КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Моделирование волновода со вставкой, обладающей квадратичной нелинейностью

А. Н. Боголюбов, М. Д. Малых, А. А. Белов[a]

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
E-mail: [a] belov_25.04.1991@mail.ru

Статья поступила 22.04.2012, подписана в печать 11.05.2012.

Скалярная задача о рассеянии волны на нелинейной вставке, помещенной внутрь волновода, неполным методом Галеркина сведена к краевой задаче для гамильтоновой системы, указаны случаи, при которых эта задача допускает решение в конечном виде, и на конкретных примерах отмечены явления, обусловленные нелинейностью задачи.

Ключевые слова: плоский волновод, нелинейная вставка, квадратичная нелинейность, парциальные условия излучения, метод Галеркина, существование решения, нелинейные эффекты.

УДК: 519.634. PACS: 42.65.Wi.

В настоящее время все более широкое применение находят волноводные системы со сложным, в том числе киральным, биизотропным или фрактальным заполнением [1, 2]. Все чаще при описании свойств заполнения употребляют ε и μ, зависящие от электромагнитного поля тем или иным образом. Вносимая таким образом в уравнения Максвелла нелинейность приводит к весьма интересным новым нелинейным задачам математической физики. К их числу можно отнести задачу о нелинейном слое, расположенном между двумя линейными полубесконечными средами [3]. Обращаясь к задачам дифракции на нелинейной вставке, следует вспомнить, что начально-краевая задача для нелинейного уравнения колебаний

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \Delta v - |v|^\rho v$$

с условиями Дирихле на границе области хорошо изучена [4], поэтому основную трудность представляет не столько сама нелинейность заполнения, сколько учет парциальных условий излучения, употребление которых сильно затруднено невозможностью применения принципа суперпозиции.

Рассмотрим плоский металлический волновод с нелинейной вставкой, расположенной на отрезке $[0, 1]$ оси x. Поле u в волноводе описывается следующей задачей для уравнения Гельмгольца [5]:

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda q u = 0, \\ \displaystyle\int_0^\pi \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma_n^{(1)} u \Big|_{x=1} \psi_n(y)dy = \widetilde{A}_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \\ \displaystyle\int_0^\pi \frac{\partial u}{\partial x} - \gamma_n^{(2)} u \Big|_{x=0} \psi_n(y)dy = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \\ u(x, 0) = u(x, \pi) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $\psi_n(y)$ — функции сечения, γ — постоянная распространения. В качестве дополнительных условий здесь использованы парциальные условия излучения. В линейных задачах математической теории волноводов заполнение q предполагается зависящим от координат x, y, но не от поля u, мы же обратимся к случаю, когда заполнение во вставке зависит от поля:

$$q = q_0 + q_1 u + q_2 u^2.$$

Для того чтобы увидеть специфические эффекты, вызванные нелинейностью, вполне достаточно решить эту задачу неполным методом Галеркина, ограничившись двумя модами. Итак, пусть приближенно

$$u = u_1(x) \sin y + u_2(x) \sin 2y$$

и

$$q_i = q_i^{(1)} \sin y + q_i^{(2)} \sin 2y,$$

где $q_i^{(1)}$ и $q_i^{(2)}$ — некоторые числа.

Умножив уравнение задачи (1) на $\sin py$ $(p = 1, 2)$ и проинтегрировав по y от 0 до π, получим систему из двух обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка вида

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 u_1}{dx^2} = -\dfrac{\partial V}{\partial u_1}, \\ \dfrac{d^2 u_2}{dx^2} = -\dfrac{\partial V}{\partial u_2}, \end{cases} \tag{2}$$

где функция V, аналогичная потенциалу в механике, содержит степени не выше четвертой по искомым функциям u_1 и u_2 и линейна по параметру λ:

$$V = V_2(u_1, u_2) + \lambda \left(\overline{V}_2(u_1, u_2) + V_3(u_1, u_2) + V_4(u_1, u_2) \right).$$

Тем самым задача о распространении волны в волноводе (скалярная) сведена к механической задаче об интегрировании системы двух тел с гамильтонианом $H(u_1, u_1', u_2, u_2') = (u_1')^2 + (u_2')^2 + V(u_1, u_2)$. К сожалению, выписать в конечном виде общее решение для такой системы удается лишь для небольшого класса систем

с двумя и большим числом степеней свободы, что обусловлено наличием у системы той или иной симметрии (см. [6]).

