

Классификация изображений в нечеткой морфологии: алгоритм эмпирического построения решающего правила

А. В. Зубюк

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет,
кафедра компьютерных методов физики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
E-mail: zubjuk@physics.msu.ru

Статья поступила 29.06.2012, подписана в печать 09.10.2012.

Разработан и проиллюстрирован в вычислительном эксперименте алгоритм эмпирического построения решающего правила в задаче классификации изображений сцен в теоретико-возможностной постановке, который может быть использован для анализа формы акустических сигналов в геофизике [1], для решения задач интерпретации спутниковых изображений [2] и др.

Ключевые слова: морфологический анализ изображений, нечеткая морфология, теория возможностей, численные алгоритмы.

УДК: 519.226. PACS: 02.50.Le, 02.50.Tt.

Введение

В настоящей работе рассмотрены математические методы и алгоритм классификации изображений сцен, основанные на математических методах морфологического анализа изображений [3] и методах нечеткой морфологии [4]. Примерами таких объектов могут служить рукописная цифра, так как при ее написании происходят случайные искажения пропорций ее элементов, человек (вообще, а не какой-либо конкретный), так как геометрические формы разных людей различны, и др.

Методы морфологического анализа изображений разработаны для решения таких задач, как поиск известного объекта на неизвестном фоне, выделение неизвестного объекта на известном фоне, классификация изображений сцен и т. п. Трудности при решении подобных задач связаны с тем, что всякое изображение сцены содержит информацию не только о регистрируемой сцене, но также и об условиях регистрации, при которых оно получено и которые, как правило, неизвестны. Такими условиями являются, например, характер освещения объектов сцены, их оптические свойства и т. п. В основе математических методов морфологического анализа изображений лежит понятие *формы изображения* (см. определение 4 ниже) как максимального инварианта относительно изменения условий регистрации. Форма изображения сцены несет наиболее полную информацию о форме сцены, доступную по ее изображению.

Однако методы морфологического анализа изображений непригодны для решения задач анализа сцен, состоящих из объектов, форма изображения которых не может быть четко определена в силу того, что сами эти объекты не имеют определенной геометрической формы [5]. Кроме того, разработаны алгоритмы наиболее точного эмпирического построения оптимального правила классификации, отличные от алгоритмов, представленных в [6], позволяющих наиболее точно восстанавливать нечеткую модель в задаче классификации. Одновременно с этим всякое изображение сцены,

на которой представлены такие объекты, содержит информацию об условиях регистрации, при которых оно получено.

Математические методы нечеткой морфологии, о которых пойдет речь в настоящей работе, ориентированы на решение задач анализа сцен по их изображениям в ситуациях, когда форма изображения представленных на сцене объектов не может быть четко определена. При этом предполагается, что условия регистрации, при которых получено изображение сцены, неизвестны. Для моделирования нечеткости в настоящей работе используется аппарат теории возможностей [6].

1. Мера возможности

В работе [6] теория возможностей и мера возможности рассмотрены как альтернатива теории вероятностей и вероятности при моделировании неясности и неопределенности, отражающих неполноту знаний исследователя об объекте исследования. В частности, теория возможностей может быть применена для моделирования стохастического объекта, т. е. такого объекта, моделью которого в каждом испытании является некоторое вероятностное пространство, вообще говоря, изменяющееся от испытания к испытанию.

Пусть \mathcal{Y} — множество элементарных событий, и $\mathcal{P}(\mathcal{Y})$ — σ -алгебра¹ всех подмножеств множества \mathcal{Y} .

Определение 1 (см. [6]). *Возможностью*, определенной на измеримом пространстве $(\mathcal{Y}, \mathcal{P}(\mathcal{Y}))$, будем называть всякую функцию $P(\cdot): \mathcal{P}(\mathcal{Y}) \rightarrow [0, 1]$, обладающую свойствами счетной аддитивности относительно операции «sup»: $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sup_{i=1,2,\dots} P(A_i)$, полунепре-

рывности снизу: $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_i\right) \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} P(A_i)$, $A_i \in \mathcal{P}(\mathcal{Y})$, $i = 1, 2, \dots$, и нормированную на 1: $P(\mathcal{Y}) = 1$.

Тройку $(\mathcal{Y}, \mathcal{P}(\mathcal{Y}), P)$ будем называть *пространством с возможностью*. Эксперимент, моделью которого является пространство с возможностью, будем называть *нечетким*.

¹Здесь и далее запись вида $\mathcal{P}(A)$ обозначает σ -алгебру всех подмножеств множества A .

Заметим, что возможность, в отличие от вероятности, всегда может быть определена на σ -алгебре всех подмножеств множества элементарных событий.

Рассмотрим проблему моделирования стохастического объекта теоретико-возможностными методами. Дадим в этой связи следующие определения.

Определение 2 (см. [6]). Будем говорить, что возможность P согласована с вероятностью Pg на σ -алгебре $\tilde{\mathfrak{A}}$, если существует такая функция $\varphi(\cdot) \in \Phi$, что $P(A) = \varphi(Pg(A))$, $A \in \tilde{\mathfrak{A}}$. Здесь Φ — класс всех монотонно неубывающих функций $\varphi(\cdot): [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Возможность P в этом случае будем называть *стохастически измеримой*.

