

# Теоретико-возможностная модель в задачах морфологического анализа изображений

А. В. Зубюк

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра компьютерных методов физики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.  
E-mail: zubjuk@physics.msu.ru

Статья поступила 27.06.2012, подписана в печать 31.07.2012.

Рассмотрены теоретико-возможностные модели в математических методах морфологического анализа изображений, в частности, получено решение задачи классификации изображений сцен в теоретико-возможностной постановке, которое может быть использовано для анализа формы акустических сигналов в геофизике [1], для решения задач интерпретации спутниковых изображений [2] и др. Разработаны методы эмпирического построения нечеткой формы.

*Ключевые слова:* морфологический анализ изображений, нечеткая морфология, теория возможностей, численные алгоритмы.

УДК: 519.226. PACS: 02.50.Le, 02.50.Tt.

## Введение

В настоящей работе рассмотрены математические методы и алгоритм классификации изображений сцен, основанные на математических методах морфологического анализа изображений [3] и методах нечеткой морфологии [4]. Кроме того, разработаны алгоритмы эмпирического восстановления такой нечеткой модели, использование которой позволяет наилучшим образом классифицировать изображения сцен, в отличие от алгоритмов, представленных в [6], позволяющих наиболее точно восстанавливать саму нечеткую модель.

Методы морфологического анализа изображений разработаны для решения таких задач, как поиск известного объекта на неизвестном фоне, выделение неизвестного объекта на известном фоне, классификация изображений сцен и т. п. Трудности при решении подобных задач связаны с тем, что всякое изображение сцены содержит информацию не только о регистрируемой сцене, но также и об условиях регистрации, при которых оно получено, которые, как правило, неизвестны. Такими условиями являются, например, характер освещения объектов сцены, их оптические свойства и т. п. В основе математических методов морфологического анализа изображений лежит понятие *формы изображения* (см. п. 2 настоящей статьи) как максимального инварианта относительно изменения условий регистрации. Форма изображения сцены несет наиболее полную информацию о форме сцены, доступную по ее изображению.

Однако методы морфологического анализа изображений непригодны для решения задач анализа сцен, состоящих из объектов, форма изображения которых не может быть четко определена в силу того, что сами эти объекты не имеют определенной геометрической формы [5]. Примерами таких объектов могут служить рукописная цифра, так как при ее написании происходят случайные искажения пропорций ее элементов, человек (вообще, а не какой-либо конкретный), так как геометрические формы разных людей различны, и др. Одновременно с этим всякое изображение сцены,

на которой представлены такие объекты, содержит информацию об условиях регистрации, при которых оно получено.

Математические методы нечеткой морфологии, о которых пойдет речь в настоящей работе, ориентированы на решение задач анализа сцен по их изображениям в ситуациях, когда форма изображения представленных на сцене объектов не может быть четко определена. При этом предполагается, что условия регистрации, при которых получено изображение сцены, неизвестны.

## 1. Возможность как мера относительной предопределенности исходов стохастического эксперимента

В работе [6] теория возможностей и мера возможности рассмотрены как альтернатива теории вероятностей и вероятности при моделировании неясности и неопределенности, отражающих неполноту знаний исследователя об объекте исследования. В частности, теория возможностей может быть применена для моделирования стохастического объекта, т. е. такого объекта, моделью которого в каждом испытании является некоторое вероятностное пространство.

Пусть  $\mathcal{Y}$  — множество элементарных событий и  $\mathcal{P}(\mathcal{Y})$  —  $\sigma$ -алгебра всех подмножеств множества  $\mathcal{Y}$ .

**Определение 1** (см. [6]). *Возможностью*, определенной на измеримом пространстве  $(\mathcal{Y}, \mathcal{P}(\mathcal{Y}))$ , будем называть всякую функцию  $P(\cdot): \mathcal{P}(\mathcal{Y}) \rightarrow [0, 1]$ , обладающую свойствами счетной аддитивности:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sup_{i=1,2,\dots} P(A_i),$$

$$\text{сти снизу: } P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i \geq n} A_i\right) \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} P(A_i), \quad A_i \in \mathcal{P}(\mathcal{Y}),$$

$i = 1, 2, \dots$ , и нормированную на 1:  $P(\mathcal{Y}) = 1$ . Тройку  $(\mathcal{Y}, \mathcal{P}(\mathcal{Y}), P)$  будем называть *пространством с возможностью*. Эксперимент, моделью которого является пространство с возможностью, будем называть *нечетким*.

Заметим, что возможность, в отличие от вероятности, всегда может быть определена на  $\sigma$ -алгебре

всех подмножеств множества элементарных событий. Аддитивность в определении 1 понимается относительно операции сложения, определенной как «max» (или «sup» в случае бесконечного множества слагаемых).

Рассмотрим стохастический объект, моделью которого является вероятностное пространство  $(\mathcal{Y}, \mathfrak{A}, \text{Pr})$ , и определим его теоретико-возможностную модель. Считая, что возможность  $P(A)$  события  $A \in \mathcal{P}(\mathcal{Y})$  определяет относительные шансы события  $A$  в нечетком эксперименте, разумно задать возможностную модель  $(\mathcal{Y}, \mathcal{P}(\mathcal{Y}), P)$  рассматриваемого стохастического объекта так, чтобы из соотношения  $\text{Pr}(A_1) \leq \text{Pr}(A_2)$  следовало  $P(A_1) \leq P(A_2)$ ,  $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}$ . В связи с этим дадим следующие определения.

**Определение 2** (см. [6]). Будем говорить, что возможность  $P$  согласована с вероятностью  $\text{Pr}$  на  $\sigma$ -алгебре  $\tilde{\mathfrak{A}} \subset \mathfrak{A}$ , если существует такая функция  $\varphi(\cdot) \in \Phi$ , что  $P(A) = \varphi(\text{Pr}(A))$ ,  $A \in \tilde{\mathfrak{A}}$ . Здесь  $\Phi$  — класс всех монотонно неубывающих функций  $\varphi(\cdot): [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ . Возможность  $P$  в этом случае будем называть *стохастически измеримой*.

**Определение 3** (см. [6]). Будем говорить, что возможность  $P$  максимально согласована с вероятностью  $\text{Pr}$  на  $\sigma$ -алгебре  $\tilde{\mathfrak{A}} \subset \mathfrak{A}$ , если она согласована с  $\text{Pr}$  на  $\tilde{\mathfrak{A}}$  и для любой возможности  $P'$ , согласованной с  $\text{Pr}$  на  $\tilde{\mathfrak{A}}$ , найдется такая функция  $\varphi'(\cdot) \in \Phi$ , что  $P'(A) = \varphi'(P(A))$ ,  $A \in \tilde{\mathfrak{A}}$ .

Если  $\sigma$ -алгебра  $\tilde{\mathfrak{A}}$  в определении 2 (определении 3) совпадает с  $\mathfrak{A}$ , будем называть возможность  $P$  (максимально) согласованной с вероятностью  $\text{Pr}$ .

Итак, для стохастического объекта, моделью которого является вероятностное пространство  $(\mathcal{Y}, \mathfrak{A}, \text{Pr})$ , возможностную модель определим как пространство с возможностью  $(\mathcal{Y}, \mathcal{P}(\mathcal{Y}), P)$ , где  $P$  максимально согласована с  $\text{Pr}$  (вообще говоря, на некоторой  $\sigma$ -алгебре  $\tilde{\mathfrak{A}} \subset \mathfrak{A}$ ).