Проще всего выделить те случаи, когда линейная замена переменных позволяет разделить переменные в гамильтониане. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Линейной заменой*

$$\begin{cases} u_1 = aP + bQ, \\ u_2 = cP + dQ, \end{cases}$$

гамильтониан H системы (2) *можно привести к виду*

$$H = H_1(P', P) + H_2(Q', Q)$$

тогда, когда $q_1^{(1)} = q_1^{(2)} = 0$, а константы $q_0^{(1)}$, $q_0^{(2)}$, $q_2^{(1)}$ и $q_2^{(2)}$ удовлетворяют двум алгебраическим уравнениям. При этом само линейное преобразование обязательно имеет вид

$$\begin{cases} u_1 = mP + kQ \quad (km = -1), \\ u_2 = P + Q, \end{cases}$$

а гамильтониан приводится к виду

$$H = \frac{1}{2}T(m)P'^2 + F_4(m)P^4 + F_2(m)P^2 + \\ + \frac{1}{2}T(k)Q'^2 + F_4(k)Q^4 + F_2(k)Q^2.$$

Замечание. Алгебраические уравнения, которым должны быть подчинены константы $q_0^{(1)}$, $q_0^{(2)}$, $q_2^{(1)}$ и $q_2^{(2)}$, ввиду их сложности здесь не приводятся. Для дальнейшего существенно лишь то, что из этих четырех констант две можно брать совершенно произвольными, а две другие тогда можно найти, решив систему из двух алгебраических уравнений.

В новых переменных общее решение рассматриваемой системы можно выразить в квадратурах. Для P имеем

$$\int \frac{dP}{\sqrt{2\Big/T(m)\left[E_P - F_4(m)P^4 - F_2(m)P^2\right]}} = x + x_0^P,$$

где E_P и x_P — постоянные интегрирования. Поскольку под корнем стоит полином 4-й степени, P можно выразить через x при помощи эллиптических функций Якоби:

$$P = A_P \operatorname{sn}\left(\omega_P\left(x + x_0^P\right), \varkappa_P\right).$$

Здесь за произвольные константы можно принять x_0^P и $\varkappa_P$, и тогда A_P, ω_P выражаются алгебраически через $\varkappa_P$. Аналогично

$$Q = A_Q \operatorname{sn}\left(\omega_Q\left(x + x_0^Q\right), \varkappa_Q\right).$$

Для отыскания четырех констант x_0^P, x_0^Q, $\varkappa_P$ и $\varkappa_Q$ имеется четыре уравнения, выражающие условия излучения (см. (1)):

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \gamma_1^{(1)} u_1 \bigg|_{x=1} = \widetilde{A}_1, \qquad \frac{\partial u_1}{\partial x} - \gamma_1^{(2)} u_1 \bigg|_{x=0} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \gamma_2^{(1)} u_2 \bigg|_{x=1} = \widetilde{A}_2, \qquad \frac{\partial u_2}{\partial x} - \gamma_2^{(2)} u_2 \bigg|_{x=0} = 0. \tag{4}$$

Положим для простоты, что $\gamma_1^{(1)} = \gamma_1^{(2)} = \gamma_1$ и $\gamma_2^{(1)} = \gamma_2^{(2)} = \gamma_2$. Вместо $u_{1,2}$ подставим их выражения через P и Q. Условия излучения при $x = 0$ можно переписать в виде

$$P' - \gamma_P P - C_Q Q\big|_{x=0} = 0, \quad Q' - \gamma_Q Q - C_P P\big|_{x=0} = 0, \tag{5}$$

где C_P, C_Q, γ_P и γ_Q — постоянные.

Подберем $\varkappa_P$ и $\varkappa_Q$ так, чтобы были выполнены соотношения (5). Для этого выразим производную P' из дифференциального уравнения для функции sn и приравняем ее производной, выраженной из (5) (аналогично для Q'). Тогда $\varkappa_P$ и $\varkappa_Q$ должны удовлетворять соотношениям

$$\begin{aligned} \theta_P\left(1 + \varkappa_P^2\right)^2 + \left(1 + \varkappa_P^2\right) - 1 = 0, \\ \theta_Q\left(1 + \varkappa_Q^2\right)^2 + \left(1 + \varkappa_Q^2\right) - 1 = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь θ_P и θ_Q алгебраически выражаются через $P_0 \overset{\text{def}}{=} P(0)$, $Q_0 \overset{\text{def}}{=} Q(0)$. Применим к функции sn алгебраическую теорему сложения

$$P(x) = A_P \operatorname{sn}\left(\omega_P\left(x + x_0^P\right), \varkappa_P\right) = \\ = A_P \frac{\operatorname{sn}\omega_P x \operatorname{sn}'\omega_P x_0^P + \operatorname{sn}'\omega_P x \operatorname{sn}\omega_P x_0^P}{1 - \varkappa_P^2 \operatorname{sn}^2\omega_P x_0^P \operatorname{sn}^2\omega_P x}$$

