Диффузионно-волновое уравнение дробного порядка для сред с временной дисперсией

А. Н. Боголюбов, А. А. Кобликов, Д. Д. Смирнова[a], Н. Е. Шапкина[b]

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
E-mail: [a] d_d_smirnova@mail.ru, [b] neshapkina@mail.ru

Статья поступила 04.05.2012, подписана в печать 18.05.2012.

Исследуется поведение электромагнитных полей в средах с временной дисперсией со степенной зависимостью от времени. Показано, что такие среды являются фрактальными, а также найдена их фрактальная размерность. Из аналогов уравнений Максвелла для данного типа сред, записанных с помощью дробных производных Капуто, получены уравнения для скалярного и векторного потенциалов. Численно рассчитано электромагнитное поле в ограниченной области с произвольным распределением зарядов и токов.

Ключевые слова: фрактальная электродинамика, дробное интегродифференцирование, среды с памятью, временная дисперсия.

УДК: 530.1+537. PACS: 02.60.Nm, 41.20.Jb.

Введение

Временной дисперсией, или памятью, в той или иной мере обладает большое количество сред, например полимеры. Классические уравнения Максвелла, обычно применяемые для расчета электромагнитных полей, не способны учитывать временную дисперсию среды. Аппарат дробного интегродифференцирования дает возможность обобщить уравнения электродинамики для сред с памятью. В настоящей работе исследуется поведение электромагнитного поля в средах, обладающих временной дисперсий. На основе аналогов уравнений Максвелла, верных для данного типа сред, получена и решена численно система уравнений для векторного и скалярного потенциалов электромагнитного поля. В процессе исследования используются операторы дробного интегродифференцирования: дробные производные Капуто и Грюнвальда–Летникова [1].

1. История развития дробного интегродифференцирования

Операция дробного интегродифференцирования — это обобщение операций дифференцирования $\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}$ и взятия кратного интеграла $\int\limits_D f\,d\sigma$ по области D, имеющей размерность α, до этого определенных только для $\alpha \in \mathbb{N}$, на случай $\alpha \in \mathbb{R}$.

Мысль о дробном дифференцировании как обобщении понятия производной $\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}$ на нецелое значение α возникла почти одновременно с самим понятием дифференцирования. Первое упоминание этой идеи возникает в переписке Г. Лейбница (G. W. Leibniz) в 1695 г.

Дальнейшее развитие идея дробного интегродифференцирования получила в работах Л. Эйлера (L. Euler), в 1738 г. заметившего, что выражению $\frac{\partial^\alpha x^p}{\partial x^\alpha}$ можно придать смысл и при нецелых значениях α. Явная формула вычисления $\frac{\partial^{0.5} x^p}{\partial x^{0.5}}$ была приведена в трактате С. Лакруа (S. F. Lacroix) в 1820 г. Также в 1812 г. П. Лапласом (P. S. Laplace) была высказана идея о возможности дифференцирования нецелого порядка для функций, представимых в виде $f(x) = \int T(t) \cdot t^{-x}\,dt$.

Первое определение производной нецелого порядка было дано Ж. Фурье (J. Fourier) в 1822 г. В качестве определения дробной производной любого положительного порядка α он предложил использовать формулу, подходящую для большей части функций:

$$\frac{\partial^\alpha f(x)}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^\alpha\,d\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \cos\left(tx - t\lambda + \frac{\alpha\pi}{2}\right) dt.$$

В своем современном виде дробное интегродифференцирование сформировалось в работах Н. Абеля (N. H. Abel) и Ж. Лиувилля (J. Liouville). В 1823 г. в связи с задачей о таутохроне — кривой, при скольжении по которой под воздействием сил гравитации тело достигает нижней точки за одно и то же время вне зависимости от своего начального положения, — Абель решил интегральное уравнение следующего вида:

$$\int\limits_a^x \frac{F(t)\,dt}{(x-t)^\alpha} = f(x), \quad x > a, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Несмотря на то что постановка задачи о таутохроне приводит к значению $\alpha = 0.5$, уравнение было решено для $\forall\,\alpha \in (0,1)$. Данную работу сам Абель никак не связывал с дробным интегродифференцированием, но, как выяснилось позже, в левой части этого уравнения представлен интеграл дробного порядка $(1-\alpha)$.

