Автокорреляционные функции в обобщенной модели Больцмана–Энскога

Н. Г. Иноземцева[1,a], И. И. Масленников[2,b], Б. И. Садовников[2]

[1] *Университет «Дубна». Россия, 141980, Московская область, Дубна, Университетская ул., д. 19.*
[2] *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра квантовой статистики и теории поля. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.*
E-mail: [a] *nginozv@mail.ru,* [b] *ilyamaslennikov@mail.ru*

Статья поступила 18.09.2012, подписана в печать 28.09.2012.

Цель работы состоит в исследовании асимптотических свойств временных автокорреляционных функций для нелинейной обобщенной модели Больцмана–Энскога, содержащей дальнодействующую компоненту взаимодействия между частицами. На основе анализа нелинейных особенностей кинетического уравнения Больцмана–Энскога непосредственно выявляется роль нелинейных эффектов при приближении к состоянию равновесия. Показано, что автокорреляционные функции обладают степенной асимптотикой $t^{-3/2}$, а эффекты, связанные с «включением» дальнодействующей компоненты, приводят к изменению коэффициента при $t^{-3/2}$. Полученные результаты устанавливают замкнутое выражение для определения коэффициентов в асимптотическом разложении автокорреляционных функций скорости и термодиффузии.

Ключевые слова: модель Больцмана–Энскога, кинетические уравнения, автокорреляционные функции.
УДК: 533.7. PACS: 51.10.+y; 05.20.–y; 05.20.Dd.

Введение

Проблема изучения асимптотического поведения временных автокорреляционных функций рассматривалась в рамках различных подходов к описанию явлений переноса. Один из них, основанный на последовательной схеме кластерных разложений в цепочке ББГКИ [1–3], позволил связать воедино «аномальные» явления в классической статистической механике твердых сфер, а также учесть эффекты высших порядков по плотности в системе. Достоинством другого подхода, основанного на анализе нелинейных особенностей кинетических уравнений типа уравнений Больцмана [4, 5] либо Больцмана–Энскога, является возможность непосредственного выделения роли нелинейных эффектов при приближении статистических систем к состоянию равновесия. Следует отметить, что интерес к одночастичным кинетическим уравнениям при описании эффектов высшего порядка по плотности был в значительной степени стимулирован работой Н. Н. Боголюбова [6], впервые установившего и строго доказавшего существование точных микроскопических решений для этого класса уравнений.

В настоящей работе проведено исследование асимптотических свойств временных автокорреляционных функций для нелинейной обобщенной модели Больцмана–Энскога, содержащей дальнодействующую компоненту взаимодействия между частицами.

Как было показано в работе [6], эта модель обладает точными микроскопическими решениями и может быть использована для изучения высших приближений по плотности. Отметим, что модель рассматривалась ранее в работе [7], где были определены поправки к скорости звука с учетом дальнодействия в системе, а также собственные функции линеаризованного оператора Больцмана–Энскога с дальнодействующей компонентой. Здесь мы покажем, как, исходя из результатов работы [7], найти замкнутое выражение для определения коэффициентов в асимптотическом разложении автокорреляционных функций скорости и термодиффузии.

1. Автокорреляционные функции в обобщенной модели Больцмана–Энскога с дальнодействующей компонентой

Кинетическое уравнение модели может быть записано в виде

$$\frac{\partial f(t,\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})}{\partial t}+\boldsymbol{v}\frac{\partial f(t,\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})}{\partial \boldsymbol{r}}=na^2\int\limits_{(\boldsymbol{v}'-\boldsymbol{v})\boldsymbol{\sigma}\geqslant 0}\left[(\boldsymbol{v}'-\boldsymbol{v})\boldsymbol{\sigma}\right]\times$$
$$\times\left[f(t,\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})f\left(t,\boldsymbol{r}+a\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{v}'^{*}\right)-f(t,\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})f(t,\boldsymbol{r}-a\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{v}')\right]\mathrm{d}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}+$$
$$+\frac{n}{m}\int\frac{\partial\Phi(|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|)}{\partial\boldsymbol{r}}\rho(t,\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}}f(t,\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}),\quad(1)$$

где $\rho(t,\boldsymbol{r}')=\int f(t,\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}')\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}'$; $\boldsymbol{\sigma}$ — единичный вектор; $\boldsymbol{v}^{*}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\sigma}\left((\boldsymbol{v}'-\boldsymbol{v})\boldsymbol{\sigma}\right)$; $\boldsymbol{v}'^{*}=\boldsymbol{v}'-\boldsymbol{\sigma}\left((\boldsymbol{v}'-\boldsymbol{v})\boldsymbol{\sigma}\right)$; a — диаметр области «жесткого» соударения; $\Phi(|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|)$ — дальнодействующая компонента потенциала взаимодействия двух частиц в системе.