и учтем первое из соотношений (6):

$$P(x) = \frac{1}{\omega_P} \frac{(\gamma_P P_0 + C_Q Q_0)\operatorname{sn}\omega_P x + P_0 \operatorname{sn}'\omega_P x}{1 - \varkappa_P^2 (P_0/A_P)^2 \operatorname{sn}^2\omega_P x}.$$

Простой подстановкой можно убедиться, что условие излучения для функции P при $x = 0$ (как и аналогичное условие для функции Q) выполнено тождественно.

Полагая $P(x = 1)$ и $Q(x = 1)$ функциями P_0 и Q_0, запишем условия излучения при $x = 1$ для P и Q в виде

$$m\left(P' + \gamma_1 P\right) + k\left(Q' + \gamma_1 Q\right)\big|_{x=1} = A_1, \tag{7}$$

$$P' + \gamma_2 P + Q' + \gamma_2 Q\big|_{x=1} = A_2. \tag{8}$$

Из этих уравнений мы можем найти P_0 и Q_0 при заданных A_1 и A_2. Очевидно, эти уравнения являются трансцендентными.

Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 2 (существования). *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда задача* (1) *имеет решение, если разрешима система* (7), (8).

Основной результат этой теоремы состоит в том, что задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $P(x)$ и $Q(x)$ с краевыми условиями (3), (4) сведена к начальной задаче с условиями $P(0) = P_0$, $Q(0) = Q_0$.

Рассмотрим теперь некоторые примеры. Зададим $\lambda = 10$, $q_2^{(2)} = 3i$ и $q_0^{(1)} = 3.1$. В соответствии с теоремой 1 найдем $q_0^{(2)} = 0.1721 + 0.8996i$, $q_2^{(1)} = 2.1135 - 3.9574i$. Для наглядности приведем графики $q_0(y) = q_0^{(1)} \sin y + q_0^{(2)} \sin 2y$ и $q_2(y) = q_2^{(1)} \sin y + q_2^{(2)} \sin 2y$ (рис. 1). Далее вычислим $k = -0.7262 - 0.4928i$, $m = -1/k = 0.9429 - 0.6399i$.

Для нормальных мод постоянные распространения имеют вид $\gamma_p = i\sqrt{\lambda - \lambda_p}$. Поэтому в данном примере следует взять $\gamma_1 = 3i$, $\gamma_2 = i\sqrt{6}$.

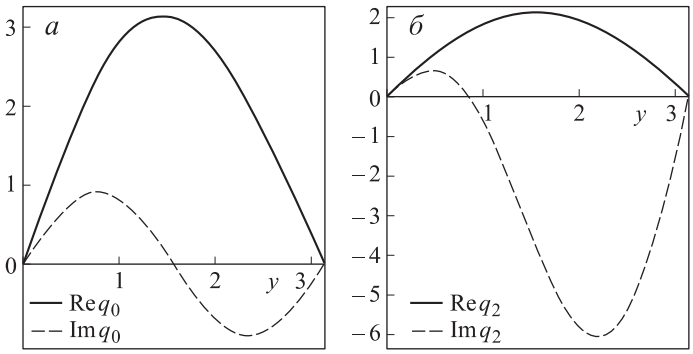

Рис. 1. Коэффициент при линейной части заполнения ($q_0(y)$, $y \in [0, \pi]$) (*а*) и коэффициент квадратичной части заполнения ($q_2(y)$, $y \in [0, \pi]$) (*б*)

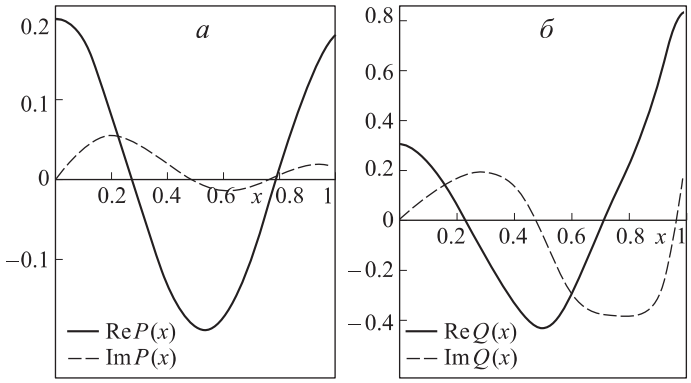

Рис. 2. Графики решения для первой моды $P(x)$, $x \in [0, 1]$ (*а*), для второй моды $Q(x)$, $x \in [0, 1]$ (*б*) при заданных значениях постоянных интегрирования $P_0 = 0.2$, $Q_0 = 0.3$

Предположим, что нам даны P_0 и Q_0, построим по ним решения и вычислим значения A_1 и A_2. Пусть $P_0 = 0.2$, $Q_0 = 0.3$. Тогда $A_1 = 6.7040 - 6.7788i$, $A_2 = -0.9789 + 10.4511i$. Построим графики $P(x)$ и $Q(x)$ при этих значениях P_0 и Q_0 (рис. 2).