Определение 3 (см. [6]). Будем говорить, что возможность P *максимально согласована* с вероятностью Pg на σ -алгебре $\tilde{\mathfrak{A}}$, если она согласована с Pg на $\tilde{\mathfrak{A}}$, и для любой возможности P' , согласованной с Pg на $\tilde{\mathfrak{A}}$, найдется такая функция $\varphi'(\cdot) \in \Phi$, что $P'(A) = \varphi'(P(A))$, $A \in \tilde{\mathfrak{A}}$.

Пусть в l -м эксперименте в серии статистически независимых в совокупности экспериментов моделью стохастического объекта является вероятностное пространство $(\mathcal{V}, \mathfrak{A}, Pg^l)$, $l = 1, 2, \dots$. Пусть, кроме того, каждая вероятность Pg^l , $l = 1, 2, \dots$, содержится в классе вероятностей $\mathbb{P}g_{\tilde{\mathfrak{A}}}(\mathcal{P})$, с которыми на σ -алгебре $\tilde{\mathfrak{A}}$ максимально согласована возможность P (как показано в [6], класс $\mathbb{P}g_{\tilde{\mathfrak{A}}}(\mathcal{P})$ состоит, вообще говоря, не из единственной вероятности).

Возможностной моделью такого стохастического объекта разумно считать пространство с возможностью $(\mathcal{V}, \mathcal{P}(\mathcal{V}), P)$. При этом для любых событий $A_1, A_2 \in \tilde{\mathfrak{A}}$, отвечающих условию $P(A_1) > P(A_2)$, в достаточно длинной серии испытаний почти наверное частота A_1 больше, чем частота A_2 , что определяет эмпирическое истолкование возможности: чем больше возможность события, тем чаще оно происходит [6].

Заметим, что в случае, когда про возможность P и вероятности Pg^l , $l = 1, 2, \dots$, априори ничего не известно, такой стохастический объект не может быть смоделирован теоретико-вероятностными методами. Действительно, в такой ситуации на основе результатов первых L экспериментов невозможно ничего сказать о вероятностях Pg^l при $l = L+1, L+2, \dots$, как бы велико ни было L . Возможность же P , одинаковая для всех $l = 1, 2, \dots$, при достаточно общих условиях почти наверное может быть точно определена на основе конечной серии испытаний [6].

Таким образом, существуют стохастические объекты, которые могут быть смоделированы теоретико-возможностными методами, однако не могут быть смоделированы теоретико-вероятностными. В настоящей статье внимание будет уделено именно таким объектам.

2. Классификация изображений в нечеткой морфологии

Пусть $\mathbf{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$ — конечное подмножество координатной плоскости, которое в дальнейшем будем называть полем зрения, и \mathcal{R} — евклидово пространство размерности n . Пусть в пространстве \mathcal{R} определен

и фиксирован ортонормированный базис $\{e_1, \dots, e_n\}$. Математической моделью черно-белых (полутоновых) изображений будем считать элементы пространства \mathcal{R} , координаты которых в базисе $\{e_1, \dots, e_n\}$ будем интерпретировать как яркости соответствующих изображений в точках x_1, \dots, x_n поля зрения \mathbf{X} .

Зададим класс $\mathbb{G} = \{\gamma: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}\}$ преобразований пространства \mathcal{R} , содержащий тождественное преобразование и являющийся полугруппой относительно композиции преобразований.

Определение 4 (см. [3]). *Формой изображения* $f \in \mathcal{R}$ будем называть множество $V_f = \{\gamma \circ f \mid \gamma \in \mathbb{G}\} \subset \mathcal{R}$.

В морфологическом анализе изображений [3] класс \mathbb{G} определяют так, чтобы форма V_f любого изображения $f \in \mathcal{R}$ содержала изображения той же сцены, что и f , но полученные, возможно, при других условиях регистрации. Обозначим $\mathbb{V} \stackrel{\text{def}}{=} \{V_f \mid f \in \mathcal{R}\}$ множество всех форм.

Определение 5 (см. [4]). *Нечеткой формой изображения* будем называть пространство с возможностью $(\mathbb{V}, \mathcal{P}(\mathbb{V}), P)$.

Процесс регистрации изображения, моделью которого является нечеткая форма $(\mathbb{V}, \mathcal{P}(\mathbb{V}), P)$, состоит из двух этапов [7]. На 1-м этапе в результате нечеткого эксперимента, моделью которого является пространство с возможностью $(\mathbb{V}, \mathcal{P}(\mathbb{V}), P)$, из \mathbb{V} выбирается форма V . На 2-м этапе из формы V выбирается предъявляемое изображение $f \in \mathcal{R}$.

Пусть на $\mathcal{P}(\mathbb{V} \times \mathcal{R}) \times \mathcal{D}$ задана переходная возможность $P^*(\cdot \mid \cdot)$, распределение которой [6] обозначим $p^*(\cdot, \cdot \mid \cdot): \mathbb{V} \times \mathcal{R} \times \mathcal{D} \rightarrow [0, 1]$, где $\mathcal{D} = \{1, \dots, N\}$. Определим возможности $P_i: \mathcal{P}(\mathbb{V}) \rightarrow [0, 1]$ и $P_{(\nu)}: \mathcal{P}(\mathcal{R}) \rightarrow [0, 1]$ следующим образом:

$$\begin{aligned} P_i(A) &= P^*(A \times \mathcal{R} \mid i), \quad A \in \mathcal{P}(\mathbb{V}), \\ P_{(\nu)}(B) &= P^*(\mathbb{V} \times B \mid i), \quad B \in \mathcal{P}(\mathcal{R}), \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

задав таким образом N нечетких форм $(\mathbb{V}, \mathcal{P}(\mathbb{V}), P_i)$. Потребуем, чтобы возможность $P_{(\nu)}$ не зависела от i . Обозначим Λ множество всех отображений $\lambda: \mathbb{V} \rightarrow \mathcal{R}$, ставящих в соответствие каждой форме $V \in \mathbb{V}$ изображение $\lambda_V \in \mathcal{R}$.