В 1832 г. Ж. Лиувилль на основе формулы для дробного дифференцирования экспоненциальной функции $D^\alpha(e^{zx}) = z^\alpha e^{zx}$, полученной естественным обобщением производных целого порядка $\frac{\partial^n e^{zx}}{\partial x^n} = z^n e^{zx}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, верной при $\forall\, z \in \mathbb{C}$, получает формулу $D^{-\alpha} f(z) = \frac{1}{(-1)^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_{z_0}^{z} \frac{f(t)\,dt}{(z-t)^{1-\alpha}}$, $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, с точностью до множителя $(-1)^\alpha$, равную дробному интегралу Римана–Лиувилля.

Определение 1. Левосторонним дробным интегралом Римана–Лиувилля порядка $\alpha \in \mathbb{R}^+$ от функции

$y(t) \in L[a,b]$ называется выражение [1]

$$I_{ax}^{\alpha}(y(t)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^t \frac{y(t')\,dt'}{(t-t')^{1-\alpha}}.$$

Правосторонним дробным интегралом Римана–Лиувилля порядка $\alpha \in \mathbb{R}^+$ от функции $y(t) \in L[a,b]$ называется выражение

$$I_{xb}^{\alpha}(y(t)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_t^b \frac{y(t')dt'}{(t-t')^{1-\alpha}}.$$

В 1947 году Б. Риман (B. Riemann) получает формулу $f^{(\alpha)}(z) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int\limits_{z_0}^{z} \frac{f(t)\,dt}{(z-t)^{1+\alpha}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Эта формула была положена в основу дробных производных Римана–Лиувилля.

Определение 2. Дробная производная Римана–Лиувилля (правосторонняя) действительного порядка α от функции $y(x)$ с началом в точке a определяется по формуле [1]

$$D_{at}^{\alpha}(y(t)) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(-\alpha)} \displaystyle\int\limits_a^t \frac{y(t')\,dt'}{(t-t')^{\alpha+1}}, & \alpha < 0, \\ y(t), & \alpha = 0, \\ \dfrac{d^n}{dt^n} D_{at}^{\alpha-n} y(t), & n-1 < \alpha \leqslant n, \\ & n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{1}$$

Аналогично дается определение левосторонней производной Римана–Лиувилля $D_{tb}^{\alpha}(y(t))$, $b > t$.

Видно, что для $\alpha < 0$ дробная производная Римана–Лиувилля равна дробному интегралу Римана–Лиувилля порядка $(-\alpha)$. Дробные производные порядка $\alpha > 0$ получаются по индукции дифференцированием производных меньших порядков.

И Риман, и Лиувилль трактовали дробное дифференцирование порядка α как дробное интегрирование порядка $(-\alpha)$. Этот подход был сопряжен с некоторыми трудностями и не всегда давал адекватные результаты. Равенство $I_{ax}^{\alpha} D_{ax}^{\alpha}(f(x)) = f(x)$ для дробного интегродифференцирования Римана–Лиувилля верно только с точностью до так называемых дополнительных аддитивных функций — степенных функций с произвольными коэффициентами.

Идея рассматривать дробное дифференцирование как операцию, обратную дробному интегрированию, впервые была предложена Х. Хольмгреном (Hj. Holmgren) в 1865 г. Годом позже к этой же идее пришел не знакомый с работой Хольмгрена А. В. Летников.

Такому пониманию дробного дифференцирования удовлетворяет близкая к понятию дробной производной Римана–Лиувилля дробная производная Капуто (M. Caputo) (регуляризованная дробная производная) порядка α от функции $y(x)$. Правосторонняя дробная производная Капуто представима в следующем виде [2]:

$$\partial_{0t}^{\alpha}(y(t)) = D_{0t}^{\alpha-n} \frac{d^n y(t)}{dt^n}. \tag{2}$$

