} \left[i\bar{q}_c \epsilon \epsilon^b \gamma^5 q \right] \left[i\bar{q} \epsilon \epsilon^b \gamma^5 q_c \right]. \quad (1)$$

В формуле (1) через ∇_μ обозначена спинорная производная $\nabla_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu$, где $\Gamma_\mu = \frac{1}{2}\omega_\mu^{ab}\Sigma_{ab}$, ω_μ^{ab} — спинорная связность, а $\Sigma_{ab} = \frac{1}{4}[\gamma_a, \gamma_b]$; μ — химический потенциал кварков. В дальнейшем будем считать $N_f = 2$, а $N_c = 3$. Кварковое поле $q \equiv q_{i\alpha}$ является дублетом ароматов и цветовым триплетом, где $i = 1, 2$; $\alpha = 1, 2, 3$. Через $\tau \equiv (\tau^1, \tau^2, \tau^3)$ обозначены матрицы Паули в пространстве ароматов; $(\epsilon)^{ik} \equiv \epsilon^{ik}$, $(\epsilon^b)^{\alpha\beta} \equiv \epsilon^{\alpha\beta b}$ — полностью антисимметричные тензоры в пространстве ароматов и цветовом пространстве соответственно.

Сделаем в лагранжиане (1) преобразование Хаббарда–Стратоновича, вводя вспомогательные бозонные поля:

$$\tilde{\mathcal{L}} = \bar{q} \left[i\gamma^\mu \nabla_\mu + \mu \gamma^0 \right] q - \bar{q} \left(\sigma + i\gamma^5 \tau \pi \right) q - \frac{3}{2G_1} (\sigma^2 + \pi^2) - \frac{3}{G_2} \Delta^{*b} \Delta^b - \Delta^{*b} \left[i\bar{q}^t C \epsilon \epsilon^b \gamma^5 q \right] - \Delta^{*b} \left[i\bar{q} \epsilon \epsilon^b \gamma^5 C \bar{q}^t \right].$$

Поля σ и π являются цветовыми синглетами, а Δ^b — цветовым антитриплетом и синглетом по отношению к хиральной группе. Следовательно, если $\langle \sigma \rangle \neq 0$, то динамически нарушается хиральная симметрия, а если $\langle \Delta^b \rangle \neq 0$, то нарушается цветовая симметрия, так как поле $\langle \Delta^b \rangle$ несет цветовой заряд.

Эффективное действие для бозонных полей выражается через интеграл по кварковым полям:

$$\exp \left\{ iS_{\text{eff}}(\sigma, \pi, \Delta^b, \Delta^{*b}) \right\} = N' \int [dq][d\bar{q}] \exp \left\{ i \int d^D x \sqrt{-g} \tilde{\mathcal{L}} \right\}.$$

Найдем эффективный потенциал, глобальная точка минимума которого определит величины $\langle \sigma \rangle$ и $\langle \Delta^3 \rangle$.

По определению $S_{\text{eff}} = -V_{\text{eff}} \int d^4x$. Тогда получим

$$V_{\text{eff}} = \frac{3\sigma^2 + \pi^2}{2G_1} + \frac{3\Delta^b \Delta^{*b}}{G_2} + \tilde{V}, \quad \tilde{V} = -\frac{\tilde{S}}{v}, \quad v = \int d^4x.$$

Рассмотрим расширенную модель НЙЛ с числами цветов $N_c = 3$ и ароматов $N_f = 2$, заданную лагранжианом

$$\mathcal{L} = -\bar{q}(i\gamma_\nu \nabla_\nu + i\mu\gamma_0 + \sigma + m + i\gamma^5 \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\pi} + i\mu' \tau_3 \gamma^0)q - \frac{1}{4G}(\sigma^2 + \pi^2), \quad (2)$$

где $\nabla_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a \frac{\lambda_a}{2}$, $\mu = \frac{(\mu_u + \mu_d)}{2}$ — химический потенциал, усредненный по аромату [28], а $\mu' = \frac{(\mu_u - \mu_d)}{2}$ — химический потенциал, усредненный по разнице ароматов.