Пусть предъявляемые изображения регистрируются по схеме

$$\xi = \lambda_V + \nu, \tag{1}$$

где пара (\mathcal{V}, ν) является каноническим нечетким элементом пространства с возможностью $(\mathbb{V} \times \mathcal{R}, \mathcal{P}(\mathbb{V} \times \mathcal{R}), P^*(\cdot \mid i))$ при некоторых (неизвестных) $i \in \mathcal{D}$, $\lambda \in \Lambda$. Требуется по реализации $g \in \mathcal{R}$ нечеткого элемента ξ определить неизвестный номер i .

При заданном $i \in \mathcal{D}$ схема (1) представляет собой модель регистрации изображений, имеющих нечеткую форму $(\mathbb{V}, \mathcal{P}(\mathbb{V}), P_i)$, полученных при неизвестных условиях регистрации, которые моделируются неизвестным отображением $\lambda \in \Lambda$, и искаженное нечетким аддитивным шумом ν . Слагаемое λ_V в (1) представляет собой изображение, имеющее нечеткую форму $(\mathbb{V}, \mathcal{P}(\mathbb{V}), P_i)$ [7].

Будем считать, что на $\mathcal{P}(\mathcal{D} \times \Lambda)$ задана априорная возможность Q , распределение которой обозначим $q(\cdot, \cdot): \mathcal{D} \times \Lambda \rightarrow [0, 1]$. Номер $i \in \mathcal{D}$ и отображение

$\lambda \in \Lambda$ в схеме (1) будем считать результатом нечеткого эксперимента, модель которого суть пространство с возможностью $(\mathcal{D} \times \Lambda, \mathcal{P}(\mathcal{D} \times \Lambda), Q)$.

Определим переходную возможность $P^{\xi|\eta, \lambda}(\cdot|\cdot, \cdot): \mathcal{P}(\mathcal{R}) \times \mathcal{D} \times \Lambda \rightarrow [0, 1]$ и возможность $P^{\xi, \eta}: \mathcal{P}(\mathcal{R} \times \mathcal{D}) \rightarrow [0, 1]$ следующим образом:

$$P^{\xi|\eta, \lambda}(B|i, \lambda) = P^*(\{(V, g - \lambda_V) | V \in \mathbb{V}, g \in B\} | i),$$

$$B \in \mathcal{P}(\mathcal{R}), i \in \mathcal{D}, \lambda \in \Lambda,$$

$$P^{\xi, \eta}(B \times D) = \max_{i \in \mathcal{D}} \sup_{\lambda \in \Lambda} \min(P^{\xi|\eta, \lambda}(B|i, \lambda), q(i, \lambda)),$$

$$B \in \mathcal{P}(\mathcal{R}), D \in \mathcal{P}(\mathcal{D}).$$

Обозначим $p^{\xi, \eta}(\cdot, \cdot): \mathcal{R} \times \mathcal{D} \rightarrow [0, 1]$ распределение возможности $P^{\xi, \eta}$.

Согласно схеме (1), при заданных $i \in \mathcal{D}$ и $\lambda \in \Lambda$ нечеткий элемент ξ является каноническим для пространства с возможностью $(\mathcal{R}, \mathcal{P}(\mathcal{R}), P^{\xi|\eta, \lambda}(\cdot|i, \lambda))$. В связи с этим задачу классификации изображений будем рассматривать как многоальтернативную байесовскую задачу проверки гипотез, в которой i -я гипотеза состоит в том, что предъявляемое изображение получено в результате нечеткого эксперимента, моделью которого является пространство с возможностью $(\mathcal{R}, \mathcal{P}(\mathcal{R}), P^{\xi|\eta, \lambda}(\cdot|i, \lambda))$.

Определим функцию $pl(\cdot, \cdot): \mathcal{D} \times \mathcal{D} \rightarrow [0, 1]$, значение $pl(i, j)$ которой будем интерпретировать как возможность потерь, которые могут возникнуть в ситуации, когда верна j -я гипотеза, но решение принято в пользу i -й. В описанной задаче проверки гипотез будем использовать четкое [6] решающее правило, в соответствии с которым при предъявлении изображения $g \in \mathcal{R}$ решение следует принять в пользу гипотезы с номером $\hat{i}(g) \in I(g)$, где

$$I(g) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ i = 1, \dots, N: \alpha_i(g) = \min_{j=1, \dots, N} \alpha_j(g) \right\},$$

$$\alpha_i(g) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{j \in \mathcal{D}} \min(pl(i, j), p^{\xi, \eta}(g, j)), \quad i = 1, \dots, N.$$

Как показано в [7], при использовании такого решающего правила возможность потерь равна $\sup_{g \in \mathcal{R}} \alpha_{\hat{i}(g)}(g)$

и не зависит от выбора $\hat{i}(g)$ из $I(g)$, причем для любого другого четкого или фазифицированного [6] решающего правила возможность потерь оказывается не меньше. То есть предложенное правило оптимально с точки зрения минимизации возможности потерь.