Автокорреляционные функции могут быть представлены в форме

$$C_\delta(t)=\lim_{V\to\infty}V^{-1}\left\langle\sum_k j_\delta(v_k(0))\sum_l j_\delta(v_l(t))\right\rangle,\quad n=\frac{N}{V}=\mathrm{const},\quad(2)$$

где V — объем системы взаимодействующих частиц; $\langle\ldots\rangle$ — усреднение по равновесному большому каноническому ансамблю; $v_k(t)$ — скорость k-й частицы в момент времени t, $\delta=(\eta,\lambda)$,

$$j_\eta(\boldsymbol{v})=m\boldsymbol{v}_x\boldsymbol{v}_y,\quad j_\lambda(\boldsymbol{v})=\frac{1}{2}(mv^2-5\beta^{-1})v_x,\quad\beta=\frac{1}{K_bT};\quad(3)$$

где T — температура; m — масса частицы.

Для произвольного взаимодействия в системе выражение (2) может быть преобразовано к виду

$$C_\delta(t) = n^2 \int \mathrm{d}\boldsymbol{v}_0\, \phi(v_0) j_\delta(\boldsymbol{v}_0) \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\, \mathrm{d}\boldsymbol{v}\, \phi(\boldsymbol{v}) j_\delta(\boldsymbol{v}) \Psi(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}), \quad (4)$$

где $\Psi(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$ — отклонение функции распределения $f(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$ от равновесного значения $\phi(\boldsymbol{v})$.

Будем использовать систему нормировки, в которой $\phi(\boldsymbol{v}) = (\beta m/2\pi)^{3/2} \exp(-1/2\beta m v^2)$, при этом $f(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}) = \phi(\boldsymbol{v})(1 + \Psi(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}))$. Заметим, что следствием преобразования формулы (2) к виду (4) является ограничение на функцию $\Psi(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$

$$\Psi(0, r, v) = [n\phi(v_0)]^{-1} N(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)\delta(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0) + f(\boldsymbol{r}), \quad (5)$$

где $f(\boldsymbol{r})$ — произвольная функция координат; первое слагаемое в (5) описывает δ-образное отклонение от равновесной по скоростям в начальный момент времени. Выражение (5) содержит значительный произвол; величина v_0 может быть выбрана в интервале $(-\infty, \infty)$. Единственным ограничением на $N(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)$ является условие нормировки

$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\, N(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) = 1. \quad (6)$$

Следует, однако, подчеркнуть, что подобный произвол устраняется в процессе вычисления $C_\delta(t)$.

Таким образом, для вычисления автокорреляционных функций согласно (4) необходимо, как и в случае уравнения Больцмана–Энскога, найти решение уравнения (1) с начальным условием (5).

С учетом соотношения $f(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}) = \phi(\boldsymbol{v})(1 + \Psi(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}))$ имеем для функции $\Psi(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$ уравнение

$$\frac{\partial \Psi(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})}{\partial t} + \boldsymbol{v}\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{r}} - n\widehat{\Lambda}(\boldsymbol{v})\Psi(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}) = na^2 \int\limits_{(\boldsymbol{v}'-\boldsymbol{v})\boldsymbol{\sigma} \geqslant 0} [(\boldsymbol{v}'-\boldsymbol{v})\boldsymbol{\sigma}] \times$$
$$\times \widehat{T}[\Psi(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})\Psi(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}')]\phi(\boldsymbol{v}')\, \mathrm{d}\boldsymbol{v}'\, \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} +$$
$$+ \frac{n}{m}\frac{1}{\phi(v)}\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{v}}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}'\, \mathrm{d}\boldsymbol{v}'\, \phi(\boldsymbol{v}')\Psi(t, \boldsymbol{r}', \boldsymbol{v}')\Phi(|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|) +$$
$$+ \frac{n}{m}\frac{1}{\phi(v)}\frac{\partial(\phi\Psi)}{\partial \boldsymbol{v}}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}'\, \mathrm{d}\boldsymbol{v}'\, \phi(\boldsymbol{v}')\Psi(t, \boldsymbol{r}', \boldsymbol{v}')\Phi(|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|), \quad (7)$$

где операторы $\widehat{\Lambda}(\boldsymbol{v})$ и $\widehat{T}$ определены следующими соотношениями:

$$\widehat{\Lambda}(\boldsymbol{v})\Psi(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}) = a^2 \int\limits_{(\boldsymbol{v}'-\boldsymbol{v})\boldsymbol{\sigma} \geqslant 0} [(\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v})\boldsymbol{\sigma}]\big[\Psi(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}^*) +$$
$$+ \Psi(t, \boldsymbol{r}{+}a\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{v}'^* - \Psi(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}) - \Psi(t, \boldsymbol{r}{-}a\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{v}'\big]\phi(\boldsymbol{v}')\, \mathrm{d}\boldsymbol{v}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}, \quad (8)$$

$$\widehat{T}[\Psi(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})\Psi(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}')] =$$
$$= \Psi(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}^*)\Psi(t, \boldsymbol{r}{+}a\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{v}'^*) - \Psi(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})\Psi(t, \boldsymbol{r}{-}a\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{v}'). \quad (9)$$

