

## АСТРОНОМИЯ, АСТРОФИЗИКА И КОСМОЛОГИЯ

## Численный анализ физических характеристик компактной звезды с не слишком высокой концентрацией вещества

А. С. Рохманенков

*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра квантовой теории и физики высоких энергий. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.**E-mail: rohmanenkov@gmail.com*

Статья поступила 01.02.2012, подписана в печать 14.05.2012.

Найдены численные решения системы гравитационных уравнений (предложенных Ю. М. Лоскутовым, после модификации уравнений Гильберта–Эйнштейна) для внутренних и внешних физических характеристик компактных звезд с не слишком высокой концентрацией вещества, когда их гравитационные поля не являются слишком сильными. Промоделирована эволюция решений с увеличением массы объекта. Построены соответствующие графики.

**Ключевые слова:** гравитационное поле, гравитационные уравнения, компьютерное моделирование.

УДК: 524.3-17. PACS: 04.70.-s, 95.30.Sf.

## Введение

В работах [1–4] была доказана необходимость учета в уравнениях гравитации фактора материальности гравитационного поля. О такой необходимости говорил еще А. Эйнштейн: «Эти уравнения удовлетворяют требованию, по нашему мнению, обязательному для релятивистской теории гравитации; именно, они показывают, что тензор гравитационного поля  $\vartheta_{\mu\nu}$  является источником поля наравне с тензором материальных систем  $\Theta_{\mu\nu}$ . Исключительное положение энергии гравитационного поля по сравнению со всеми другими видами энергии привело бы к недопустимым последствиям» [5]. Аналогичные мысли высказывались и С. Вейнбергом: «Я считаю, что геометрический подход искусственно расчленяет общую теорию относительности и теорию элементарных частиц. До тех пор пока у нас, как и у А. Эйнштейна, оставалась надежда на то, что при известных обстоятельствах материю можно понять в геометрической интерпретации, имело смысл придавать геометрии Римана при описании теории гравитации главенствующую роль. Но время склоняет нас к неверию в то, будто сильные, слабые и электромагнитные взаимодействия можно понять с помощью геометрии, и приводит к мысли, что слишком большой упор на геометрию может затемнить глубокую связь, существующую между гравитацией и остальной физикой» [6].

Хорошо известно, что при выводе уравнений Гильберта–Эйнштейна вариационным методом принципиальное значение имеет то, что в подынтегральной лагранжевой плотности *всей* материи  $\tilde{\mathcal{L}}_m = -\rho\sqrt{-g}$  функция  $\rho$  является тензорным скаляром с размерностью эрг/см<sup>3</sup>. Как входят в  $\rho$  различные элементы материи (в том числе и материи гравитационного поля) при выводе уравнений роли не играет. Это значит, что в вытекающем из вариационного принципа уравнении

$$R^{\epsilon\lambda} - \frac{1}{2}g^{\epsilon\lambda}R = \frac{8\pi}{\sqrt{-g}}T^{\epsilon\lambda}, \quad (1)$$

$$T^{\epsilon\lambda} = -2\frac{\delta\tilde{\mathcal{L}}_m}{\delta g_{\epsilon\lambda}} = \sqrt{-g}\left[(\rho + p)u^\epsilon u^\lambda - pg^{\epsilon\lambda}\right], \quad (2)$$

скаляр  $\rho$ , определяемый вкладом *всей* материи, содержит вклад и от вещества (под веществом для удобства понимаются все виды материи, за исключением материи гравитационного поля) и от материи гравитационного поля (как и утверждал А. Эйнштейн). Таким образом, встает задача о выделении из  $\rho$  той ее части  $\rho_f$ , которая обязана полю. Эта задача была решена в [1–4].

Представив тождественно скаляр  $\rho$  в виде суммы  $\rho \equiv \rho_s + (\rho - \rho_s) \equiv \rho_s + \rho_f$ , в которой часть  $\rho_s$  обязана *только* веществу (без гравитационной шубы), скаляр  $\rho_f$  окажется связанным с материи гравитационного поля. Чтобы определить структуру  $\rho_f$ , уравнение (1) тождественными преобразованиями с учетом условия гармоничности (в галилеевых декартовых координатах)

$$\partial_\epsilon\tilde{g}^{\epsilon\lambda} = 0, \quad (3)$$

приводится в работах [1–4] к виду

$$g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta\tilde{g}^{\epsilon\lambda} = 16\pi\left(T^{\epsilon\lambda} + \tau^{\epsilon\lambda}\right). \quad (4)$$