3. Эмпирическое построение решающего правила

Как было показано в начале статьи, существуют стохастические объекты, которые не могут быть смоделированы теоретико-вероятностными методами, однако могут быть смоделированы теоретико-возможностными. В настоящем пункте рассмотрим ситуацию, когда пара (\mathcal{V}, ν) в (1) является случайным элементом, стохастическая модель которого неизвестна и непредсказуемо изменяется от испытания к испытанию, в связи с чем не может быть построена эмпирически, в то время как соответствующая ей в смысле определения 3 возможностная модель остается неизменной. Рассмотрим, как в этом случае может быть решена задача классифи-

кации изображений методами, описанными в предыдущем пункте. При этом будет предложен алгоритм, позволяющий для любого предъявленного изображения $g \in \mathcal{R}$ эмпирически построить подмножество множества $I(g)$, а значит, и классифицировать предъявленное изображение g так, чтобы возможность ошибки была минимальна.

Для простоты предположим, что $q(i, \lambda) = 1$, $i \in \mathcal{D}$, $\lambda \in \Lambda$, и $pl(i, j) = 0$ при $i = j$, $pl(i, j) = 1$ при $i \neq j$, $i, j \in \mathcal{D}$. Это позволит упростить выкладки, но при этом в полной мере продемонстрировать идею предлагаемого метода.

Итак, пусть на множестве \mathbb{V} определена метрика $\rho_{\mathbb{V}}$. Пусть, кроме того, на измеримом пространстве $(\mathbb{V}, \mathfrak{A}_{\mathbb{V}})$, где $\mathfrak{A}_{\mathbb{V}}$ — σ -алгебра подмножеств множества \mathbb{V} , содержащая все замкнутые шары, определены мера $\mu_{\mathbb{V}}$ и неизменные вероятности $\text{Pr}_i^{(u_i)}$, $u_i = 1, \dots, U_i$, $i = 1, \dots, N$, абсолютно непрерывные относительно $\mu_{\mathbb{V}}$, где U_i — некоторые натуральные числа. Таким образом, для каждого $i = 1, \dots, N$ имеем U_i вероятностей: $\text{Pr}_i^{(1)}, \dots, \text{Pr}_i^{(U_i)}$. Пусть также на измеримом пространстве $(\mathcal{R}, \mathfrak{B})$, где \mathfrak{B} — σ -алгебра всех борелевских подмножеств в пространстве \mathcal{R} , определена неизвестная вероятность Pr_{N+1} , абсолютно непрерывная относительно меры Лебега $\mu_{\mathcal{R}}$.

Рассмотрим ситуацию, когда при верной i -й гипотезе в схеме (1) случайные элементы \mathcal{V} и ν статистически независимы и контролируются вероятностями $\text{Pr}_i^{(u_i)}$ и Pr_{N+1} соответственно, причем от испытания к испытанию номера u_i могут непредсказуемо изменяться в пределах множеств $\{1, \dots, U_i\}$.

Пусть $\mathcal{Y} = \mathbb{V}^N \times \mathcal{R}$, и \mathfrak{A} — σ -алгебра подмножеств множества \mathcal{Y} , содержащая все подмножества вида $A_1 \times \dots \times A_N \times B$, $A_i \in \mathfrak{A}_{\mathbb{V}}$, $i = 1, \dots, N$, $B \in \mathfrak{B}$. Обозначим $\text{pr}_i^{(u_i)}(\cdot): \mathbb{V} \rightarrow [0, \infty)$ и $\text{pr}_{N+1}(\cdot): \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty)$ плотности распределений $\text{Pr}_i^{(u_i)}$ и Pr_{N+1} соответственно. Обозначим $\text{Pr}^{(u_1, \dots, u_N)}$ произведение вероятностей $\text{Pr}_1^{(u_1)} \times \dots \times \text{Pr}_N^{(u_N)} \times \text{Pr}_{N+1}$, определенное на \mathfrak{A} , а плотность распределения $\text{Pr}^{(u_1, \dots, u_N)}$ обозначим $\text{pr}^{(u_1, \dots, u_N)}(\cdot): \mathcal{Y} \rightarrow [0, \infty)$, $u_i = 1, \dots, U_i$, $i = 1, \dots, N$.

Потребуем, чтобы

$$\text{pr}_{N+1}(x) = f(\|x\|), \quad x \in \mathcal{R}, \quad (2)$$

$$\text{pr}^{(u_1, \dots, u_N)}(y) = \hat{f}^{(u_1, \dots, u_N)}(\omega(y)), \quad (3)$$

$$u_i = 1, \dots, U_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

где $f(\cdot): [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ — строго монотонно убывающая функция, $\hat{f}^{(u_1, \dots, u_N)}(\cdot): [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ — строго монотонно возрастающие функции, $\omega(\cdot): \mathcal{Y} \rightarrow [0, 1]$.