Из-за того что операция взятия регуляризованной дробной производной является обратной к операции дробного интегрирования Римана–Лиувилля, ее практическое применение более обширно.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что связь дробной производной Римана–Лиувилля (1) и Капуто (2) задается равенством

$$\partial_{0t}^{\alpha}(y(t)) = D_{0t}^{\alpha}(y(t)) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(0)}{\Gamma(k-\alpha+1)}. \tag{3}$$

В 1867 г. А. Грюнвальд (A. K. Grünwald), а в 1868 г. А. В. Летников обобщили разностную формулу Римана $f^{(\alpha)}(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(\Delta_h^{\alpha} f)(x)}{h^{\alpha}}$ на случай нецелых α. Таким образом, для любых функций $y(t)$, разложимых в степенной ряд в данной точке, дробную производную Римана–Лиувилля (1), а значит, и дробную производную Капуто (2), можно представить в виде конечных разностей дробного порядка.

Определение 3. Конечной разностью нецелого порядка α функции $y(x)$ на шаге h называется выражение [1]

$$\Delta_h^{\alpha} y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x-kh),$$

где коэффициенты $\binom{\alpha}{k} = \frac{(-1)^{k-1}\alpha\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(k+1)}$.

Определение 4. Правосторонняя (левосторонняя) дробная производная Грюнвальда–Летникова порядка $\alpha \in (0,1)$ определяется через конечные разности следующим образом [1]:

$$f_{\pm h}^{\alpha}(x) = \lim_{h\to +0} \left(\frac{\Delta_{\pm h}^{\alpha} f(x)}{h^{\alpha}} \right).$$

При достаточно малых h правостороннюю дробную производную Римана–Лиувилля можно записать в виде конечного ряда следующим образом:

$$D_{0t}^{\alpha} y(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{t/h} \omega_k^{(\alpha)} f(t-kh), \tag{4}$$

где коэффициенты разложения имеют следующий вид:

$$\omega_k^{(\alpha)} = (-1)^k \binom{\alpha}{k} = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(k+1)}. \tag{5}$$

В настоящей работе используется дробное дифференцирование только по временной оси, поэтому в дальнейшем ввиду ее однозначной направленности мы, не оговаривая этого дополнительно, будем работать только с правосторонними дробными производными. При дробном дифференцировании используется дробная производная Капуто. Для численного решения уравнений в дробных производных применяется формула (3), выражающая производную Капуто через производную Римана–Лиувилля, и разложение дробной производной Римана–Лиувилля (4), (5).

2. Фрактальные свойства сред с памятью

В последнее время дробное интегродифференцирование все чаще используется для описания объектов, обладающих фрактальными характеристиками.

Начало в изучении фракталов — сложных объектов, обладающих свойством самоподобия на различных

масштабах, — положили работы Б. Мандельброта [3]. Именно им в 1975 г. был введен сам термин «фрактал». Тогда же фрактальная геометрия начала проникать в различные области науки. Фракталы стали находить в структуре твердых тел, турбулентных потоках, на фазовых портретах динамических систем и во многих других аспектах физики [4–6].

Вначале фракталы определялись через свойство самоподобия, хотя уже Мандельбротом было отмечено нецелое значение их метрической размерности. В дальнейшем это свойство стало определяющим.

Еще одно принципиальное свойство фракталов — нетривиальная структура на всех шкалах. В этом состоит их отличие от регулярных фигур: если мы рассмотрим небольшой фрагмент регулярной фигуры в очень крупном масштабе, он будет похож на фрагмент прямой. Для фрактала увеличение масштаба не ведет к упрощению структуры, на всех шкалах мы увидим одинаково сложную картину.

Как было сказано выше, характерным свойством фракталов является нецелое значение размерности, базирующееся на определениях, введенных Ф. Хаусдорфом и А. Безиковичем в 1919 г.

Определение 5. Пусть совокупность множеств A_i с диаметрами $\operatorname{diam} A_i < \varepsilon$, где ε — действительное число, образует счетное покрытие множества A. Для каждого $\varepsilon > 0$ определим $m_d^\varepsilon = \inf \sum\limits_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam} A_i)^d$. Положим $m_d(A) = \sup\limits_{\varepsilon>0} m_d^\varepsilon(A)$. Тогда размерность Хаусдорфа–Безиковича D — точная верхняя грань множества таких действительных чисел d, для которых $m_d(A) > 0$.