В работе [6] показано, что класс вероятностей  $\text{Pr}_{\tilde{\mathfrak{A}}}(\text{P})$ , с которыми максимально согласована возможность  $P$  на  $\sigma$ -алгебре  $\tilde{\mathfrak{A}}$ , вообще говоря, состоит не из единственной вероятности. Благодаря этому факту теоретико-возможностными методами может быть смоделирован ряд стохастических объектов, которые не могут быть смоделированы теоретико-вероятностными методами.

Действительно, вероятность  $\text{Pr}$  в модели  $(\mathcal{Y}, \mathfrak{A}, \text{Pr})$  зачастую неизвестна априори, в связи с чем для моделирования стохастического объекта теоретико-вероятностными методами необходимо прежде всего построить вероятность  $\text{Pr}$  эмпирически. Это можно сделать приближенно, опираясь на тот математический факт, что частота  $\nu^{(L)}(A)$  всякого события  $A \in \mathfrak{A}$  в серии из  $L$  независимых испытаний, моделью которой является вероятностное пространство  $(\mathcal{Y}, \mathfrak{A}, \text{Pr})^L$ , почти наверное сходится к вероятности  $\text{Pr}(A)$  при  $L \rightarrow \infty$ . Одновременно с этим, как показано в работе [6] и ниже в настоящей статье, при выполнении достаточно общих условий эмпирически может быть построена и возможность  $P$ , максимально согласованная с  $\text{Pr}$  на  $\tilde{\mathfrak{A}}$ , при-

чем точно на основе почти наверное конечного числа испытаний. При этом если  $P(A_1) > P(A_2)$ , то при достаточно большом  $L$  почти наверное  $\nu^{(L)}(A_1) > \nu^{(L)}(A_2)$  для любых  $A_1, A_2 \in \tilde{\mathfrak{A}}$ , что и определяет эмпирическое истолкование возможности как меры относительной предопределенности исходов стохастического эксперимента: чем больше возможность события, тем чаще оно происходит.

Однако в действительности теоретико-вероятностная модель стохастического объекта может эволюционировать в течение серии испытаний, т. е. моделью стохастического объекта в  $l$ -м испытании является вероятностное пространство  $(\mathcal{Y}, \mathfrak{A}, \text{Pr}^l)$ ,  $l = 1, 2, \dots$ , и при этом, вообще говоря,  $\text{Pr}^{l_1} \neq \text{Pr}^{l_2}$  при  $l_1 \neq l_2$ . Теоретико-вероятностная модель такого стохастического объекта не может быть построена эмпирически, так как частота  $\nu^{(L)}(A)$  события  $A \in \mathfrak{A}$  при достаточно большом  $L$  почти наверное сколь угодно близка к величине

$(1/L) \sum_{l=1}^L \text{Pr}^l(A)$ , которая в свою очередь может сколь угодно сильно отличаться как от каждой из величин  $\text{Pr}^l(A)$ ,  $l = L + 1, L + 2, \dots$ , так и от  $(1/N_{\Xi}) \sum_{l \in \Xi} \text{Pr}^l(A)$

для любого конечного  $\Xi \subset \{L + 1, L + 2, \dots\}$ , где  $N_{\Xi}$  — количество элементов в множестве  $\Xi$ .

Если же для некоторой возможности  $P$  все вероятности  $\text{Pr}^l$ ,  $l = 1, 2, \dots$ , содержатся в классе  $\text{Pr}_{\tilde{\mathfrak{A}}}(\text{P})$ , то при достаточно общих условиях возможность  $P$  может быть построена эмпирически на основе почти наверное конечного числа испытаний. При этом сохраняется та же эмпирическая трактовка возможности, что и в случае  $\text{Pr}^1 = \text{Pr}^2 = \dots$ , а именно: чем больше возможность события, тем чаще оно происходит.

## 2. Нечеткая форма изображения

Напомним определения *формы* изображения и *нечеткой формы* изображения, данные в работах [3, 4].

Пусть  $\mathbf{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$  — конечное подмножество координатной плоскости, которое в дальнейшем будем называть полем зрения, и  $\mathcal{R}$  — евклидово пространство размерности  $n$ . Пусть в пространстве  $\mathcal{R}$  определен и фиксирован ортонормированный базис  $\{e_1, \dots, e_n\}$ . Математической моделью черно-белых (полутоновых) изображений будем считать элементы пространства  $\mathcal{R}$ . Координаты элемента  $f \in \mathcal{R}$  в базисе  $\{e_1, \dots, e_n\}$  будем интерпретировать как яркости соответствующего изображения в точках  $x_1, \dots, x_n$  поля зрения  $\mathbf{X}$ . Пространство  $\mathcal{R}$  будем называть пространством изображений.

Изменение условий регистрации при получении изображений некоторой сцены приводит к изменению изображений этой сцены. В ряде практических важных случаев можно выделить класс  $\mathbb{G} = \{\gamma: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}\}$  преобразований пространства изображений  $\mathcal{R}$ , содержащий тождественное преобразование и являющийся полугруппой относительно композиции преобразований, который моделирует всевозможные изменения условий регистрации изображений. Для любого изображения

<sup>1</sup> Здесь и далее запись вида  $\gamma \circ f$  означает результат применения преобразования  $\gamma$  к изображению  $f \in \mathcal{R}$ .

$f \in \mathcal{R}$  изображение<sup>1</sup>  $\gamma \circ f \in \mathcal{R}$  является изображением той же сцены, что и  $f$ .

В связи с вышесказанным дадим следующее определение [3].

**Определение 4.** Формой  $V_f$  изображения  $f \in \mathcal{R}$  будем называть множество  $V_f = \{\gamma \circ f \mid \gamma \in \mathbb{G}\} \subset \mathcal{R}$ .

Обозначим  $\mathbb{V} \stackrel{\text{def}}{=} \{V_f \mid f \in \mathcal{R}\}$  множество всех форм.

**Определение 5.** Нечеткой формой изображения будем называть пространство с возможностью  $(\mathbb{V}, \mathcal{P}(\mathbb{V}), P)$ , где  $\mathcal{P}(\mathbb{V})$  —  $\sigma$ -алгебра всех подмножеств множества  $\mathbb{V}$  и  $P$  — заданная на ней возможность.

Процесс регистрации изображения, моделью которого является нечеткая форма  $(\mathbb{V}, \mathcal{P}(\mathbb{V}), P)$ , описывается схемой

$$(\mathbb{V}, \mathcal{P}(\mathbb{V}), P) \xrightarrow{1} V \in \mathbb{V} \xrightarrow{2} f \in V,$$

состоящей из двух этапов. На 1-м этапе в результате нечеткого эксперимента, моделью которого является пространство с возможностью  $(\mathbb{V}, \mathcal{P}(\mathbb{V}), P)$ , из  $\mathbb{V}$  выбирается форма  $V$ . Такой эксперимент моделирует нечеткую природу объектов сцены. На 2-м этапе из формы  $V$ , полученной на 1-м этапе, произвольным образом выбирается предъявляемое изображение  $f \in \mathcal{R}$ . Произвольность такого выбора моделирует априорную неизвестность условий регистрации, при которых получено изображение  $f$ .