Структура  $\tau^{\epsilon\lambda}$ , обретающая смысл плотности тензора энергии-импульса материи гравитационного поля, дается выражением

$$\begin{aligned} 16\pi\sqrt{-g}\tau^{\epsilon\lambda} &\equiv \\ &\equiv \frac{1}{2}\left(\tilde{g}^{\epsilon\alpha}\tilde{g}^{\lambda\beta} - \frac{1}{2}\tilde{g}^{\epsilon\lambda}\tilde{g}^{\alpha\beta}\right)\left(\tilde{g}_{\nu\sigma}\tilde{g}_{\tau\mu} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\tau\sigma}\tilde{g}_{\nu\mu}\right)\partial_\alpha\tilde{g}^{\tau\sigma}\partial_\beta\tilde{g}^{\nu\mu} + \\ &+ \tilde{g}^{\alpha\beta}\tilde{g}_{\tau\sigma}\partial_\alpha\tilde{g}^{\epsilon\tau}\partial_\beta\tilde{g}^{\lambda\sigma} - \tilde{g}^{\epsilon\beta}\tilde{g}_{\tau\sigma}\partial_\alpha\tilde{g}^{\lambda\sigma}\partial_\beta\tilde{g}^{\alpha\tau} - \\ &- \tilde{g}^{\lambda\alpha}\tilde{g}_{\tau\sigma}\partial_\alpha\tilde{g}^{\beta\sigma}\partial_\beta\tilde{g}^{\epsilon\tau} + \frac{1}{2}\tilde{g}^{\epsilon\lambda}\tilde{g}_{\tau\sigma}\partial_\alpha\tilde{g}^{\sigma\beta}\partial_\beta\tilde{g}^{\alpha\tau} + \partial_\alpha\tilde{g}^{\epsilon\beta}\partial_\beta\tilde{g}^{\lambda\alpha}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\tilde{g}_{\epsilon\lambda} = g_{\epsilon\lambda}/\sqrt{-g}$ .

Выдвигается и обосновывается гипотеза, что скаляр плотности  $\rho_f$  материи гравитационного поля, входящий в  $T^{\epsilon\lambda}$ , определяется связью

$$\tau \equiv \tilde{g}_{\epsilon\lambda}\tau^{\epsilon\lambda} = \rho_f - 3p_f, \quad \tilde{g}_{\epsilon\lambda} \equiv g_{\epsilon\lambda}/\sqrt{-g}, \quad (6)$$

где

$$16\pi\tau \equiv \frac{1}{2} \left( \tilde{g}_{\epsilon\sigma}\tilde{g}_{\lambda\tau} + \frac{1}{2}\tilde{g}_{\tau\sigma}\tilde{g}_{\epsilon\lambda} \right) g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\tilde{g}^{\tau\sigma}\partial_\beta\tilde{g}^{\epsilon\lambda} + \frac{1}{\sqrt{-g}}\tilde{g}_{\epsilon\lambda}\partial_\alpha\tilde{g}^{\epsilon\beta}\partial_\beta\tilde{g}^{\lambda\alpha}. \quad (7)$$

Справедливость (и необходимость) этой гипотезы доказана в [1–4] путем сопоставления вытекающих из нее результатов для энергий тел с хорошо известными их значениями в ньютоновской теории; без учета вклада в  $\rho$  из  $T^{\epsilon\lambda}$  материи гравитационного поля действительно наступают «недопустимые последствия» — энергия гравитационного взаимодействия вещества оказывается не отрицательной, а положительной (см. подробности, например, в [2, 4]).

В результате переопределения  $T^{\epsilon\lambda}$  с учетом гипотезы (6) исходные уравнения Гильберта–Эйнштейна изменятся и будут отличаться от стандартных уравнений ОТО. Это следует из того, что  $\tau^{\epsilon\lambda}$ , а следовательно, и его след отличны от нуля внутри и вне вещества (см. подробнее [1–4]). Работа посвящена численному анализу внутреннего и внешнего решений этих модифицированных гравитационных уравнений.