Пусть существуют, но не известны априори множества (гранулы) $\mathcal{Y}_k \in \mathfrak{A}$, $k = 1, \dots, K$, образующие разбиение множества \mathcal{Y} и удовлетворяющие для всякой комбинации номеров $u_i = 1, \dots, U_i$, $i = 1, \dots, N$, условиям

$$\sum_{k'=1}^k \text{Pr}^{(u_1, \dots, u_N)}(\mathcal{Y}_{k'}) + 2 \text{Pr}^{(u_1, \dots, u_N)}(\mathcal{Y}_k) = 1 + a_k, \quad (4)$$

$$k = 1, \dots, K-1,$$

$$\text{pr}^{(u_1, \dots, u_N)}(y) \geq \text{pr}^{(u_1, \dots, u_N)}(y'), \quad (5)$$

$$y \in \mathcal{Y}_k, \quad y' \in \mathcal{Y}_{k+1}, \quad k = 1, \dots, K-1,$$

где a_k — некоторые положительные константы. В этом случае всякая вероятность $\text{Pr}^{(u_1, \dots, u_N)}$ принадлежит классу $\mathbb{P}\text{r}_{\sigma(\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_K)}(\mathbb{P})$ вероятностей, максимально согласованных с возможностью \mathbb{P} , удовлетворяющей условию $1 = \mathbb{P}(\mathcal{Y}_1) > \mathbb{P}(\mathcal{Y}_2) > \dots > \mathbb{P}(\mathcal{Y}_K)$, на алгебре $\sigma(\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_K)$, порожденной разбиением \mathcal{Y} на гранулы $\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_K$ [6]. Распределение возможности \mathbb{P} обозначим $p(\cdot): \mathcal{Y} \rightarrow [0, 1]$.

Таким образом, возможностьная модель в задаче классификации изображений, определяемая возможностью \mathbb{P} , полагается фиксированной, в то время как вероятностная модель может непредсказуемо изменяться в определенных выше пределах от испытания к испытанию.

В связи с тем, что возможность \mathbb{P} полагается неизвестной, рассмотрим метод эмпирического построения решающего правила в задаче классификации изображений. Итак, проведем серию из $(N+1) \times L$ статистически независимых в совокупности экспериментов, в результате чего получим $N+1$ выборки объема L , которые в дальнейшем будем называть обучающей последовательностью:

$$\begin{aligned} \text{выборка из } \text{Pr}_i^{(u_i)}: & V_i^1, V_i^2, \dots, V_i^L, \quad i = 1, \dots, N, \\ \text{выборка из } \text{Pr}_{N+1}: & x^1, x^2, \dots, x^L. \end{aligned} \quad (6)$$

При этом в серии экспериментов, соответствующей i -й выборке в (6), номер u_i от эксперимента к эксперименту может произвольным образом изменяться в пределах множества $\{1, \dots, U_i\}$, $i = 1, \dots, N$.

Пусть $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots\}$ и $\{r_1, r_2, \dots\}$ — последовательности положительных чисел, каждая форма $V \in \mathbb{V}$ является линейным подпространством в \mathcal{R} . Обозначим $O_r(V)$ замкнутый шар радиуса $r \geq 0$ с центром $V \in \mathbb{V}$. Пусть

$$\begin{aligned} \underline{m}_i(r) \leq m_i(r) = \mu_{\mathbb{V}}(O_r(V)) \leq \bar{m}_i(r), \\ V \in \mathbb{V}, \quad i = 1, \dots, N, \quad r > 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Обозначим I тождественный оператор в \mathcal{R} , а $\Pi_V: \mathcal{R} \rightarrow V$ — ортогональный проектор на форму $V \in \mathbb{V}$.

При предъявлении изображения $g \in \mathcal{R}$ построим множества $\tilde{I}^{(L)}(g) \subset \mathcal{D}$ согласно следующему алгоритму.

[1]. Определим номера $l_L(t, i)$, $t = 1, \dots, L^{N+1}$, $i = 1, \dots, N+1$, согласно условиям

$$\bigcup_{t=1}^{L^{N+1}} \{(l_L(t, 1), \dots, l_L(t, N+1))\} = \{1, \dots, L\}^{N+1}, \\ \nu_L(1) \geq \dots \geq \nu_L(L^{N+1}),$$

где

$$\nu_L(t) \stackrel{\text{def}}{=} \text{pr}_{N+1}(x^{l_L(t, N+1)}) \prod_{i=1}^N \nu_i^{(L)}(O_{r_L}(V_i^{l_L(t, i)})).$$

Здесь $\nu_i^{(L)}(A)$ — частота попадания элементов i -й выборки в обучающей последовательности (6) в множество A , $i = 1, \dots, N$.

[2]. Определим индексы $\underline{t}_k^{(L)}$ и $\bar{t}_k^{(L)}$, $k = 1, \dots, K$, следующим образом:

$$\underline{t}_1^{(L)} = 1, \quad \bar{t}_K^{(L)} = L^{N+1},$$

$$\underline{t}_k^{(L)} = \min \left\{ t \left| \nu_L(t) < \nu_L([L^{N+1} b_{k-1}]) - \varepsilon_L - r_L \prod_{i=1}^N \bar{m}_i(r_L) \right. \right\}, \\ k = 2, \dots, K$$

$$\bar{t}_k^{(L)} = \max \left\{ t \left| \nu_L(t) > \nu_L([L^{N+1} b_k]) + \varepsilon_L + r_L \prod_{i=1}^N \bar{m}_i(r_L) \right. \right\}, \\ k = 1, \dots, K-1,$$

где $b_k = \sum_{k'=1}^k c_k$, $c_k = \left(1 + a_k - \sum_{k'=1}^{k-1} c_{k'}\right) / 2$, $k = 1, \dots, K-1$, и квадратными скобками обозначена операция округления до ближайшего снизу целого числа. В случае, если для некоторого k множество под знаком «max» («min») пусто, положим $\underline{t}_k^{(L)} = L^{N+1} + 1$ ($\bar{t}_k^{(L)} = 0$).