### 3. Классификация изображений в нечеткой морфологии

Пусть  $\mathcal{P}(\mathbb{V})$ ,  $\mathcal{P}(\mathcal{R})$  и  $\mathcal{P}(\mathbb{V} \times \mathcal{R})$  —  $\sigma$ -алгебры всех подмножеств множеств  $\mathbb{V}$ ,  $\mathcal{R}$  и  $\mathbb{V} \times \mathcal{R}$  соответственно. Пусть на  $\mathcal{P}(\mathbb{V} \times \mathcal{R}) \times \mathcal{D}$  задана переходная возможность  $P^*(\cdot \mid \cdot)$ , распределение которой [6] обозначим  $p^*(\cdot, \cdot \mid \cdot): \mathbb{V} \times \mathcal{R} \times \mathcal{D} \rightarrow [0, 1]$ , где  $\mathcal{D} = \{1, \dots, N\}$ . Потребуем, чтобы возможность  $P^\nu(\cdot): \mathcal{P}(\mathcal{R}) \rightarrow [0, 1]$ , определенная как

$$P^\nu(B) = P^*(\mathbb{V} \times B \mid i), \quad B \in \mathcal{P}(\mathcal{R}), \quad i \in \mathcal{D},$$

не зависела от  $i$ . Определим на  $\mathcal{P}(\mathbb{V})$  возможности  $P_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , как

$$P_i(A) = P^*(A \times \mathcal{R} \mid i), \quad A \in \mathcal{P}(\mathbb{V}), \quad i = 1, \dots, N,$$

задав таким образом  $N$  нечетких форм  $(\mathbb{V}, \mathcal{P}(\mathbb{V}), P_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

Обозначим  $\Lambda$  множество всех отображений  $\lambda: \mathbb{V} \rightarrow \mathcal{R}$ , ставящих в соответствие каждой форме  $V \in \mathbb{V}$  изображение  $\lambda_V \in V$ . Пусть предъявляемые изображения формируются по схеме

$$\xi = \lambda_V + \nu, \quad (1)$$

где пара  $(\mathcal{V}, \nu)$  является каноническим нечетким элементом пространства с возможностью  $(\mathbb{V} \times \mathcal{R}, \mathcal{P}(\mathbb{V} \times \mathcal{R}))$ ,  $P^*(\cdot \mid i)$  при некоторых (неизвестных)  $i \in \mathcal{D}$ ,  $\lambda \in \Lambda$ . Требуется по реализации  $g \in \mathcal{R}$  нечеткого элемента  $\xi$  определить неизвестный номер  $i$ .

Схема (1) и пространство с возможностью  $(\mathbb{V} \times \mathcal{R}, \mathcal{P}(\mathbb{V} \times \mathcal{R}))$ ,  $P^*(\cdot \mid i)$  представляют собой модель регистрации изображений, имеющих нечеткую форму  $(\mathbb{V}, \mathcal{P}(\mathbb{V}), P_i)$ , полученных при неизвестных условиях регистрации и искаженных нечетким аддитивным шумом  $\nu$ .

Поясним смысл первого слагаемого в схеме (1). Пусть  $f \in \mathcal{R}$  — некоторое изображение и  $\mathcal{S}_f$  — некоторая сцена, удовлетворяющие следующему условию:

$$\text{Любое изображение } f' \in V_f \quad (2)$$

является изображением сцены  $\mathcal{S}_f$ .

Во многих практически важных случаях для каждого  $f \in \mathcal{R}$  найдется такая сцена  $\mathcal{S}_f$ , что выполнится условие (2). При условиях регистрации  $\mathcal{C}$  каждой сцене  $\mathcal{S}_f$  будет соответствовать определенное изображение  $g_f^{\mathcal{C}} \in V_f$ ,  $f \in \mathcal{R}$ . Этот факт позволяет определить отображение  $\lambda \in \Lambda$ , соответствующее условиям регистрации  $\mathcal{C}$ , как  $\lambda_{V_f}^{\mathcal{C}} = g_f^{\mathcal{C}}$ ,  $f \in \mathcal{R}$ . Таким образом, для любых условий регистрации  $\mathcal{C}$  изображение  $\lambda_{V_f}^{\mathcal{C}}$  является изображением сцены  $\mathcal{S}_f$ , полученным при условиях  $\mathcal{C}$ . В связи с этим будем считать, что неизвестное отображение  $\lambda \in \Lambda$  в (1) моделирует неизвестные условия регистрации и слагаемое  $\lambda_V$  является изображением, имеющим нечеткую форму  $(\mathbb{V}, \mathcal{P}(\mathbb{V}), P_i)$ .

Второе слагаемое в схеме (1) будем интерпретировать как аддитивный нечеткий шум, искажающий изображение  $\lambda_V$ . Заметим при этом, что в частном случае, когда для всякого  $i \in \mathcal{D}$  нечеткие элементы  $\mathcal{V}$  и  $\nu$  независимы в теоретико-возможностном понимании [6], переходная возможность  $P^*$  может быть определена посредством  $P_i$  и  $P^\nu$  следующим образом:

$$P^*(A \times B \mid i) = \min(P_i(A), P^\nu(B)), \\ A \in \mathcal{P}(\mathbb{V}), \quad B \in \mathcal{P}(\mathcal{R}), \quad i = 1, \dots, N.$$

Пусть  $\mathcal{P}(\Lambda)$  и  $\mathcal{P}(\mathcal{D} \times \Lambda)$  —  $\sigma$ -алгебры всех подмножеств множеств  $\Lambda$  и  $\mathcal{D} \times \Lambda$  соответственно. Будем считать, что на  $\mathcal{P}(\mathcal{D} \times \Lambda)$  задана априорная возможность  $Q$ , распределение которой обозначим  $q(\cdot, \cdot): \mathcal{D} \times \Lambda \rightarrow [0, 1]$ . Номер  $i \in \mathcal{D}$  и отображение  $\lambda \in \Lambda$  в схеме (1) будем считать результатом нечеткого эксперимента, модель которого суть пространство с возможностью  $(\mathcal{D} \times \Lambda, \mathcal{P}(\mathcal{D} \times \Lambda), Q)$ . В случае, когда о значениях  $i$  и  $\lambda$  априори ничего не известно, следует положить  $q(i, \lambda) = 1$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $\lambda \in \Lambda$  [6].

Определим на  $\mathcal{P}(\mathcal{R}) \times \mathcal{D} \times \Lambda$  переходную возможность  $P^{\xi|\eta, \lambda}$  следующим образом:

$$P^{\xi|\eta, \lambda}(B \mid i, \lambda) = P^*(\{(V, g - \lambda_V) \mid V \in \mathbb{V}, g \in B\} \mid i), \\ B \in \mathcal{P}(\mathcal{R}), \quad i \in \mathcal{D}, \quad \lambda \in \Lambda.$$

Обозначим  $p^{\xi|\eta, \lambda}(\cdot \mid \cdot, \cdot): \mathcal{R} \times \mathcal{D} \times \Lambda \rightarrow [0, 1]$  распределение возможности  $P^{\xi|\eta, \lambda}$ . Определим на  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{P}(\mathcal{R} \times \mathcal{D})$  всех подмножеств множества  $\mathcal{R} \times \mathcal{D}$  возможность  $P^{\xi, \eta}$  так, чтобы

$$P^{\xi, \eta}(B \times D) = \max_{i \in \mathcal{D}} \sup_{\lambda \in \Lambda} \min(P^{\xi|\eta, \lambda}(B \mid i, \lambda), q(i, \lambda)), \\ B \in \mathcal{P}(\mathcal{R}), \quad D \in \mathcal{P}(\mathcal{D}).$$

Обозначим  $p^{\xi, \eta}(\cdot, \cdot): \mathcal{R} \times \mathcal{D} \rightarrow [0, 1]$  распределение возможности  $P^{\xi, \eta}$ .