Возьмем некоторое Q_0, например равное 0.1, и построим график реальной части $A_1(P_0, Q_0)$ при данном Q_0 в различных диапазонах P_0 (рис. 3).

Основываясь на полученных численных результатах, можно сделать следующие выводы.

1. По графикам $P(x)$ и $Q(x)$ (рис. 2) мы видим, что

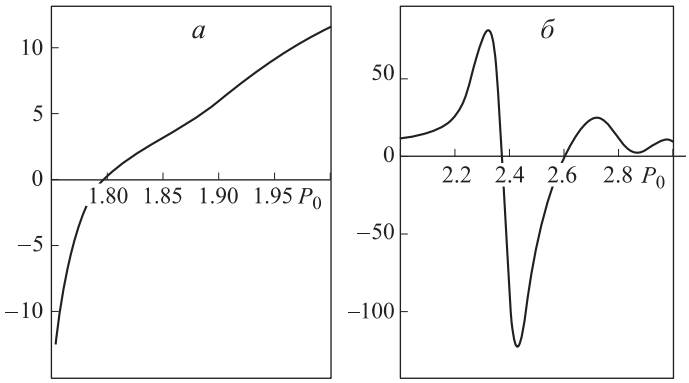

Рис. 3. Первый вспомогательный график $\mathrm{Re}\, A_1(P_0, 0.1)$, $P_0 \in [1.75, 2]$ (*а*) и второй вспомогательный график $\mathrm{Re}\, A_1(P_0, 0.1)$, $P_0 \in [2, 3]$ (*б*)

задача имеет ограниченные непрерывные гладкие решения.

2. Решение задачи может быть не единственным. Как следует из рис. 3, *б*, уравнение $\mathrm{Re}\, A_1(P_0, Q_0) = A_1^0$ при данном Q_0 при некоторых A_1^0 имеет несколько решений. Следовательно, одному и тому же A_1^0 могут соответствовать различные решения исходной задачи.

3. Кроме того, из рис. 3 видно, что решение уравнения $\mathrm{Re}\, A_1(P_0, Q_0) = A_1^0$ существует в том числе и при нулевых A_1^0. Это означает, что задача (1) имеет решение при нулевых граничных условиях, полностью локализованное внутри нелинейной среды.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 12-01-00479а).

Список литературы

1. *Боголюбов А.Н., Буткарев И.А., Дементьева Ю.С.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2010. № 6. С. 3.
2. *Боголюбов А.Н., Мухартова Ю.В., Гао Цзесин.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2010. № 5. С. 32.
3. *Валовик Д.В.* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. **48**, № 12. С. 2186.
4. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., 2002.
5. *Свешников А.Г., Могилевский И.Е.* Математические задачи теории дифракции. М., 2010.
6. *Переломов А.М.* // Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. Ижевск, 2002.

Modeling of waveguide with nonlinear insert characterized by square nonlinearity

A. N. Bogolyubov, M. D. Malykh, A. A. Belov[a]

Department of Mathematics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia. E-mail: [a] belov_25.04.1991@mail.ru.

Scalar problem of disturbance spreading was considered. Solution satisfying partial radiation conditions was built and existence theorem was proved. Some properties of acquired solution were shown basing on several examples.

Keywords: plane waveguide, nonlinear insert, square nonlinearity, partial radiation conditions, Galerkin method, solution existence, nonlinear effects.

PACS: 42.65.Wi.

Received 22 April 2012.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 5(2012).

Сведения об авторах

1. Боголюбов Александр Николаевич — докт. физ.-мат. наук, профессор, профессор; тел.: (495)939-10-33, e-mail: bogan7@yandex.ru.
2. Малых Михаил Дмитриевич — канд. физ.-мат. наук, науч. сотрудник, ассистент; тел.: (495)939-10-33.
3. Белов Александр Александрович — студент; тел.: (495)939-10-33, e-mail: belov_25.04.1991@mail.ru.