[3]. Определим функцию $\tilde{p}^{(L)}(\cdot): \{1, \dots, L\}^{N+1} \rightarrow [0, 1]$: $\tilde{p}^{(L)}(l_L(t, 1), \dots, l_L(t, N+1)) =$

$$= \begin{cases} 2^{1-k}, & \underline{t}_k^{(L)} \leq t \leq \bar{t}_k^{(L)}, \quad k = 1, \dots, K, \\ 0, & t \notin \bigcup_{k=1}^K \{\underline{t}_k^{(L)}, \underline{t}_k^{(L)} + 1, \dots, \bar{t}_k^{(L)}\}. \end{cases}$$

[4]. Для каждого $g \in \mathcal{R}$ определим величины $\tilde{\alpha}_i^{(L)}(g)$ следующим образом:

$$\tilde{\alpha}_i^{(L)}(g) = \max_{l_1=1, \dots, L} \dots \max_{l_N=1, \dots, L} \tilde{p}^{(L)}(l_1, \dots, l_N, \tilde{l}_i^{(L)}(g, l_i)), \\ i = 1, \dots, N,$$

где номера $\tilde{l}_i^{(L)}(g, l)$, $i = 1, \dots, N$, $l = 1, \dots, L$, $g \in \mathcal{R}$, определяются из условия

$$\| (I - \Pi_{V_i'}) g \| - \| x^{\tilde{l}_i^{(L)}(g, l)} \| = \min_{l'=1, \dots, L} \| (I - \Pi_{V_i'}) g \| - \| x^{l'} \|.$$

[5]. Положим, наконец, $\tilde{I}^{(L)}(g) = \{i = 1, \dots, N: \tilde{\alpha}_i^{(L)}(g) = \min_{j=1, \dots, N} \tilde{\alpha}_j^{(L)}(g)\}$.

Можно показать, что при определенных условиях для всякого $g \in \mathcal{R}$ почти наверное $\tilde{I}^{(L)}(g) \subset I(g)$ при достаточно больших L . А именно верна следующая теорема.

Теорема. Пусть мера $\mu_{\mathbb{V}}$ и метрика $\rho_{\mathbb{V}}$ удовлетворяют условию (7), вероятности $\text{Pr}_i^{(u_i)}$, Pr_{N+1} и измеримое разбиение $\mathcal{Y} = \bigcup_{k=1}^K \mathcal{Y}_k$ — услови-

ям (2)–(5), и $|\text{pr}_i^{(u_i)}(V) - \text{pr}_i^{(u_i)}(V')| \leq C \rho_{\mathbb{V}}(V, V')$, $\text{pr}_i^{(u_i)}(V) \leq C$, $\text{pr}_{N+1}(z) \leq C$, $V, V' \in \mathbb{V}$, $z \in [0, \infty)$, $u_i = 1, \dots, U_i$, $i = 1, \dots, N$. Пусть вероятность того, что $\text{pr}^{(u_1, \dots, u_N)}(y) \in [c - \delta, c + \delta]$ стремится к 0 при $\delta \rightarrow 0$ равномерно по c , $u_i = 1, \dots, U_i$, $i = 1, \dots, N$. Пусть при каждом $g \in \mathcal{R}$ функция $\Pi_V g$ аргумента V непрерывна.

Пусть $\varepsilon_L = \varepsilon_0 / L^{1/2-b}$, $0 < b < 1/2$, где ε_0 — положительная константа, $r_L \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0$ и

$$\varepsilon_L / \left(r_L^n \prod_{i=1}^N \bar{m}_i(r_L) \right) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0.$$

Тогда для всякого $g \in \mathcal{R}$ почти наверное найдется такой номер $L(g)$, что $\tilde{I}^{(L)}(g) \subset I(g)$ при любом $L > L(g)$.

4. Приближенное эмпирическое построение решающего правила

Алгоритм, предложенный в предыдущем пункте, требует упорядочения массива размером L^{N+1} чисел, что уже при $N = 10$, $L = 25$ отнимет несколько лет при использовании современных ЭВМ. В связи с этим в настоящем пункте будет рассмотрен существенно более быстрый алгоритм, являющийся приближенной версией алгоритма, предложенного выше.

Итак, построим $N + 1$ разбиений (вообще говоря, разных) множества $\{1, \dots, L\}$ на R частей: $\{1, \dots, L\} = \bigcup_{r=1}^R L_r^i$, выбрав из каждой части по одному элементу: $h_i^r \in L_r^i$, $r = 1, \dots, R$, $i = 1, \dots, N+1$. Далее определим функции $\tilde{p}^{(R)}(\cdot)$ согласно пунктам [1]–[3], используя вместо (6) выборки $V_i^{h_i^1}, \dots, V_i^{h_i^R}$, $i = 1, \dots, N$, и $x^{h_{N+1}^1}, \dots, x^{h_{N+1}^R}$ объема R . При этом будем использовать ε_L и r_L вместо ε_R и r_R и частоты $\nu_i^{(L)}(\cdot)$, построенные на основе (6), вместо $\nu_i^{(R)}(\cdot)$, $i = 1, \dots, N+1$. Функции $\bar{p}(\cdot): \{1, \dots, L\}^{N+1} \rightarrow [0, 1]$ определим следующим образом:

$$\bar{p}(l_1, \dots, l_{N+1}) = \tilde{p}^{(R)}(h_1^{r_1}, \dots, h_{N+1}^{r_{N+1}}),$$

$$l_i \in L_r^i, \quad i = 1, \dots, N + 1.$$

Множества $\tilde{I}^{(L)}(g)$, $g \in \mathcal{R}$, определим согласно пунктам [4], [5], однако используя $\bar{p}(\cdot)$ вместо $\tilde{p}^{(L)}(\cdot)$.