Согласно схеме (1), при фиксированных  $i \in \mathcal{D}$  и  $\lambda \in \Lambda$  нечеткий элемент  $\xi$  является каноническим для пространства с возможностью  $(\mathcal{R}, \mathcal{P}(\mathcal{R}), P^{\xi|\eta, \lambda}(\cdot \mid i, \lambda))$ . В связи с этим задачу классификации изображений будем рассматривать как многоальтернативную байесовскую задачу проверки гипотез, в которой  $i$ -я гипотеза состоит в том, что предъявляемое изображение

получено в результате нечеткого эксперимента, моделью которого является пространство с возможностью  $(\mathcal{R}, \mathcal{P}(\mathcal{R}), P^{\xi|\eta, \lambda}(\cdot | i, \lambda))$ .

Для принятия решения в указанной задаче проверки гипотез будем использовать фазифицированные критерии [6], каждый из которых представляет собой векторнозначную функцию  $\pi(\cdot) = (\pi_1(\cdot), \dots, \pi_N(\cdot))$ ,  $\pi_i(\cdot): \mathcal{R} \rightarrow [0, 1]$ , удовлетворяющую условию

$$\max_{i=1, \dots, N} \pi_i(g) = 1, \quad g \in \mathcal{R}.$$

Множество всех таких функций обозначим  $\mathbb{III}$ . Каждому критерию  $\pi \in \mathbb{III}$  поставим в соответствие переходную возможность  $\Phi_\pi(\cdot | \cdot): \mathcal{P}(\mathcal{D}) \times \mathcal{R} \rightarrow [0, 1]$ , определенную как

$$\Phi_\pi(D | g) = \max_{i \in D} \pi_i(g), \quad D \in \mathcal{P}(\mathcal{D}), \quad g \in \mathcal{R}.$$

При предъявлении изображения  $g \in \mathcal{R}$  решение будем принимать в пользу гипотезы, номер которой является результатом нечеткого эксперимента, модель которого суть пространство с возможностью  $(\mathcal{D}, \mathcal{P}(\mathcal{D}), \Phi_\pi(\cdot | g))$ .

Для того чтобы каждому критерию  $\pi \in \mathbb{III}$  сопоставить величину соответствующих ему потерь, зададим пространство с возможностью  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P^\omega)$ , канонический нечеткий элемент которого будем обозначать  $\omega$ , и отображение  $\mathcal{E}: \Omega \rightarrow \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ , которые вместе определяют нечеткое множество  $\mathcal{E}_\omega$  в  $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$  [6]. Здесь  $\mathcal{P}(\Omega)$  —  $\sigma$ -алгебра всех подмножеств множества  $\Omega$ . Будем считать, что при верной гипотезе  $j \in \mathcal{D}$  и принятом решении  $i \in \mathcal{D}$  потери возникают, если и только если нечеткое множество  $\mathcal{E}_\omega$  накрывает пару  $(i, j) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ . Тогда возможность потерь, которые могут возникнуть в ситуации, когда верна  $j$ -я гипотеза и решение принято в пользу  $i$ -й гипотезы, равна

$$pl(i, j) = P^\omega(\{\omega \in \Omega | (i, j) \in \mathcal{E}_\omega\}).$$

При сделанных выше предположениях возможность потерь, сопутствующих использованию критерия  $\pi \in \mathbb{III}$ , равна [6]

$$\alpha(\pi) = \sup_{g \in \mathcal{R}} \max_{i \in \mathcal{D}} \min(\pi_i(g), \alpha_i(g)), \quad (3)$$

где

$$\alpha_i(g) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{j \in \mathcal{D}} \min(pl(i, j), p^{\xi|\eta}(g, j)).$$

Оптимальным будем считать любой критерий  $\hat{\pi} \in \mathbb{III}$ , для которого

$$\alpha(\hat{\pi}) = \min_{\pi \in \mathbb{III}} \alpha(\pi), \quad (4)$$

т. е. любой критерий, минимизирующий возможность потерь.

Как известно [6], решением задачи (4) является всякий критерий  $\hat{\pi}$ , удовлетворяющий условиям

$$\max_{i \in I(g)} \hat{\pi}_i(g) = 1, \quad \max_{\substack{i=1, \dots, N \\ i \notin I(g)}} \hat{\pi}_i(g) = 0, \quad g \in \mathcal{R}, \quad (5)$$

где

$$I(g) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ i = 1, \dots, N: \alpha_i(g) = \min_{j=1, \dots, N} \alpha_j(g) \right\}. \quad (6)$$

Заметим, что среди критериев, удовлетворяющих (5), (6), найдется (вообще говоря, не единственный)

нефазифицированный (четкий) критерий  $\hat{\pi} \in \mathbb{III}$ , т. е. такой критерий, для которого

$$\hat{\pi}_{i(g)}(g) = 1, \quad \hat{\pi}_i(g) = 0 \quad \text{при } i \neq i(g), \quad g \in \mathcal{R},$$

где  $i(\cdot): \mathcal{R} \rightarrow \{1, \dots, N\}$  — некоторая функция, которая каждому изображению  $g \in \mathcal{R}$  ставит в соответствие номер  $i(g) \in I(g)$ . При использовании такого критерия при предъявлении изображения  $g \in \mathcal{R}$  решение в задаче классификации следует принять в пользу нечеткой формы с номером  $i \in I(g)$ . При этом возможность потерь (3) не зависит от выбора  $i \in I(g)$  и минимальна.

#### 4. Эмпирическое построение стохастически измеримой возможности

Пусть  $\mu$  — мера, определенная на  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{A}$  подмножеств множества  $\mathcal{Y}$ , и вероятность  $\text{Pr}$  абсолютно непрерывна относительно  $\mu$ . Плотность распределения вероятности  $\text{Pr}$  обозначим  $\text{pr}(\cdot): \mathcal{Y} \rightarrow [0, \infty)$ . В случае если  $\mathcal{A}$  содержит все одноточечные подмножества множества  $\mathcal{Y}$  и  $\mu(\{y\}) = 0$ ,  $y \in \mathcal{Y}$ , возможность  $\text{P}$ , максимально согласованная с  $\text{Pr}$  оказывается тривиальной, т. е.  $\text{P}(A) = 1$ ,  $A \in \mathcal{A}$ . При этом использование тривиальных возможностей в задачах оценивания, проверки гипотез, классификации и т. п. зачастую приводит к неудовлетворительным, с точки зрения исследователя, результатам, так как в этом случае решение задачи учитывает лишь априорную информацию, но не наблюдение.