Фундаментальный кварковый лагранжиан модели НЙЛ (2) с четырехфермионным слагаемым обеспечивает возможность спонтанного нарушения как хиральной, так и цветовой симметрии. В итоге основное состояние модели может характеризоваться двумя конденсатами — кварковым $\langle \bar{q}q \rangle$ (спонтанное нарушение хиральной симметрии) и дикварковым $\langle qq \rangle$ (спонтанное нарушение цветовой симметрии). Мы будем рассматривать ситуацию, когда дикварковый конденсат не образуется, $\langle qq \rangle = 0$, однако кварковая материя ароматово асимметрична.

Для того чтобы рассмотреть возможность генерации кваркового и пионного конденсатов, введем вакуумную амплитуду Z системы:

$$Z = \int dq d\bar{q} d\sigma d\pi_i \exp \left[\int d^4x \mathcal{L} \right].$$

Пренебрегая флуктуациями $\delta\sigma$ и $\delta\boldsymbol{\pi}$, положим

$$-\frac{1}{2G}\sigma = \langle \bar{q}q \rangle, \quad -\frac{1}{2G}\boldsymbol{\pi} = \langle i\bar{q}\boldsymbol{\tau}\gamma_5 q \rangle.$$

Тогда эффективное евклидово действие получим в виде

$$W_E = \ln Z = \\ = \tau \int \frac{dp_4}{2\pi} \sum_{\lambda, \alpha, k, \kappa} \ln \left[p_4^2 + (\varepsilon - \kappa\mu)^2 - (\tau L^3) \frac{\sigma^2 + \pi^2}{4G} \right],$$

где τ — интервал мнимого времени, $\alpha = 1, 2, 3$ — цветовые индексы для кварков с квантовыми числами k , $\lambda = \pm 1$ — знак химического потенциала μ' и $\kappa = \pm 1$ — химического потенциала μ , что соответствует распределению заряда кварков.

Спектр кварков при $\alpha = 3$

$$\varepsilon_{\boldsymbol{p}, \lambda} = \sqrt{\left(\sqrt{(\sigma + m)^2 + \boldsymbol{p}^2 + \pi_3^2 + \lambda\mu'} \right)^2 + \pi_1^2 + \pi_2^2}, \quad (3)$$

а при $\alpha = 1, 2$

$$\varepsilon_{k, \lambda} = \sqrt{\left(\sqrt{(\sigma + m)^2 + \Pi_k^2 + \pi_3^2 + \lambda\mu'} \right)^2 + \pi_1^2 + \pi_2^2}, \quad (4)$$

где Π_k^2 — собственные значения оператора $-(\boldsymbol{\gamma} \nabla)^2$, где $\nabla = \boldsymbol{\partial} - ig\boldsymbol{A}^a \lambda_a/2$.

Если температура $T = 1/\beta > 0$, то, подставив $p_4 \rightarrow \frac{2\pi}{\beta}(l + \frac{1}{2})$, $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, получаем термодинамический потенциал

$$\Omega = -\frac{W_E}{\beta L^3} = -\frac{1}{\beta L^3} \sum_{\lambda, \kappa} \sum_{k, \alpha} \sum_{l=+\infty}^{l=-\infty} \int_{1/\Lambda_s^2}^{\infty} \frac{ds}{s} \times \\ \times \exp \left\{ -s \left(\frac{2\pi(l + \frac{1}{2})}{\beta} \right)^2 - s(\varepsilon - k\mu)^2 \right\} + \frac{\sigma^2 + \pi^2}{4G},$$

где $\Lambda_s^2 = 2\Lambda_p^2$ — обрезание.