Для регулярных объектов D — целое число, равное его топологической размерности.

Определение 6. Фрактал — объект, обладающий дробной размерностью Хаусдорфа–Безиковича, или объект, чья размерность Хаусдорфа–Безиковича превосходит его топологическую размерность.

Расчет меры Хаусдорфа–Безиковича по определению довольно сложен, поэтому обычно используются методы, которые приводят к правильному результату для большинства множеств. Для расчета размерности самоподобных фракталов часто используется метод масштабирования [7]:

$$D = \frac{\ln(\gamma)}{\ln(k)}, \tag{6}$$

где k — коэффициент растяжения координатной сетки, необходимого для достижения самоподобия, а γ — коэффициент подобия на шкале значений величин.

В настоящей работе свойство фрактальности среды определяется наличием у нее временной дисперсии. Среда считается обладающей ненулевой временной дисперсией, или памятью, если состояние каких-либо свойств в ней зависит от предыдущих значений этих свойств. В общем случае формула этой зависимости выглядит следующим образом:

$$F(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{\tau} \int\limits_0^t g(t-t') f(\boldsymbol{r}, t')\, dt', \tag{7}$$

где $g(t-t')$ — функция памяти, τ — характерное время процесса. Обычно временная дисперсия в среде не учитывается, тогда функция памяти $g(t-t')$ равна дельта-функции Дирака: $g(t-t') = \delta(t-t')$, а искомая функция представима в виде $F(\boldsymbol{r}, t) = f(\boldsymbol{r}, t)$.

В работе используется степенной вид функции памяти:

$$g(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{t^\alpha}, \tag{8}$$

где $\alpha \in (0, 1)$ — параметр, связанный с фрактальной размерностью среды.

С помощью метода, представленного в формуле (6), было получено выражение для размерности Хаусдорфа–Безиковича сред с памятью, задаваемой степенной формулой (8) с параметром α:

$$D = (1-\alpha). \tag{9}$$

Далее перейдем к исследованию поведения электромагнитного поля в средах, обладающих памятью.

3. Аналоги уравнений Максвелла для сред с памятью

В работе [8] из зависимости плотности тока, учитывающей память среды, были получены аналоги уравнений Максвелла для сред, обладающих памятью.

Временная дисперсия среды учитывается в следующей формуле для плотности тока:

$$\boldsymbol{j}(t) = \frac{q}{\tau} \int\limits_0^t g(t-t') n(t') \left(\frac{d\boldsymbol{r}(t')}{dt'} \right) dt', \tag{10}$$

где q — заряд электрона, τ — некоторое характерное время процесса, t — безразмерное (отнесенное к τ) время, $n(t)$ — концентрация электронов, $\boldsymbol{r}(t')$ — вектор перемещения, $g(t)$ — функция памяти вида (8).

Если концентрация носителей заряда $n(t)$ не зависит от времени, то эффективная скорость зарядов может быть записана через дробные производные (1) и (2) следующим образом:

$$\boldsymbol{v}(t) \equiv \frac{\boldsymbol{j}(t)}{n \cdot q} = \frac{1}{\tau n(t)} D_{0t}^{\alpha-1} \left(n \frac{d\boldsymbol{r}(t')}{dt'} \right) = \frac{1}{\tau} \partial_{0t}^\alpha \boldsymbol{r}(t'). \tag{11}$$

Из формулы (11) следует, что

$$\boldsymbol{r}(t) = \tau D_{0t}^{-\alpha} \boldsymbol{v}(t) + \text{const}. \tag{12}$$

При помощи выражения (11) в работе были [8] были получены аналоги уравнений Максвелла, верные для сред, описываемых формулой (10):

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\dfrac{1}{\tau} \partial_{0t}^\alpha \boldsymbol{B}, \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \dfrac{1}{\tau} \partial_{0t}^\alpha \boldsymbol{D}, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{D} = \rho. \end{cases} \tag{13}$$

Аналог уравнения непрерывности, связывающий плотность заряда ρ и плотность тока $\boldsymbol{j}$, выглядит следующим образом:

$$\frac{1}{\tau} \partial_{0t}^\alpha \rho + \operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0. \tag{14}$$

Как и в уравнениях классической электродинамики, величины $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{B}$ удовлетворяют материальным уравнениям

$$\begin{cases} \boldsymbol{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \boldsymbol{E}, \\ \boldsymbol{B} = \mu\mu_0 \boldsymbol{H}, \end{cases} \tag{15}$$

где $\varepsilon(\boldsymbol{r})$, $\mu(\boldsymbol{r})$ — относительные электрическая и магнитная проницаемости, в общем случае — функции координат и времени, ε_0 — электрическая, а μ_0 — магнитная проницаемость вакуума.