## 1. Основные уравнения

С учетом вскрытого вклада в  $T^{\epsilon\lambda}$  материи гравитационного поля в [1–4] была получена вытекающая из (1)–(3) модифицированная система гравитационных уравнений в случае статического центрально-симметричного тела:

$$AZ'^2 = 1 - 2y, \quad (8)$$

$$\frac{d}{dr} \ln B = 2 \frac{y + 4\pi p Z^2}{1 - 2y} \frac{Z'}{Z}, \quad (9)$$

$$\frac{dp}{dr} = -(\rho + p) \frac{y + 4\pi p Z^2}{1 - 2y} \frac{Z'}{Z}, \quad (10)$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2 A(1 + \Phi)} \left( -2y - \frac{2r\Phi'}{1 + \Phi} + 4\pi(p - \rho)r^2(1 + \Phi)^2 \right). \quad (11)$$

Здесь  $B(r)$ ,  $A(r)$  и  $Z(r)$  определяют риманову метрику в галилеевых координатах:

$$ds^2 = B dt^2 - A^{-1} dr^2 - Z^2 \left( d\theta^2 + (\sin\theta)^2 d\varphi^2 \right), \quad (12)$$

где  $r^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$ ,  $Z \equiv r(1 + \Phi)$ , а  $p$  и  $\rho$  — давление и скаляр плотности материи;  $\rho \equiv \rho_s + \rho_f$ ,  $\rho_s$  — скаляр плотности вещества (без гравитационной шубы),  $\rho_f$  — скаляр плотности материи гравитационного поля; аналогично  $p \equiv p_s + p_f$  (вне тела  $p \equiv p_f$  и  $\rho \equiv \rho_f$ ; уравнение (10) будет при этом уравнением равновесия материи внешнего гравитационного поля);  $y \equiv M(r)/Z$ , где  $M \equiv 4\pi \int_0^r \rho Z^2 Z' dr$  — гравитационная масса тела в объеме с радиусом  $r$ ; штрихи всюду означают производные по  $r$ .

Как видно, уравнения образуют весьма сложную систему нелинейных дифференциальных уравнений. Их аналитическое решение возможно лишь в случае слабого гравитационного поля ( $2y_0 \ll 1$ ,  $\Phi_0 \ll 1$ , нулевым индексом обозначены величины на границе тела), это решение было получено в работе [1].

В случае средних гравитационных полей ( $2y_0 \lesssim 1$ ,  $\Phi_0 \lesssim 1$ ) аналитическое решение получить не удается. Однако очень важно исследовать модификацию физических характеристик тела ( $y, \Phi, p, B$ ) при возрастании гравитационного поля (за счет увеличения вещества в нем). Особый интерес представляют сверх массивные тела (с  $M \gg M_\odot$ ). Пока же ограничимся анализом случая гравитационных полей средней силы; случай сверх массивных тел требует особого подхода и будет рассмотрен позднее.

## 2. Численное решение

Для численного решения системы уравнений (8)–(11) перейдем к безразмерным величинам:  $x \equiv r/r_0$ ,  $r_0$  — радиус поверхности тела;  $\tilde{p} \equiv 4\pi p Z_0^2 \equiv 4\pi p r_0^2(1 + \Phi_0)^2$ ;  $\tilde{\rho} \equiv 4\pi \rho r_0^2(1 + \Phi_0)^2$ . Тогда получим

$$\begin{cases} xy' = \left[ -y + (\tilde{\rho}_s + \tilde{\rho}_f) \frac{x^2(1 + \Phi)^2}{(1 + \Phi_0)^2} \right] \left( 1 + \frac{x\Phi'}{1 + \Phi} \right), \\ (1 - 2y)(2x\Phi' + x^2\Phi'') = (1 + \Phi) \left( 1 + \frac{x\Phi'}{1 + \Phi} \right)^2 \times \\ \quad \times \left[ -2y - 2 \frac{x\Phi'}{1 + \Phi} + (\tilde{p} - \tilde{\rho}_s - \tilde{\rho}_f) \frac{x^2(1 + \Phi)^2}{(1 + \Phi_0)^2} \right], \\ x\tilde{p}' = -\frac{(\tilde{p} + \tilde{\rho}_s + \tilde{\rho}_f)}{1 - 2y} \left( y + \tilde{p} \frac{x^2(1 + \Phi)^2}{(1 + \Phi_0)^2} \right) \left( 1 + \frac{x\Phi'}{1 + \Phi} \right), \end{cases} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{x^2(1 + \Phi)^2}{(1 + \Phi_0)^2} \tilde{\rho}_f' = & -\frac{1}{1 - 2y} \left[ 7 \left( 1 + \frac{x\Phi'}{1 + \Phi} \right)^2 - \right. \\ & - 6 \left( 1 + \frac{x\Phi'}{1 + \Phi} \right) \left\{ y + \tilde{p} \frac{x^2(1 + \Phi)^2}{(1 + \Phi_0)^2} \right\} + \\ & + 2 \left\{ y + \tilde{p} \frac{x^2(1 + \Phi)^2}{(1 + \Phi_0)^2} \right\}^2 \Big] + 10 \left( 1 + \frac{x\Phi'}{1 + \Phi} \right) - \\ & - 7(1 - 2y) + 4 + 4(1 - 2y) \frac{x\Phi'}{1 + \Phi} \left( 1 + \frac{x\Phi'}{1 + \Phi} \right)^{-2} - \\ & - 6 \left\{ y + \tilde{p} \frac{x^2(1 + \Phi)^2}{(1 + \Phi_0)^2} \right\} + 3\tilde{\rho}_f \frac{x^2(1 + \Phi)^2}{(1 + \Phi_0)^2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Для более компактной записи уравнений введем переменные  $s = \frac{x\Phi}{1 + \Phi}$ ,  $\lambda = \frac{x(1 + \Phi)}{1 + \Phi_0}$ ,  $b = \Phi'$ , а также  $a = y + \tilde{p}\lambda^2$ . Упрощенная система примет вид