Предположим, что внешнее поле является сферически-симметричным неабелевым хромомагнитным полем

$$A_1^1 = A_2^2 = A_3^3 = \sqrt{\frac{H}{g}}, \quad H_i^\alpha = \delta_i^\alpha H (i = 1, 2, 3),$$

где все остальные компоненты A_μ^α отсутствуют.

Энергетический спектр имеет шесть ветвей, две из которых соответствуют кваркам, которые не взаимодействуют с хромомагнитным полем:

$$\varepsilon_{1,2}^2 = \left(\sqrt{\sigma^2 + \boldsymbol{p}^2} + \lambda\mu' \right)^2 + \pi_1^2,$$

а остальные четыре выглядят как

$$\varepsilon_{1,2}^2 = \left(\sqrt{\sigma^2 + \left(\sqrt{\frac{gH}{4}} \pm \boldsymbol{p} \right)^2} + \lambda\mu' \right)^2 + \pi_1^2,$$

$$\varepsilon_{1,2}^2 = \left(\sqrt{\sigma^2 + \left(\sqrt{\frac{gH}{4}} \pm \sqrt{gH + \boldsymbol{p}} \right)^2} + \lambda\mu' \right)^2 + \pi_1^2.$$

Будем предполагать, что внешнее поле, моделирующее глюонный конденсат, оценивается как $gH = 0.5$ ГэВ², т. е. оно достаточно сильное по сравнению с величиной конденсата. Значения других параметров возьмем, как в [25, 29], в том числе $G = 5.01$ ГэВ⁻², $\Lambda_p = 0.650$ ГэВ.

Случай нулевой массы кварков

Рассмотрим случай, когда барионный химпотенциал, вторая и третья компоненты пионного конденсата, массы кварков и температура равняются нулю: $\mu = \mu_2 = \mu_3 = m = T = 0$, а первая компонента пионного конденсата, кварковый конденсат и изотопическая асимметрия отличны от нуля: $\pi_1 \neq 0$, $\sigma \neq 0$, $\mu' \neq 0$.

С учетом выражений для спектров (3), (4) термодинамический потенциал принимает вид

$$\Omega = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{1/\Lambda_s^2}^{\infty} \frac{ds}{s^{3/2}} \left[4 \sum_{\lambda} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-s\varepsilon_{\boldsymbol{p}, \lambda}^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{L^3} \sum_{\kappa} \sum_{k, \lambda, \alpha=1, 2} e^{-s\varepsilon_{k, \lambda}^2} \right] + \frac{\sigma^2 + \pi_1^2}{4G}. \quad (5)$$

Рассмотрим численный расчет при $\mu' > 0$. Значения параметров возьмем, как в [25, 29], в том числе $G = 5.01$ ГэВ⁻², $\Lambda_p = 0.650$ ГэВ. Это случай сильно-го взаимодействия между кварками. Он соответствует

константе связи $\tilde{g} = \frac{6GA^2}{\pi^2} = 1.29 > 1$ из работы [25]. При этом глобальный минимум эффективного потенциала $\Omega(\sigma, \pi_1)$ лежит на оси σ или π_1 .

В работе [29] показано, что при этих параметрах пионная конденсация (при внешнем поле $gH = 0$) наступает только при $\mu_I = 2\mu' > m_\pi \approx 0.15$ ГэВ (где m_π — масса π -мезона). Продемонстрируем, что пионная конденсация имеет место во внешнем поле $gH = 0.5$ ГэВ², которое достаточно сильно по сравнению с величиной конденсата.

Рассмотрим случай $\mu' = 0.1$ ГэВ, тогда $\mu_I = 2\mu' > m_\pi$, т. е. пионная конденсация наступает и без внешнего поля. Во внешнем поле глобальные минимумы $\Omega(0, \pi_1)$ на рис. 1, б немного ниже, чем глобальные минимумы $\Omega(\sigma, 0)$ на рис. 1, а, что свидетельствует о сохранении катализа пионной конденсации хромомагнитным полем.

Расчет показывает, что при увеличении внешнего поля gH эффект пионной конденсации усиливается.