Для дальнейшего решения системы введем скалярный и векторный потенциалы:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}, \\ -\operatorname{grad} \Phi = \boldsymbol{E} + \dfrac{1}{\tau}\partial_{0t}^{\alpha} \boldsymbol{A}. \end{cases} \tag{16}$$

Система уравнений для скалярного и векторного потенциалов, полученная из системы (13), в общем случае выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \varepsilon\varepsilon_0 \operatorname{div}\left(\operatorname{grad}\Phi + \dfrac{1}{\tau}\partial_{0t}^{\alpha}\boldsymbol{A}\right) + \\ \qquad + \varepsilon_0\left(\operatorname{grad}\varepsilon, \operatorname{grad}\Phi + \dfrac{1}{\tau}\partial_{0t}^{\alpha}\boldsymbol{A}\right) = -\rho, \\ \dfrac{1}{\mu\mu_0}\left(\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{A} - \left[\dfrac{\operatorname{grad}\mu}{\mu}, \operatorname{rot}\boldsymbol{A}\right]\right) = \\ \qquad = \boldsymbol{j} - \dfrac{\varepsilon_0}{\tau}\partial_{0t}^{\alpha}\left(\dfrac{\varepsilon}{\tau}\partial_{0t}^{\alpha}\boldsymbol{A} + \varepsilon\operatorname{grad}\Phi\right). \end{cases} \tag{17}$$

В работе [8] относительные электрическая и магнитная проницаемости предполагались независимыми от координат и времени. Тогда с использованием калибровки $\operatorname{div}\boldsymbol{A} + \frac{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}{\tau}\partial_{0t}^{\alpha}\Phi = 0$ система уравнений (17) для векторного и скалярного потенциала преобразуется к следующему виду:

$$\begin{cases} \triangle\boldsymbol{A} - \dfrac{\varepsilon\mu}{(c\tau)^2}\partial_{0t}^{2\alpha}\boldsymbol{A} = -\mu\mu_0\boldsymbol{j}, \\ \triangle\Phi - \dfrac{\varepsilon\mu}{(c\tau)^2}\partial_{0t}^{2\alpha}\Phi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}, \end{cases} \tag{18}$$

где $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ — скорость света в вакууме.

Для одномерного случая распространения поля в свободном пространстве уравнение (18) имеет аналитическое решение вида

$$u(x,t) = u_0 e^{ikx} E_{2\alpha}(-\omega^2 t^{2\alpha}), \tag{19}$$

где $\omega = \frac{ck\tau}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$, k — компонента волнового вектора в направлении x, а $E_{2\alpha}(-\omega^2 t^{2\alpha})$ — функция Миттаг–Леффлера, заданная формулой

$$E_{\beta}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(n\beta+1)}. \tag{20}$$

В общем случае система уравнений (17) аналитически неразрешима и требует применения численных методов.

4. Численное решение диффузионно-волнового уравнения дробного порядка для сред с памятью

В настоящей работе численное решение системы (17) ведется с помощью метода конечных разностей. Пространственные производные первого и второго порядков заменены центральными конечными разностями. Дробные производные Капуто при помощи соотношения (3) выражены через дробные производные Римана–Лиувилля, приближенные конечным степенным рядом соотношениями (4)–(5).

Поиск решения ведется в прямоугольной области. Заданы значения скалярного и векторного потенциалов на границе и в начальный момент времени. Также задан вектор плотности тока в произвольной точке. Из уравнения (14) и известной начальной плотности заряда можно получить значение плотности заряда в любой точке пространства в любой момент времени.