При $R = L$ алгоритмы, предложенные в настоящем и предыдущем пунктах, совпадают. При $R < L$ функция $\bar{p}(\cdot)$ приближает функцию $\tilde{p}^{(L)}(\cdot)$ [7], что позволяет считать предложенный в настоящем пункте алгоритм приближенной версией алгоритма [1]–[5]. Однако первый требует упорядочения массива размером R^{N+1} чисел вместо L^{N+1} для алгоритма [1]–[5], что дает существенный выигрыш в скорости вычислений.

5. Вычислительный эксперимент

В проведенном вычислительном эксперименте поле зрения \mathbf{X} имело размер 50×50 пикселей. Нечеткие формы (V, \mathcal{A}, P_i) , $i = 1, 2, 3$, соответствовали рукописным цифрам «0», «3» и «6». Для получения обучающей и тестовой последовательностей использовалась программа, генерирующая незашумленные изображения рукописных цифр со случайным начертанием. Тестовая последовательность содержала по 1000 изображений каждой из цифр, искаженных случайным аддитивным шумом, имеющим плотность распределения $\text{pr}_{N+1}(x) = A / (\|x\| / 20)^{250}$ при $\|x\| \leq 20$ и 0 в остальных случаях, $x \in \mathcal{R}$. Здесь A — нормировочная константа, определенная условием $\int_{\mathcal{R}} \text{pr}_{N+1}(x) d\mu_{\mathcal{R}}(x) = 1$. Примеры

изображений из тестовой последовательности приведены на рис. 1. Для определения множеств $\tilde{I}^{(L)}(g)$, $g \in \mathcal{R}$, использовался алгоритм приближенного эмпирического построения решающего правила, значение параметра R было выбрано равным 100.

В случае, когда теоретико-вероятностная модель не изменяется в процессе получения обучающей и тестовой последовательностей, рассматриваемая задача классификации изображений может быть поставлена как

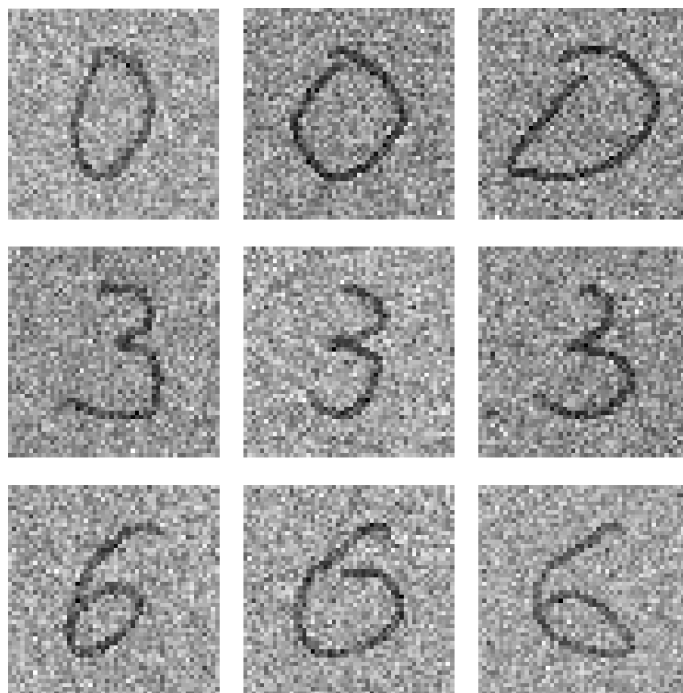


Рис. 1. Примеры изображений из тестовой последовательности

минимаксная теоретико-вероятностная задача проверки статистических гипотез, решением которой является теоретико-вероятностное правило, минимизирующее максимальную по номеру гипотезы $i = 1, \dots, N$ вероятность потерь. Можно показать [6], что всякое теоретико-вероятностное правило минимизирует возможность потерь, т.е. является также и теоретико-возможностным. При этом обратное, вообще говоря, неверно.

Были проведены две серии экспериментов. В ходе 1-й серии теоретико-вероятностная модель оставалась неизменной (рис. 2, а), в ходе 2-ой серии — изменялась (рис. 2, б, в). В обоих случаях было проведено сравнение теоретико-возможностного правила с теоретико-вероятностным. При этом за показатель качества была принята максимальная по $i = 1, \dots, N$ частота ошибочных решений при классификации изображений из тестовой последовательности, т.е. тот параметр, по которому теоретико-вероятностное правило является оптимальным при достаточно большой длине тестовой последовательности.

На рис. 2, а показаны зависимости максимальной по $i = 1, \dots, N$ частоты ошибочных решений от длины L обучающей последовательности. Теоретико-вероятностная модель в ходе испытаний оставалась неизменной. Как и следовало ожидать, частота ошибок для возможностного правила выше, чем для теоретико-вероятностного. При этом с увеличением L частота ошибок уменьшается для обоих правил.