$$\begin{cases} xy' = [-y + (\tilde{\rho}_s + \tilde{\rho}_f)\lambda^2](1 + s), \\ x(\tilde{\rho}_s' + \tilde{\rho}_f') = -(\tilde{p} + \tilde{\rho}_s + \tilde{\rho}_f)(1 + s) \frac{a}{1 - 2y}, \\ \Phi' = b, \\ x^2 b' = \frac{1 + \Phi}{1 - 2y}(1 + s)^2 \left( -2y - 2s + (\tilde{p} - \tilde{\rho}_s - \tilde{\rho}_f)\lambda^2 \right) - 2xb, \end{cases} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_f' = & \frac{1}{\lambda^2} \left\{ \frac{-1}{1 - 2y} \left[ 7(1 + s)^2 - 6a(1 + s) + 2a^2 \right] + 10(1 + s) - \right. \\ & \left. - 7(1 - 2y) + 4 + 4(1 - 2y) \frac{s}{(1 + s)^2} - 6a + 3\tilde{\rho}_f\lambda^2 \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Границными условиями для этой системы будут

$$\begin{aligned} y|_{x=\infty} &= 0, \quad \tilde{p}_s|_{x=1} = 0, \quad \tilde{p}_f|_{x=\infty} = 0, \\ \Phi|_{x=\infty} &= 0, \quad \Phi'|_{x=0} = b|_{x=0} = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Решение системы дифференциальных уравнений (15) с границными условиями (17) описывает внутренние и внешние физические характеристики статического незаряженного сферически-симметричного тела.

Принимая во внимание, что вне тела  $\tilde{p}_s \equiv 0$  и  $\tilde{p}_s \equiv 0$  (поскольку там вещества отсутствует), получаем систему из четырех дифференциальных уравнений с четырьмя неизвестными. Внутри тела ситуация другая, здесь  $\tilde{p}_s \neq 0$  и  $\tilde{p}_s \neq 0$ , следовательно, внутри тела мы имеем систему из четырех дифференциальных уравнений с пятью неизвестными. Для того чтобы система стала замкнутой, не хватает уравнения для  $\tilde{p}_f$  внутри тела. Получить его из общих соображений весьма проблематично. На него налагаются лишь определенные ограничения:

$$\tilde{p}_f|_{x=0} = 0, \quad \tilde{p}'_f|_{x=0} = 0, \quad \tilde{p}'_f|_{0 < x \leq 1} \leq 0 \quad (18)$$

и условие сшивания со значениями  $\tilde{p}_f$  вне тела.