5. Полученные решения для диффузионно-волнового уравнения дробного порядка

Программа, написанная для решения системы уравнений (17), была протестирована на задаче расчета электромагнитных полей в одномерном свободном пространстве при отсутствии зарядов и токов, с постоянными значениями диэлектрической и магнитной проницаемостей $\varepsilon(\boldsymbol{r},t) = \varepsilon$ и $\mu(\boldsymbol{r},t) = \mu$. Эта задача имеет аналитическое решение (19), в соответствии с ним был задан массив начальных и граничных значений для численного алгоритма. В качестве критерия правильной работы программы рассматривалось отклонение численного решения, полученного на основе этого массива начальных данных, от аналитического решения (19). Результаты моделирования зависимости скалярного потенциала Φ от координаты x и времени t были получены при различных значениях параметра α.

Как и аналитическое, численное решение зависит от координаты x по синусоидальному закону. Характер временной зависимости, описывающейся функцией Миттаг–Леффлера (20), существенно зависит от значения параметра α (рис. 1).

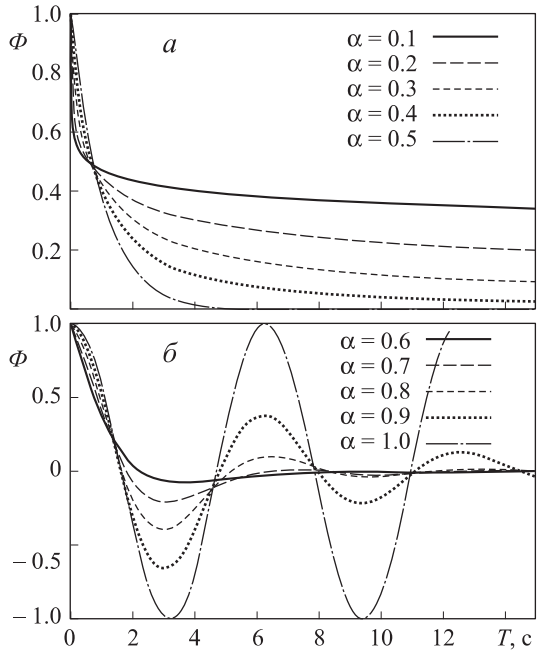

Рис. 1. Срез решения по времени при различных α

При $\alpha \leqslant 1/2$ функция Миттаг–Леффлера является функцией параболического типа (рис. 2). Она моно-

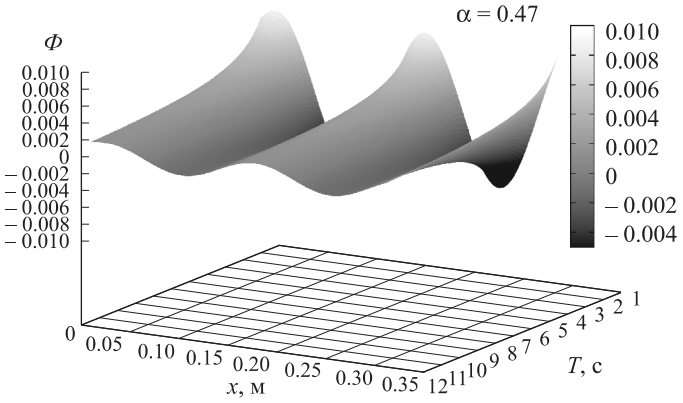

Рис. 2. Вид скалярного потенциала в свободном пространстве при $\alpha = 0.47$; ε и μ постоянны

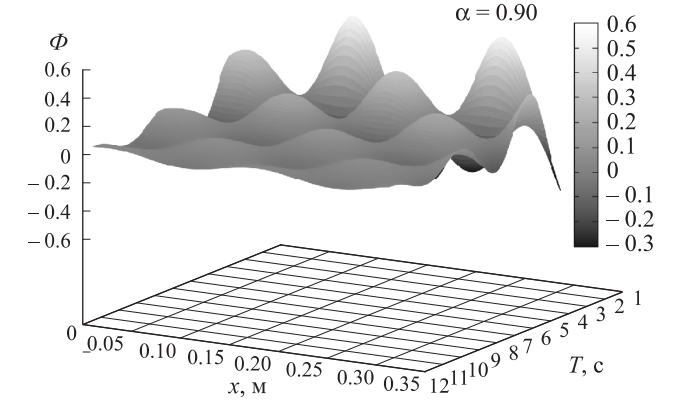

Рис. 3. Вид скалярного потенциала в свободном пространстве при $\alpha = 0.9$; ε и μ постоянны