В связи с этим в работе [6] предлагается гранулировать множество элементарных событий  $\mathcal{Y}$ , т. е. разбить его на  $K$   $\mu$ -измеримых подмножеств (гранул)

$$\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_K: \bigcup_{k=1}^K \mathcal{Y}_k = \mathcal{Y}, \quad \mathcal{Y}_i \cap \mathcal{Y}_j = \emptyset, \quad i, j = 1, \dots, K, \quad i \neq j,$$

и построить  $\text{P}$  как возможность, максимально согласованную с  $\text{Pr}$  на алгебре  $\sigma(\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_K)$ , порожденной разбиением  $\mathcal{Y}$  на гранулы  $\mathcal{Y}_k$ ,  $k = 1, \dots, K$ . Для того, чтобы такая возможность  $\text{P}$  «содержала» как можно больше «деталей», свойственных вероятности  $\text{Pr}$ , предлагается выбрать гранулы  $\mathcal{Y}_k$ ,  $k = 1, \dots, K$ , такими, чтобы выполнялись условия

$$\forall y \in \mathcal{Y}_k, \quad y' \in \mathcal{Y}_{k+1}, \quad \text{pr}(y) > \text{pr}(y'), \quad k = 1, \dots, K-1, \quad (7)$$

$$1 = \text{P}(\mathcal{Y}_1) > \text{P}(\mathcal{Y}_2) > \dots > \text{P}(\mathcal{Y}_K). \quad (8)$$

Тот факт, что гранулы  $\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_K$  в (8) упорядочены по убыванию возможности, естественным образом связан с условием (7). Как показано в [6], для выполнения условия (8) необходимо и достаточно, чтобы для некоторых  $a_k > 0$ ,  $k = 1, \dots, K-1$ , были верны следующие соотношения:

$$\sum_{k'=1}^{k-1} \text{Pr}(\mathcal{Y}_{k'}) + 2 \text{Pr}(\mathcal{Y}_k) \geq 1 + a_k, \quad k = 1, \dots, K-1. \quad (9)$$

##### 4.1. Эмпирическое построение стохастически измеримой возможности в многомерном случае

Рассмотрим случай, когда множество  $\mathcal{Y}$  представляет собой прямое произведение множеств  $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_N$ . Пусть на множествах  $\mathcal{X}_i$  определены метрики  $\rho_i(\cdot, \cdot)$ , на  $\sigma$ -алгебрах  $\mathcal{A}_i$  подмножеств множеств  $\mathcal{X}_i$  определены меры  $\mu_i$  и вероятности  $\text{Pr}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Пусть

каждая вероятность  $\text{Pr}_i$  абсолютно непрерывна относительно меры  $\mu_i$  и имеет плотность распределения  $\text{pr}_i(\cdot): \mathcal{X}_i \rightarrow [0, \infty)$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Пусть в результате серии независимых стохастических экспериментов, моделью которой является вероятностное пространство  $(\mathcal{X}_1, \mathfrak{A}_1, \text{Pr}_1)^L \times \dots \times (\mathcal{X}_N, \mathfrak{A}_N, \text{Pr}_N)^L$ , набрано  $N$  выборок объема  $L$  из распределений вероятностей  $\text{Pr}_1, \dots, \text{Pr}_N$ :

$$\begin{aligned} & \text{выборка из распределения } \text{Pr}_1: x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^L, \\ & \quad \vdots \\ & \text{выборка из распределения } \text{Pr}_N: x_N^1, x_N^2, \dots, x_N^L. \end{aligned} \quad (10)$$

Пусть  $\mathfrak{A}$  —  $\sigma$ -алгебра подмножеств множества  $\mathcal{Y}$ , содержащая все подмножества вида  $A_1 \times \dots \times A_N$ ,  $A_i \in \mathfrak{A}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , и  $\text{Pr}$  — вероятность, определенная на  $\mathfrak{A}$  так, что  $\text{Pr}(A_1 \times \dots \times A_N) = \prod_{i=1}^N \text{Pr}_i(A_i)$ ,  $A_i \in \mathfrak{A}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

Рассмотрим задачу эмпирического построения возможности  $\text{P}: \mathcal{P}(\mathcal{Y}) \rightarrow [0, 1]$ , максимально согласованной с вероятностью  $\text{Pr}$  на алгебре  $\sigma(\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_K)$ , порожденной некоторым измеримым разбиением  $\mathcal{Y}$  на гранулы  $\mathcal{Y}_k$ ,  $k = 1, \dots, K$ , потребовав выполнения условий (7), (8). Здесь  $\mathcal{P}(\mathcal{Y})$  —  $\sigma$ -алгебра всех подмножеств множества  $\mathcal{Y}$ . При этом будем эмпирически восстанавливать не всю возможность  $\text{P}$ , а лишь значения  $\text{P}(\{x_1^{l_1}, \dots, x_N^{l_N}\})$ ,  $l_i = 1, \dots, L$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Для этого достаточно определить, к какой из гранул  $\mathcal{Y}_k$ ,  $k = 1, \dots, K$ , относится каждая из точек  $(x_1^{l_1}, \dots, x_N^{l_N}) \in \mathcal{Y}$ ,  $l_i = 1, \dots, L$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

Чтобы ответить на этот вопрос, воспользуемся следующей процедурой. Определим частоты  $\nu_i^{(L)}(\cdot): \mathfrak{A}_i \rightarrow [0, 1]$  как  $\nu_i^{(L)}(A) = L_i(A)/L$ ,  $A \in \mathfrak{A}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , где  $L_i(A)$  — количество элементов выборки  $\{x_i^l, l = 1, \dots, L\}$ , принадлежащих множеству  $A$ . Зададим последовательности положительных вещественных чисел  $\{r_1, r_2, \dots\}$ ,  $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots\}$  и  $\{\delta_1, \delta_2, \dots\}$ . Номера  $l_L(t, i)$ ,  $t = 1, \dots, L^N$ ,  $i = 1, \dots, N$ , определим из условия

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^N \nu_i^{(L)}(O_{r_L}(x_i^{l_L(1,i)})) & \geq \prod_{i=1}^N \nu_i^{(L)}(O_{r_L}(x_i^{l_L(2,i)})) \geq \dots \\ & \dots \geq \prod_{i=1}^N \nu_i^{(L)}(O_{r_L}(x_i^{l_L(L^N,i)})), \end{aligned}$$

где  $O_r(x_i) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathcal{X}_i \mid \rho_i(x, x_i) \leq r\}$ ,  $x_i \in \mathcal{X}_i$ ,  $r \geq 0$ . Положим

$$\begin{aligned} \underline{t}_1^{(L)} &= 1, \quad \bar{t}_1^{(L)} = \min\left(L^N, [L^N((1+a)/2 + \varepsilon_L)]\right), \\ \Delta t_1^{(L)} &= \bar{t}_1^{(L)} - \underline{t}_1^{(L)} + 1, \\ T_1^{(L)} &= \left\{ \underline{t}_1^{(L)}, \underline{t}_1^{(L)} + 1, \dots, \bar{t}_1^{(L)} \right\}. \end{aligned}$$

Определим  $\underline{t}_k^{(L)}$ ,  $k = 2, \dots, K$ , и  $\bar{t}_k^{(L)}$ ,  $\Delta t_k^{(L)}$ ,  $T_k^{(L)}$ ,  $k = 2, \dots, K-1$ , согласно следующей рекуррентной