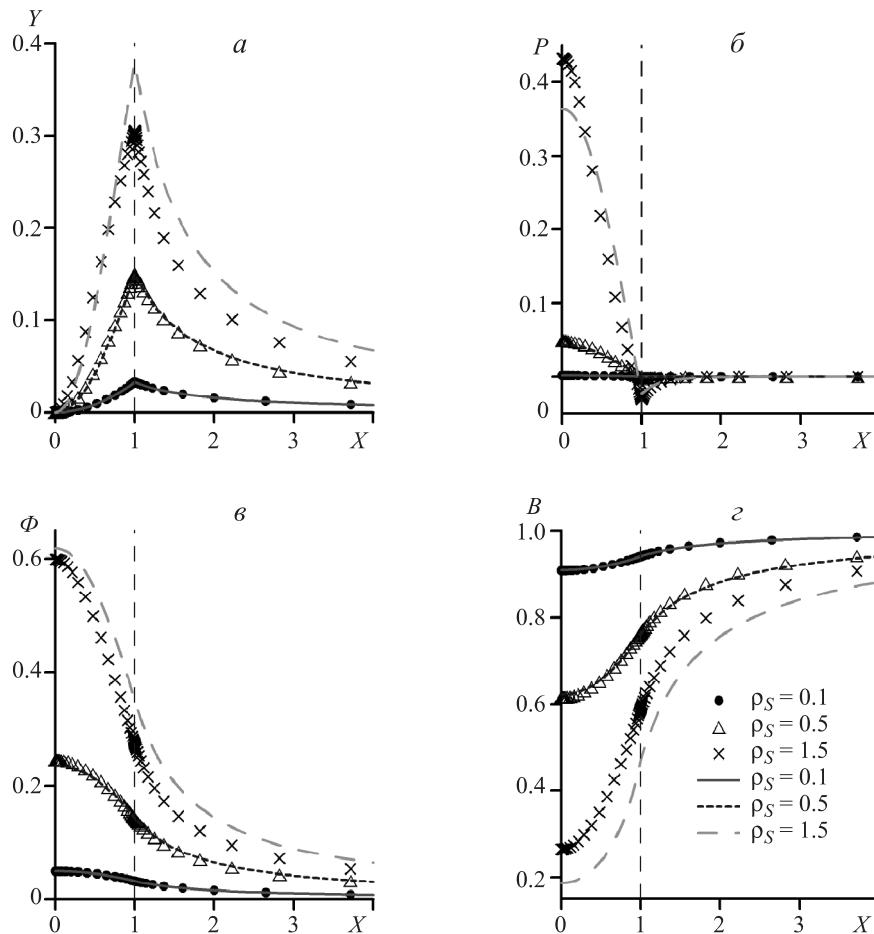
В случае слабых полей можно пренебречь величиной  $\tilde{p}_f$ , поскольку давления слабых гравитационных полей малы. В этом случае удается получить ана-

литическое решение (более подробно см. [1]). При возрастании массы тела пренебречь давлением гравитационного поля внутри тела нельзя. Это приведет к неверным результатам.

Для нахождения решений в случае средних гравитационных полей было использовано компьютерное моделирование. Решение дифференциальных уравнений было получено с помощью неявного интерполяционного метода Рунге–Кутта 2-го порядка. При этом в нуле и на бесконечности находились асимптотики, которые являлись начальными условиями для численного расчета. Расчет производился до тех пор, пока не сшивались решения на границе тела.

Расчеты велись в предположении  $\tilde{p}_s = \text{const}$ . Такое предположение оправдано тем, что оно не сильно искажает принципиальные результаты, как отмечает С. Вайнберг [6]. Для различных  $\tilde{p}_s = 4\pi\rho_s Z_0^2$  были получены графические изображения  $y$ ,  $\tilde{p}$ ,  $\Phi$  и  $B$  (рисунок) в зависимости от  $x$ . На графиках представлены расчетные данные (точки) и аналитические значения (сплошные кривые). Решения представлены для объектов с  $\tilde{p}_s = 0.1$  — маломассивное тело,  $\tilde{p}_s = 0.5$  — более массивный объект,  $\tilde{p}_s = 1.5$  — достаточно массивное тело.

Отметим, что кривые для различных значений  $\tilde{p}_s$  — гладкие и полностью сшиваются на границе тела. На бесконечности все функции  $y(x)$ ,  $\tilde{p}(x)$ ,  $\Phi(x)$ ,  $b(x)$  име-



Различные характеристики тела, расчетные (точки) и теоретические (сплошные линии), для объектов различных масс с  $\tilde{p}_s = 0.1$ , 0.5 и 1.5 (а — зависимость переменной  $y$  от  $x$ ; б — зависимость переменной  $\tilde{p}$  от  $x$ ; в — зависимость переменной  $\Phi$  от  $x$ ; г — зависимость переменной  $B$  от  $x$ )

**Значения переменных  $y$ ,  $\tilde{p}$ ,  $\Phi$ ,  $B$  на границе тела ( $x = 1$ ),  
полученные из расчетных данных (calc) и теоретических оценок (theor)  
в зависимости от  $\tilde{\rho}_s$**