тонно убывает при увеличении аргумента. Аналогичное поведение демонстрирует и зависимость численного решения системы (17) от времени. Видно, что при $\alpha \leqslant 1/2$ полученное решение — параболического типа. Скорость убывания величины $\Phi(x,t)$ в произвольной точке x из области определения зависит от параметра α. Чем меньше значение α, тем медленнее Φ убывает со временем. В вырожденном случае $\alpha = 0$ значение функции $\Phi(x,t)$ не зависит от времени. С увеличением α временная зависимость становится все сильнее. При значении $\alpha = 1/2$ временная зависимость — экспоненциальная.

Значение $\alpha = 1/2$ является переходным между параболическим и гиперболическим типом функции. При $\alpha > 1/2$ и функция Миттаг–Леффлера, и численное решение принадлежат гиперболическому типу (рис. 3). В случае $\alpha = 1$ функция Миттаг–Леффлера становится функцией $\cos(x)$, значение $\Phi(x,t)$ в точках максимума не уменьшается с течением времени. При $\alpha < 1$ значение $\Phi(x,t)$ в точках максимума со временем уменьшается, причем тем сильнее, чем меньше значение α.

Заключение

В настоящей работе получены уравнения для векторного и скалярного потенциалов в среде с памятью для диэлектрической и магнитной проницаемостей, являющихся функциями координат и времени, а также их численное решение для различных случаев.

Показана связь параметра функции памяти и значения фрактальной размерности среды, которая описывается данной функцией.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 12-01-004790).

Список литературы

1. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их применения. Минск, 1987.
2. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М., 2003.
3. *Федер Е.* Фракталы. М., 1991.
4. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., 1972.
5. *Кравченко В.Ф., Рвачев В.Л.* Алгебра логики, атомарные функции и вейвлеты в физических приложениях. М., 2006.
6. *Бондаренко А.Н., Иващенко Д.С.* // Сибир. электронные матем. известия. 2008. № 5. С. 581.
7. *Потапов А.А.* Фракталы в радиофизике и радиолокации: топология выборки. М., 2005.
8. *Боголюбов А.Н., Потапов А.А., Рехвиашвили С.Ш.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2009. № 4. С. 9.
9. *Mandelbrot B.B.* The Fractal Geometry of Nature. N. Y., 1982.

Diffusion-wave equation with fractional order for media with time dispersion

A. N. Bogolubov, A. A. Koblikov, D. D. Smirnova[a], N. E. Shapkina[b]

Department of Mathematics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.
E-mail: [a] d_d_smirnova@mail.ru, [b] neshapkina@mail.ru.

Electromagnetic fields in time-dispersed media with power dependence are analysed. It is shown that these media are fractal, their fractal dimension is determined. The equations for scalar and vector potentials are found using Maxwell's equations analogues presented with the help of Caputo differintagral. Electromagnetic fields are numerically calculated in bounded domain for arbitrary functions of charge and current.

Keywords: fractal electromagnetism, fractional calculus, media with memory, time dispersion.
PACS: 02.60.Nm, 41.20.Jb.
Received 4 May 2012.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 5(2012).

Сведения об авторах

1. Боголюбов Александр Николаевич — докт. физ.-мат. наук, профессор, профессор; тел.: (495) 939-13-51, e-mail: bogan7@yandex.ru.
2. Кобликов Артем Александрович —аспирант; тел.: (495) 939-13-51, e-mail: koblikovaa@gmail.com.
3. Смирнова Дарья Дмитриевна — студентка; тел.: (495) 939-13-51, e-mail: d_d_smirnova@mail.ru.
4. Шапкина Наталья Евгеньевна — канд. физ.-мат. наук, доцент; тел.: (495) 939-13-51, e-mail: neshapkina.mail.ru.