Случай с конечной массой кварков

Рассмотрим влияние ненулевой массы кварков [29] на эффект пионной конденсации, введя массу кварков $m = 0.005$ ГэВ во внешнем поле $gH = 0.5$ ГэВ² (при этом значения остальных параметров те же, что и выше). В этом случае термодинамический потенциал принимает вид (5), где выражения для спектра кварков (3), (4) учитывают, что $m \neq 0$.

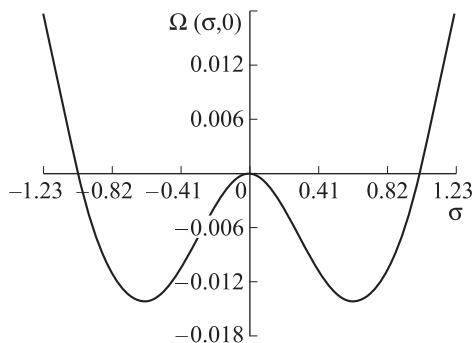


Рис. 1. Термодинамический потенциал Ω во внешнем сферически-симметричном неабелевом хромомагнитном поле как функция $\sigma(\pi_1 = 0)$ (а) и $\pi_1(\sigma = 0)$ (б) при $m = 0$ и $\mu' = 0.1$ ГэВ

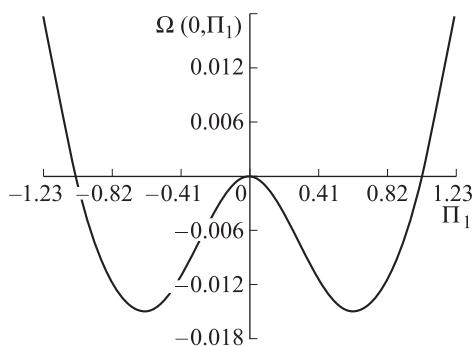


Рис. 2. Термодинамический потенциал Ω во внешнем сферически-симметричном неабелевом хромомагнитном поле как функция $\sigma(\pi_1 = 0)$ (а) и $\pi_1(\sigma = 0)$ при $m = 0.005$ ГэВ и $\mu' = 0.1$ ГэВ

Сравним зависимости, изображенные на рис. 2, а, б, при $\mu' = 0.1$ ГэВ. Локальные минимумы на графике $\Omega(0, \pi_1)$ немного ниже, чем $\Omega(\sigma, 0)$, что означает наличие пионного конденсата и в случае конечной массы кварков.

Заключение

Рассмотрим влияние ненулевой массы кварков [29] на эффект пионной конденсации, введя массу кварков $m = 0.005$ ГэВ во внешнем ротационно-симметричном неабелевом хромомагнитном поле $gH = 0.5$ ГэВ² (при этом значения остальных параметров те же, что и выше). В этом случае термодинамический потенциал принимает вид (5), где выражения для спектра кварков (3), (4) учитывают, что $m \neq 0$.

Сравнение рис. 2, а, б при $\mu' = 0.1$ ГэВ показывает, что локальный минимум на графике $\Omega(0, \pi_1)$ немного ниже, чем $\Omega(\sigma, 0)$, что означает наличие пионного конденсата и в случае конечной массы кварков.

Автор выражает благодарность В. Ч. Жуковскому, К. Г. Клименко, А. В. Борисову, Д. Эберту.