При получении результатов, представленных на рис. 2, б, в, обучающая и тестовая последовательности состояли из цифр, имеющих два разных типа начертания. Доля каждого типа в обучающей последовательности составляла 0.5, а в тестовой последовательности изменялась от 0 до 1. На рис. 2, б показана зависимость максимальной частоты ошибок

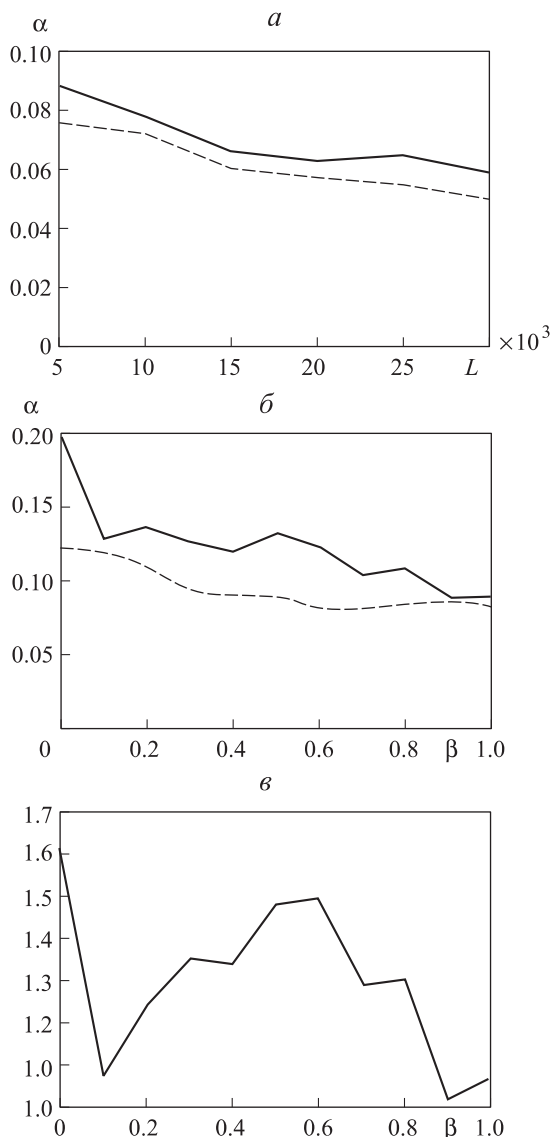


Рис. 2. Результаты вычислительного эксперимента. На *a* и *б* сплошной линией отмечены зависимости для теоретико-возможностного решающего правила, пунктирной — для теоретико-вероятностного

от доли β цифр 1-го типа в тестовой последовательности для двух рассматриваемых решающих правил, а на рис. 2, *в* — их отношение. Как видно, при β , близких к 0.5, наблюдается существенное превосходство теоретико-вероятностного правила над возможностным. Если же теоретико-вероятностные модели при обучении и тестировании различаются ($\beta \neq 0.5$), но возможностные модели совпадают (величина $|\beta - 0.5|$ не слишком велика), качества обоих правил могут практически сравниться.

Заключение

Разработан адаптивный алгоритм классификации изображений, имеющих нечеткую форму. Алгоритм может быть использован в ситуациях, когда теоретико-вероятностная модель классификации неизвестна априори и непредсказуемо изменяется в процессе обучения и/или классификации. Вычислительный эксперимент продемонстрировал эффективность алгоритма в задаче классификации изображений рукописных цифр.

Автор выражает благодарность профессору Ю.П. Пытьеву за плодотворное обсуждение результатов, представленных в настоящей статье.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 11-07-00338-а, 11-07-00722-а).

Список литературы

1. Куличков С.Н., Чуличков А.И., Демин Д.С. // Морфологический анализ инфразвуковых сигналов в акустике. М., 2010.
2. Пытьев Ю.П. // Математические методы исследования природных ресурсов Земли из космоса. М., 1984.
3. Пытьев Ю.П. // ДАН СССР. 1983. **269**, № 5. С. 1061.
4. Пытьев Ю.П., Зубюк А.В. // Мат-лы IX Междунар. конф. «Интеллектуальные системы и компьютерные науки». 2006. Т. 1. Ч. 2. С. 222.
5. Пытьев Ю.П., Чуличков А.И. // Методы морфологического анализа изображений. М., 2010.
6. Пытьев Ю.П. // Возможность как альтернатива вероятности. Математические и эмпирические основы, применение. М., 2007.
7. Зубюк А.В. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2012. № 6. С. 47.

Image classification in fuzzy morphology: empirical reconstruction of decision rule algorithm

A. V. Zubjuk

Department of Computer Methods in Physics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.

E-mail: zubjuk@physics.msu.ru.

The algorithm for empirical reconstruction of decision rule used for possibility-theoretic image classification is developed and widely tested in numerical experiment. The algorithm can be used for acoustic signal analysis in geophysics [1], satellite images interpretation [2], etc.

Keywords: morphological image analysis, fuzzy morphology, possibility theory, numerical algorithms.

PACS: 02.50.Le, 02.50.Tt.

Received 29 June 2012.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 1(2013).

Сведения об авторе

Зубюк Андрей Владимирович — мл. науч. сотрудник; тел.: (495) 939-46-94, e-mail: zubjuk@physics.msu.ru.