$\tilde{\rho}_s$	$y_{\text{theor}}$	$y_{\text{calc}}$	$\tilde{p}_{\text{theor}}$	$\tilde{p}_{\text{calc}}$	$\Phi_{\text{theor}}$	$\Phi_{\text{calc}}$	$B_{\text{theor}}$	$B_{\text{calc}}$
0.1	0.03	0.03	$-2.0 \cdot 10^{-5}$	$-2.2 \cdot 10^{-5}$	0.03	0.03	0.94	0.94
0.5	0.15	0.15	$-1.6 \cdot 10^{-3}$	$-2.6 \cdot 10^{-3}$	0.14	0.14	0.76	0.76
1.5	0.38	0.31	-0.02	-0.03	0.35	0.27	0.47	0.59

ют асимптотическое стремление к нулю. На границе тела значения  $y$ ,  $|\tilde{p}|$  и  $\Phi$  с ростом массы объекта растут, а значение  $B$  падает. В случае малых  $\tilde{\rho}_s$  ( $\tilde{\rho}_s \leq 0.5$ ) расчетные значения практически совпадают с теоретическими. С увеличением  $\tilde{\rho}_s$  ( $\tilde{\rho}_s \sim 1.5$ ) наблюдается расхождение (таблица).

Полное давление на границе тела отрицательно, поскольку  $p_s|_{x=1} = 0$ , а вне тела ( $x > 1$ ) давление создается только гравитационным полем, которое отрицательно (это следует из асимптотик на бесконечности). Значит и в приповерхностной зоне давление также отрицательно. На графиках (рисунок, б) это хорошо видно.

Кроме того, при рассмотрении достаточно массивного объекта наблюдается изменение характера поведения переменной  $y$ . При значении  $\tilde{\rho}_s = 1.5$  происходит загиб функции  $y(x)$  на границе тела. Поскольку решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) не могут пересекать друг друга, то не без основания можно предположить, что с увеличением  $\tilde{\rho}_s$  функции продолжат видоизменяться в том же направлении. То есть значение  $y$  на границе тела будет расти, приближаясь снизу к значению 0.5. А самое главное — будет наблюдаться резкое возрастание значения  $y$  при удалении от центра тела, и очень медленный рост  $y$  в поверхностной зоне.

## Выводы

В настоящей работе была рассчитана система ОДУ для массивного сферически-симметричного тела, по-

лученная в работах [1–4] с применением полевого подхода в теории гравитации. Найдено решение системы ОДУ для не слишком массивных тел. Показана эволюция решения этой системы с увеличением массы объекта. При низких массах объекта наблюдается полное соответствие теоретических и расчетных данных. При возрастании массы тела видны расхождения.

Полное давление материи в приповерхностной области тела оказывается отрицательным. Функция  $M/Z \equiv y(r)$  с увеличением массы тела испытывает при приближении к поверхности загиб в сторону уменьшения своего роста. Поскольку решения ОДУ не могут пересекаться, следует ожидать, что при возрастании гравитационных полей, эти эффекты будут проявляться с большей силой.

Автор благодарен профессору Ю. М. Лоскутову за полезные консультации, а также рецензенту за замечания и советы.

## Список литературы

- Лоскутов Ю.М. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2001. № 4. С. 29.
- Лоскутов Ю.М. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2003. № 4. С. 19.
- Лоскутов Ю.М. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2006. № 3. С. 18.
- Лоскутов Ю.М. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2009. № 2. С. 3.
- Эйнштейн А. Собр. науч. трудов. Т. 1. М., 1965.
- Вайнберг С. Гравитация и космология. М., 1975.

## Numerical analysis of the physical characteristics of the compact star with temperate concentration of a substance

A. S. Rokhmanenkov

Department of Quantum Theory and High Energy Physics, Faculty of Physics,  
M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.  
E-mail: rohmanenkov@gmail.com.

We find numerical solutions of the gravitational equations (this equations suggested by Yu. M. Loskutov after modification Gilbert-Einstein equations) for internal and external physical characteristics of compact stars with temperate concentration of a substance when their gravitational fields are not too strong. Simulated the evolution of solutions when mass of the object is increase. We construct the corresponding graphs.

*Keywords:* gravitational field, gravitational equations, computer simulation.

PACS: 04.70.-s, 95.30.Sf.

Received 1 February 2012.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 5(2012).

## Сведения об авторе

Рохманенков Александр Сергеевич — аспирант; тел.: (495) 939-16-47, e-mail: rohmanenkov@gmail.com.