процедуре:

- если  $\prod_{i=1}^N \nu_i^{(L)}\left(O_{r_L}\left(x_i^{l_L(\bar{t}_{k-1}^{(L)})}\right)\right) \leq \prod_{i=1}^N \nu_i^{(L)}\left(O_{r_L}\left(x_i^{l_L(L^N,i)}\right)\right) + 2\varepsilon_L + \delta_{L^N r_L}$ ,  
то  $\underline{t}_k^{(L)} = L^N + 1$ ,  $\bar{t}_k^{(L)} = L^N$ ;
- иначе  $\underline{t}_k^{(L)} = \min\left\{t = \bar{t}_{k-1}^{(L)} + 1, \dots, L^N\right\}$ ;

$$\prod_{i=1}^N \nu_i^{(L)}\left(O_{r_L}\left(x_i^{l_L(\bar{t}_k^{(L)})}\right)\right) > \prod_{i=1}^N \nu_i^{(L)}\left(O_{r_L}\left(x_i^{l_L(t,i)}\right)\right) + 2\varepsilon_L + \delta_{L^N r_L}$$

при этом

- если  $\sum_{k'=1}^{k-1} \Delta t_{k'}^{(L)} + 2(L^N - \underline{t}_k^{(L)} + 1) \leq L^N(1+a + (k+1)\varepsilon_L)$ ,  
то  $\bar{t}_k^{(L)} = L^N$ ;
- иначе  $\bar{t}_k^{(L)} = \min\left\{t = \underline{t}_k^{(L)}, \dots, L^N\right\}$ ;

$$\sum_{k'=1}^{k-1} \Delta t_{k'}^{(L)} + 2(t - \underline{t}_k^{(L)} + 1) > L^N(1+a + (k+1)\varepsilon_L);$$

$$\begin{aligned} \Delta t_k^{(L)} &= \bar{t}_k^{(L)} - \underline{t}_k^{(L)} + 1, \\ T_k^{(L)} &= \left\{ \underline{t}_k^{(L)}, \underline{t}_k^{(L)} + 1, \dots, \bar{t}_k^{(L)} \right\}. \end{aligned}$$

• Положим, наконец,

$$\begin{aligned} \bar{t}_K^{(L)} &= L^N, \quad \Delta t_K^{(L)} = \bar{t}_K^{(L)} - \underline{t}_K^{(L)} + 1, \\ T_K^{(L)} &= \left\{ \underline{t}_K^{(L)}, \underline{t}_K^{(L)} + 1, \dots, \bar{t}_K^{(L)} \right\}. \end{aligned}$$

Приведем без доказательства следующую теорему, позволяющую использовать построенные множества  $T_k^{(L)}$  и номера  $l_L(t, i)$ ,  $t = 1, \dots, L^N$ , для того, чтобы отнести почти каждую из точек  $(x_1^{l_1}, \dots, x_N^{l_N})$ ,  $l_i = 1, \dots, L$ ,  $i = 1, \dots, N$ , к одной из гранул  $\mathcal{Y}_k$ ,  $k = 1, \dots, K$ , удовлетворяющих условиям (7), (9)<sup>2</sup>.

**Теорема.** Пусть  $(\mathcal{X}_i, \rho_i, \mathfrak{A}_i, \mu_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , — метрические измеримые пространства,  $\sigma$ -алгебры  $\mathfrak{A}_i$  содержат все шары  $O_r(x_i)$ ,  $r \geq 0$ ,  $x_i \in \mathcal{X}_i$  и

$$0 < \underline{m}_i(r) \leq \mu_i(O_r(x_i)) = m_i(r) \leq \bar{m}_i(r), \quad r > 0, \quad x_i \in \mathcal{X}_i.$$

Пусть  $\text{Pr}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , — вероятности, определенные на  $\mathfrak{A}_i$ , абсолютно непрерывные относительно мер  $\mu_i$ , с ограниченными плотностями распределе-

<sup>2</sup> Это означает, что доля точек, которые не могут быть отнесены к какой-либо из гранул  $\mathcal{Y}_k$ , согласно теореме,  $k = 1, \dots, K$ , почти наверное стремится к нулю при неограниченном увеличении  $L$  (см. (13) и замечание 3).

ний  $\text{pr}_i(\cdot): \mathcal{X}_i \rightarrow [0, \infty)$ , удовлетворяющими условиям  $|\text{pr}_i(x) - \text{pr}_i(x')| \leq C_i \rho_i(x, x')$ ,  $x, x' \in \mathcal{X}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $\mu_i(\{\text{pr}_i(x) = g\}) = 0 \quad \forall g \geq 0, i = 1, \dots, N$ ,

где  $C_i$  — положительные константы. Пусть последовательности  $\{r_1, r_2, \dots\}$ ,  $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots\}$  и  $\{\delta_1, \delta_2, \dots\}$  удовлетворяют следующим условиям:

$$\varepsilon_L = \frac{\varepsilon_0}{L^{1/2-b}}, \quad 0 < b < 1/2,$$

$$r_L \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0, \quad \frac{\varepsilon_L}{\prod_{i=1}^N \underline{m}_i(r_L)} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0,$$

$$\frac{\delta_L}{\prod_{i=1}^N \overline{m}_i(r_L)} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \infty, \quad \frac{\delta_L r_L}{\prod_{i=1}^N \underline{m}_i(r_L)} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0,$$

где  $\varepsilon_0$  — положительная константа. Пусть  $a > 0$  достаточно мало, чтобы существовали и не были пусты гранулы  $\mathcal{Y}_k$ ,  $k = 1, \dots, K$ , удовлетворяющие условиям (7), (9).

Тогда найдутся такие измеримые гранулы  $\mathcal{Y}_k^{(L)} \in \mathfrak{A}$ ,  $k = 1, \dots, K$ ,  $L = 1, 2, \dots$ , удовлетворяющие при каждом  $L$  условиям вида (7), (9), что при выполнении условий

$$\frac{\delta_L}{2} > \max_{i=1, \dots, N} C_i \overline{m}_i(r_L), \quad T_k^{(L)} \neq \emptyset, \quad k = 1, \dots, K, \quad (11)$$

$$\sum_{k'=1}^k \frac{\Delta t_{k'}^{(L)}}{L^N} + 2 \frac{\Delta t_k^{(L)}}{L^N} > 1 + a + (k+1)\varepsilon_L, \quad k = 1, \dots, K-1,$$

с вероятностью не менее  $1 - 4L \exp(-2(L-1)\varepsilon_L^2)$  выполнены следующие включения:

$$(x_1^{l_1(t,1)}, \dots, x_N^{l_N(t,N)}) \in \mathcal{Y}_k^{(L)}, \quad t \in T_k^{(L)}, \quad k = 1, \dots, K. \quad (12)$$

При всех достаточно больших  $L$  условия (11) и включения (12) выполнены почти наверное<sup>3</sup>, и

$$\sum_{k=1}^{K-1} \frac{t_{k+1}^{(L)} - \overline{t}_k^{(L)} - 1}{L^N} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0. \quad (13)$$

**Замечание.** Величина  $(1/L^N) \sum_{k=1}^{K-1} (t_{k+1}^{(L)} - \overline{t}_k^{(L)} - 1)$

в (13) представляет собой долю тех точек  $(x_1^{l_1}, \dots, x_N^{l_N})$ ,  $l_i = 1, \dots, L$ ,  $i = 1, \dots, N$ , которые не могут быть отнесены к какой-либо из гранул  $\mathcal{Y}_k^{(L)}$  согласно (12),  $k = 1, \dots, K$ .