Отметим, что эффекты конечных размеров области «жесткого» соударения рассматривались ранее в работах [5, 8, 9], где было показано, что смещение пространственных аргументов в (8) и (9) на $\pm a\boldsymbol{\sigma}$ приводит к поправкам высшего порядка по плотности системы. Здесь при рассмотрении влияния дальнодействующей компоненты в потенциале бинарного взаимодействия частиц системы мы будем считать, что

$$a \ll \left(\frac{|\operatorname{grad}\Phi|}{\Phi}\right)^{-1},$$

т. е. размеры области «жесткого» соударения значительно меньше расстояний, на которых существенно изменяется потенциал Φ. В уравнении (7), таким образом, будем использовать операторы $\widehat{\Lambda}_0(\boldsymbol{v})$, $\widehat{T}_0$:

$$\widehat{\Lambda}_0(\boldsymbol{v})\Psi(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}) = a^2 \int\limits_{(\boldsymbol{v}'-\boldsymbol{v})\boldsymbol{\sigma} \geqslant 0} [(\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v})\boldsymbol{\sigma}] \times$$
$$\times [\Psi(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}^*) + \Psi(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}'^*) - \Psi(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}) - \Psi(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}')]\phi(\boldsymbol{v}')\, \mathrm{d}\boldsymbol{v}'\, \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \quad (10)$$

— линеаризованный оператор Больцмана;

$$\widehat{T}_0[\Psi(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})\Psi(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}')] =$$
$$= \Psi(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}^*)\Psi(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}'^*) - \Psi(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})\Psi(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}'). \quad (11)$$

Нелинейное уравнение (7) естественно исследовать методом теории возмущений. Действительно, для асимптотически больших значений t возмущение $\Psi(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$ мало ($f(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}) \to \phi(v)$, $t \to \infty$).

В области малых t нелинейная часть уравнения (7), соответствующая «жесткому» бинарному соударению, также мала по сравнению с линейными слагаемыми, поскольку

$$\int\limits_{(\boldsymbol{v}'-\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{\sigma} \geqslant 0} \widehat{T}_0[\Psi(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})\Psi(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}')][(\boldsymbol{v}'{-}\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{\sigma}]\phi(\boldsymbol{v}')\, \mathrm{d}\boldsymbol{v}'\, \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = 0.$$

Отдельного рассмотрения требует последнее нелинейное слагаемое в (7). При малых t оно содержит производную от $\sigma(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0)$. Однако, как легко видеть, выражение для автокорреляционных функций (4) содержит усреднение по $\boldsymbol{v}_0$. При усреднении (7) по $\boldsymbol{v}_0$ нелинейный член $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}}(\phi\Psi)$ исчезает; таким образом, для этих целей теорию возмущений можно использовать и в окрестности точки $t = 0$. Представляя искомое решение уравнения (7) в виде (12):

$$\Psi = \Psi^{(0)} + \Psi^{(1)} + \ldots, \quad (12)$$

получим с учетом соотношений (10), (11) и предположения $\Psi^{(0)} \gg \Psi^{(1)}$ линеаризованное уравнение для $\Psi^{(0)}$

$$\frac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\frac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial \boldsymbol{r}} - n\widehat{\Lambda}_0\Psi^{(0)} -$$
$$- \frac{n}{m}\frac{1}{\phi}\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{v}}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}'\, \mathrm{d}\boldsymbol{v}'\, \phi(v')\Psi^{(0)}(t, \boldsymbol{r}', \boldsymbol{v}')\Phi(|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|) = 0. \quad (13)$$

Для следующего члена разложения (12), очевидно, имеет место неоднородное уравнение

$$\frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial \boldsymbol{r}} - n\widehat{\Lambda}_0\Psi^{(1)} -$$
$$- \frac{n}{m}\frac{1}{\phi}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}'\, \mathrm{d}\boldsymbol{v}'\, \phi(v')\Psi^{(1)}(t, \boldsymbol{r}', \boldsymbol{v}')\Phi(|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|) =$$
$$= na^2 \int\limits_{(\boldsymbol{v}'-\boldsymbol{v})\boldsymbol{\sigma} \geqslant 0} [(\boldsymbol{v}'{-}\boldsymbol{v})\boldsymbol{\sigma}]\widehat{T}[\Psi^{(0)}(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})\Psi(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}')]\phi(\boldsymbol{v}')\, \mathrm{d}\boldsymbol{v}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} +$$

$$+\frac{n}{m}\frac{1}{\phi}\frac{\partial(\phi\Psi^{(0)})}{\partial \boldsymbol{v}}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}'\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}'\,\phi(\boldsymbol{v}')\Psi^{(0)}(t,\boldsymbol{r}',\boldsymbol{v}')\Phi(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|). \tag{14}$$