Список литературы

1. Ebert D., Reinhardt H. // Nucl. Phys. 1986. **B271**. P. 188.
2. Ebert D., Reinhardt H., Volkov M.K. // Progr. Part. Nucl. Phys. 1994. **33**. P. 1.
3. Vshivtsev A.S., Zhukovsky V.Ch., Klimenko K.G., Magnitsky B.V. // Phys. Part. Nucl. 1998. **29**. P. 523.
4. Klimenko K.G. // Teor. Mat. Fiz. 1991. **89**. P. 211.
5. Klimenko K.G. // Teor. Mat. Fiz. 1992. **90**. P. 3.
6. Klimenko K.G. // Z. Phys. 1992. **C54**. P. 323.
7. Krive I.V., Naftulin S.A. // Phys. Rev. 1992. **D46**. P. 2737.
8. Vshivtsev A.S., Klimenko K.G., Magnitsky B.V. // JETP Lett. 1995. **62**. P. 283.
9. Vshivtsev A.S., Klimenko K.G., Magnitsky B.V. // Teor. Mat. Fiz. 1996. **106**. P. 319.
10. Klimenko K.G., Magnitsky B.V., Vshivtsev A.S. // Nuovo Cim. 1994. **A107**. C. 439.
11. Klimenko K.G., Magnitsky B.V., Vshivtsev A.S. // Theor. Math. Phys. 1994. **101**. P. 1436.
12. Klimenko K.G., Magnitsky B.V., Vshivtsev A.S. // Phys. Atom. Nucl. 1994. **57**. P. 2171.
13. Ebert D., Zhukovsky V.Ch. // Mod. Phys. Lett. 1997. **A12**. P. 2567.
14. Bailin D., Love A. // Phys. Reports. 1984. **107**. P. 325.
15. Alford M., Rajagopal K., Wilczek F. // Phys. Lett. 1998. **B422**. P. 247.
16. Alford M., Rajagopal K., Wilczek F. // Nucl. Phys. 1999. **B537**. P. 443.
17. Zhukovsky V.Ch., Klimenko K.G., Khudyakov V.V., Ebert D. // JETP Lett. 2001. **73**. P. 121 (Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. 2001. **73**. P. 137).
18. Zhukovsky V.Ch., Khudyakov V.V., Klimenko K.G., Ebert D. // JETP Lett. 2001. **74**. P. 523 (Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. 2001. **74**. P. 595).
19. Ebert D., Klimenko K.G., Toki H. // Phys. Rev. 2001. **D64**. P. 014038 (hep-ph/0011273).
20. Ebert D., Khudyakov V.V., Zhukovsky V.Ch., Klimenko K.G. // Phys. Rev. 2002. **D65**. P. 054024 (hep-ph/0106110).
21. Frank M., Buballa M., Oertel M. // Phys. Lett. **B 562**. 2003. P. 221.
22. He L., Jin M., Zhuang P. // Phys. Rev. **D 74**. 2006. 036005.
23. Andersen J.O., Kyllingstad L. // hep-ph/0701033.

24. *Ebert D., Klimenko K.G.* // Eur. Phys. J. **C 46**. 2006. P. 771.
25. *Ebert D., Klimenko K.G.* // J. Phys. 2006. **G32** P. 599.
26. Жуковский В.Ч., Клименко К.Г., Федотов А.М., Эберт Д. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2006. № 2. С. 69.
27. *Ebert D., Klimenko K.G., Zhukovsky V.Ch., Fedotov A.M.* // Eur. Phys. J. 2007. **C49**. P. 709.
28. *Hatsuda T., Kanibibo T.* // Phys. Rep. 1994. **247**. P. 221.
29. *He L., Jin M., Zhuang P.* // Phys. Rev. **D71**. 2005. P. 116001.

Pion condensation in an environment with massive quarks in the external spherically symmetric non-Abelian chromomagnetic field

A. M. Shchelkachev

*Department of Theoretical Physics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.
E-mail: ashchelkachev@gmail.com.*

We consider pion condensation on the asymmetric flavor quark medium with massive quarks in the external spherically symmetric non-Abelian chromomagnetic field. It is shown that the external field is a catalyzing factor for the appearance of pion condensation, while the final mass of the quarks prevent the emergence of this phenomenon.

Keywords: pion condensation, quark.

PACS: 11.10.-z.

Received 20 April 2012.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 6(2012).

Сведения об авторе

Шелкачев Алексей Михайлович — аспирант; e-mail: ashchelkachev@gmail.com.