#### 4.2. Приближенное эмпирическое построение стохастически измеримой возможности в многомерном случае

При большом значении  $N$  процедура отыскания множеств  $T_k^{(L)}$ ,  $k = 1, \dots, K$ , и номеров  $l_L(t, i)$ ,  $t = 1, \dots, L^N$ ,  $i = 1, \dots, N$ , предложенная в предыдущем пункте, сопряжена с большими затратами вычислительных ресурсов, быстро растущими с ростом  $L$ , что

кардинальным образом ограничивает возможность ее применения на практике. К примеру, при  $N = 10$  оперативной памяти современных ЭВМ становится недостаточно для реализации этой процедуры уже при  $L \sim 10$ . В связи с этим предложим более простую в вычислительном плане процедуру, которая является в определенном смысле приближенным вариантом процедуры, рассмотренной в предыдущем пункте.

Разобьем каждое из множеств  $\{x_i^l, l = 1, \dots, L\}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , на  $R$  подмножеств так, чтобы все подмножества содержали одинаковое количество точек, равное  $L/R$ . Пусть эти разбиения определяются множествами индексов  $L_i^r$ ,  $r = 1, \dots, R$ ,  $L_i^r \cap L_i^{r'} = \emptyset$  при  $r_1 \neq r_2$ ,  $i = 1, \dots, N$ , т.е.  $\{x_i^l, l = 1, \dots, L\} = \bigcup_{r=1}^R \{x_i^l, l \in L_i^r\}$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Можно, например, предложить следующий способ разбиения множеств  $\{x_i^l, l = 1, \dots, L\}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , на  $R$  подмножеств: сначала для каждого  $i = 1, \dots, N$  упорядочить элементы  $x_i^l$ ,  $l = 1, \dots, L$ , по неубыванию частоты  $\nu_i^{(L)}(O_{r_L}(x_i^l))$ , а затем разделить полученные упорядоченные множества точек на  $R$  равных частей каждое. Множества индексов  $L_i^r$ ,  $r = 1, \dots, R$ ,  $i = 1, \dots, N$ , при этом будут таковы, что

$$\nu_i^{(L)}(O_{r_L}(x_i^l)) \geq \nu_i^{(L)}(O_{r'_L}(x_i^{l'})),$$

если

$$l \in L_i^r, \quad l' \in L_i^{r'}, \quad r = 1, \dots, R-1.$$

Из каждого множества  $L_i^r$  выберем один индекс  $h_i(r)$ ,  $r = 1, \dots, R$ ,  $i = 1, \dots, N$ , в результате получим  $R$  точек в каждом из множеств  $\mathcal{X}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , всего  $R \times N$  точек:

$$\begin{aligned} x_1^{h_1(1)}, \dots, x_1^{h_1(R)} &\in \mathcal{X}_1, \\ &\vdots \\ x_N^{h_N(1)}, \dots, x_N^{h_N(R)} &\in \mathcal{X}_N. \end{aligned} \quad (14)$$

Для каждой точки в (14) вычислим частоту  $\nu_i^{(L)}(O_{r_L}(x_i^{h_i(r)}))$ ,  $r = 1, \dots, R$ ,  $i = 1, \dots, N$ , используя исходные выборки объема  $L$  (см. (10)). Затем применим к (14) процедуру, рассмотренную в предыдущем пункте, считая, что (14) — это  $N$  выборок объема  $R$ , но используя при отыскании множеств  $T_k^{(R)}$ ,  $k = 1, \dots, K$  и номеров  $l_R(t, i)$ ,  $t = 1, \dots, R^N$ ,  $i = 1, \dots, N$ , величины  $\varepsilon_L$ ,  $r_L$ ,  $\delta_L$  и  $\nu_i^{(L)}(O_{r_L}(x_i^{h_i(r)}))$  вместо  $\varepsilon_R$ ,  $r_R$ ,  $\delta_R$  и  $\nu_i^{(R)}(O_{r_R}(x_i^{h_i(r)}))$ . В результате каждая из точек  $(x_1^{l_1(t,1)}, \dots, x_N^{l_N(t,N)})$ ,  $t \in \bigcup_{k=1}^K T_k^{(R)}$ , будет отнесена

к одной из гранул  $\mathcal{Y}_k^{(R)}$ ,  $k = 1, \dots, K$ , удовлетворяющих условиям вида (7), (9). Для остальных точек  $(x_1^{l_1}, \dots, x_N^{l_N}) \in \mathcal{Y}$ ,  $l_i = 1, \dots, L$ ,  $i = 1, \dots, N$ , будем считать, что

$$(x_1^{l_1}, \dots, x_N^{l_N}) \in \mathcal{Y}_k^{(R)},$$

если

$$l_i \in L_i^{r_i}, \quad i = 1, \dots, N \quad \text{и} \quad (x_1^{h_1(r_1)}, \dots, x_N^{h_N(r_N)}) \in \mathcal{Y}_k^{(R)}.$$

<sup>3</sup> Утверждение «почти наверное» понимается здесь в терминах вероятностного пространства  $(\mathcal{Y}, \mathfrak{A}, \text{Pr}) \times (\mathcal{Y}, \mathfrak{A}, \text{Pr}) \times \dots$ .

Заметим, что при  $R = L$  предложенная в этом пункте процедура дает тот же результат, что и процедура, предложенная в предыдущем пункте. При  $R < L$  нестрогая упорядоченность возможностей событий  $\{(x_1^{h_1(r)}, \dots, x_N^{h_N(r)})\}$ ,  $r_i \in \{l_R(t, i) \mid t \in \bigcup_{k=1}^K T_k^{(R)}\}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , оказывается одинаковой при использовании обеих процедур.

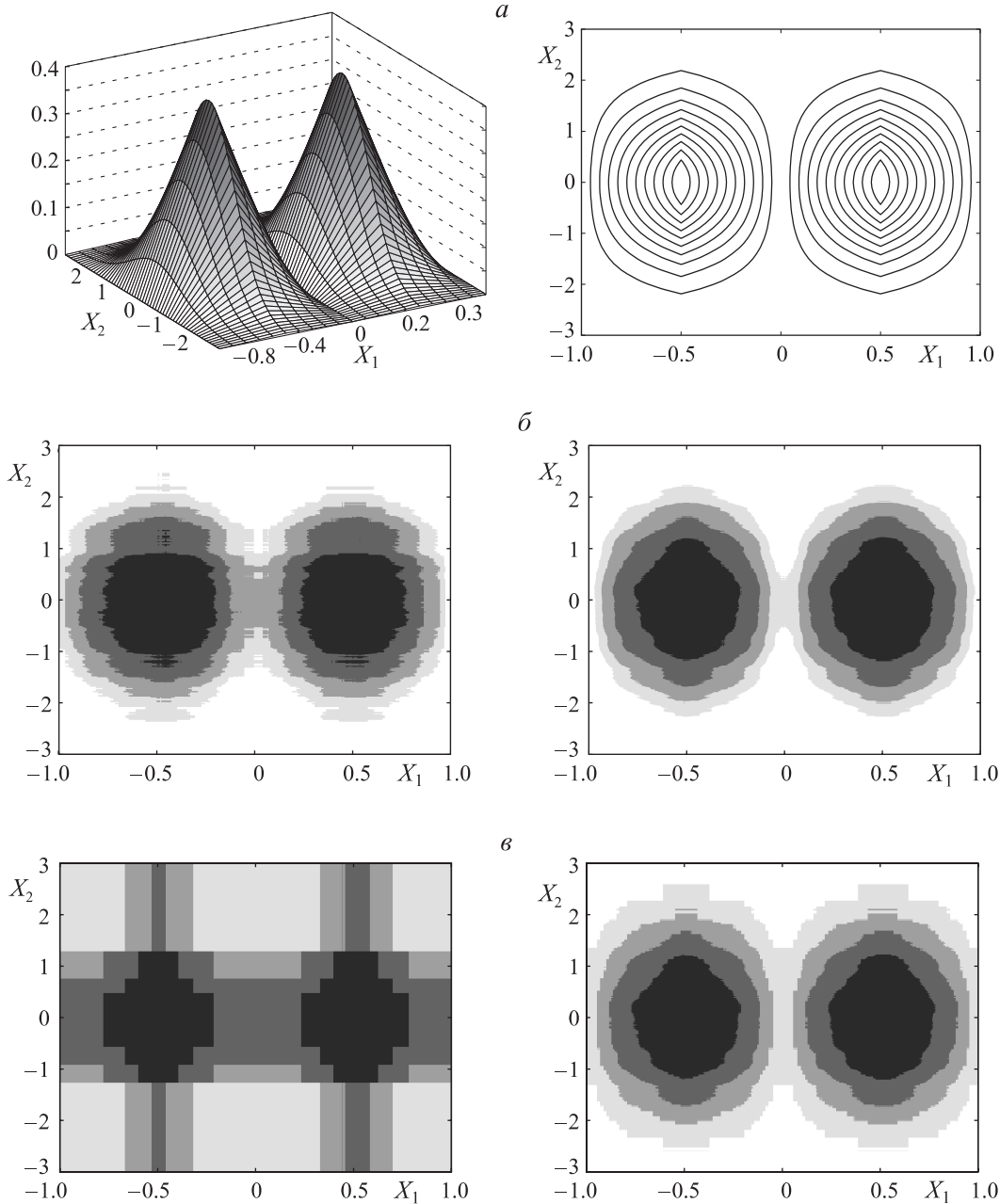
для случая  $N = 2$ ,  $K = 5$ ,  $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2 = (-\infty, \infty)$ . На плоскости  $\mathcal{Y} = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$  отмечены области, при попадании в которые точек  $(x_1^{l_1}, \dots, x_N^{l_N})$ ,  $l_i = 1, \dots, L$ ,  $i = 1, \dots, N$ , им присваиваются разные значения возможности: чем темнее область, тем больше возможность. В белую область по краям точки  $(x_1^{l_1}, \dots, x_N^{l_N})$ ,  $l_i = 1, \dots, L$ ,  $i = 1, \dots, N$ , в проведенном эксперименте не попали.

Вероятности  $\text{Pr}_1$  и  $\text{Pr}_2$  имели следующие плотности распределений относительно меры Лебега на прямой:

**4.3. Вычислительный эксперимент**

На рисунках б, в представлены результаты, полученные с использованием двух предложенных процедур

$$\text{pr}_1(x) = (2x + 2)\chi_{[-1, -1/2]}(x) - 2x\chi_{(-1/2, 0]}(x) + 2x\chi_{(0, 1/2]}(x) + (2 - 2x)\chi_{(1/2, 1]}(x),$$



Эмпирическое построение стохастически измеримой возможности. Более темный цвет соответствует большему значению распределения возможности: а — плотность  $\text{pr}_1(x_1)\text{pr}_2(x_2)$ ,  $x_i \in \mathcal{X}_i$ ,  $i = 1, 2$ , и ее линии уровня; б — эмпирическое построение возможности при  $L = 10^3$  (слева) и  $L = 10^4$  (справа); в — приближенное эмпирическое построение возможности при  $R = 5$  (слева) и  $R = 100$  (справа),  $L = 10^4$

$$p_{r_2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right),$$

где  $\chi_A(x) = 1$  при  $x \in A$ ,  $\chi_A(x) = 0$  при  $x \notin A$ ,  $A \subset (-\infty, \infty)$ . Величины  $\varepsilon_L$ ,  $r_L$  и  $\delta_L$  были заданы следующим образом:  $\varepsilon_L = 10^{-4}/L^{1/2-0.02}$ ,  $r_L = 0.8/L^{1/4-0.02}$ ,  $\delta_L = 10^{-4}/L^{1/2-0.03}$ . Плотность распределения вероятности  $P_r$ , равная  $p_{r_1}(x_1)p_{r_2}(x_2)$ ,  $x_1, x_2 \in (-\infty, \infty)$ , представлена на рисунке *a*.

### Заключение

Разработаны методы классификации изображений, имеющих нечеткую форму. Построен алгоритм эмпирического восстановления теоретико-возможностной модели стохастического объекта, который может быть применен в целях эмпирического построения нечеткой формы изображения.

Автор выражает благодарность профессору Ю. П. Пытьеву за плодотворное обсуждение результатов, представленных в настоящей статье.

### Possibility model in morphological image analysis

**A. V. Zubjuk**

*Department of Computer Methods in Physics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.*

*E-mail: zubjuk@physics.msu.ru.*

The possibility models in mathematical methods of morphological image analysis are considered. Particularly, solution of the possibility-theoretic image classification problem is obtained. The solution can be used for acoustic signal analysis in geophysics [1], satellite images interpretation [2], etc. The methods for empirical reconstruction of fuzzy shape are developed.

*Keywords:* morphological image analysis, fuzzy morphology, possibility theory, numerical algorithms.

*PACS:* 02.50.Le, 02.50.Tt.

*Received 27 June 2012.*

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 6(2012).

### Сведения об авторе

Зубюк Андрей Владимирович — м.л. науч. сотрудник; тел.: (495) 939-46-94, e-mail: zubjuk@physics.msu.ru.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 11-07-00338-а, 11-07-00722-а).

### Список литературы

1. Куличков С.Н., Чуличков А.И., Демин Д.С. Морфологический анализ инфразвуковых сигналов в акустике. М., 2010.
2. Пытьев Ю.П. // Математические методы исследования природных ресурсов Земли из космоса. М., 1984.
3. Пытьев Ю.П. // Докл. АН СССР. 1983. **269**, № 5. С. 1061.
4. Пытьев Ю.П., Зубюк А.В. // Мат-лы IX междунар. конф. «Интеллектуальные системы и компьютерные науки». 2006. Т. 1, Ч. 2. С. 222.
5. Пытьев Ю.П., Чуличков А.И. Методы морфологического анализа изображений. М., 2010.
6. Пытьев Ю.П. Возможность как альтернатива вероятности. Математические и эмпирические основы, применение. М., 2007.