Отметим, что начальные условия для $\Psi^{(0)},\Psi^{(1)}$ можно выбрать в виде

$$\begin{aligned}&\Psi^{(0)}(0,\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})=\Psi(0,\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}),\\&\Psi^{(1)}(0,\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})=0.\end{aligned} \tag{15}$$

Однородное уравнение (13) не содержит явной зависимости от аргумента t, поэтому его решение с начальным условием (15) может быть легко найдено:

$$\Psi^{(0)}(t,\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})=e^{-\widehat{W}_\phi(\boldsymbol{v})t}\Psi^{(0)}(0,\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}), \tag{16}$$

где

$$\widehat{W_\phi}(\boldsymbol{v})\eta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})=\left[\boldsymbol{v}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}-n\widehat{\Lambda}_0(\boldsymbol{v})\right]\eta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})-$$
$$-\frac{n}{m}\frac{1}{\phi}\frac{\partial\phi}{\partial \boldsymbol{v}}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}'\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}'\,\phi(\boldsymbol{v}')\eta(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{v}')\Phi(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|). \tag{17}$$

Поскольку зависимость правой части неоднородного уравнения (14) от t может быть определена с помощью (16), (17), его решение с нулевым начальным условием можно представить в виде

$$\Psi^{(1)}(t,\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})=\int_0^t e^{\widehat{W}_\phi(\boldsymbol{v})(t'-t)}Q(t',\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}t',$$

где

$$Q(t,\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})=na^2\int_{(\boldsymbol{v}'-\boldsymbol{v})\boldsymbol{\sigma}\geqslant 0}[(\boldsymbol{v}'-\boldsymbol{v})\boldsymbol{\sigma}]\times$$
$$\times\widehat{T}_0\left[e^{-\widehat{W}_\phi(\boldsymbol{v})t}\Psi(0,\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})e^{-\widehat{W}_\phi(\boldsymbol{v}')t}\Psi(0,\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}')\right]\mathrm{d}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}+$$
$$+\frac{n}{m}\frac{1}{\phi}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}}\left(\phi e^{-\widehat{W}_\phi(\boldsymbol{v})t}\Psi(0,\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})\right)\times$$
$$\times\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}'\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}'\,\phi(\boldsymbol{v}')e^{-\widehat{W}_\phi(\boldsymbol{v}')t}\Psi(0,\boldsymbol{r}',\boldsymbol{v}')\Phi(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|). \tag{18}$$

С учетом (16), (18) получим следующее разложение для автокорреляционных функций:

$$C_\delta(t)=C_\delta^{(1)}(t)+C_\delta^{(2)}(t), \tag{19}$$

$$C_\delta^{(1)}(t)=n^2\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}_0\,\phi(v_0)j_\delta(\boldsymbol{v}_0)\times$$
$$\times\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}\,j_\delta(\boldsymbol{v})\phi(\boldsymbol{v})e^{-\widehat{W}_\phi(\boldsymbol{v})}\Psi(0,\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}), \tag{19a}$$

$$C_\delta^{(2)}(t)=n^2\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}_0\,\phi(v_0)j_\delta(\boldsymbol{v}_0)\times$$
$$\times\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}\,j_\delta(\boldsymbol{v})\phi(\boldsymbol{v})\int_0^t e^{\widehat{W}_\phi(\boldsymbol{v})(t'-t)}Q(t',\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}t'. \tag{19b}$$

3. Асимптотика автокорреляционных функций

Отметим, что вследствие соотношения $\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}_0\,\phi(v_0)\times j_\delta(\boldsymbol{v}_0)=0$ выражение (19a) можно записать в форме

$$C_\delta^{(1)}(t)=n\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}\,j_\delta(\boldsymbol{v})\phi(\boldsymbol{v})e^{-\widehat{W}_\phi(\boldsymbol{v})t}N(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)j_\delta(\boldsymbol{v}). \tag{20}$$

Поскольку функция $N(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$ нормирована условием (6), а (20) содержит интегрирование по $\boldsymbol{r}$, можно опустить в $\widehat{W_\phi}(\boldsymbol{v})$ все слагаемые, содержащие оператор $\partial/\partial\boldsymbol{r}$, после чего найдем $C_\delta^{(1)}(t)=n(j_\delta^{(\boldsymbol{v})},e^{n\widehat{\Lambda}_0(\boldsymbol{v})t}j_\delta(\boldsymbol{v}))$ — стандартное выражение для автокорреляционной функции в линеаризованной модели Больцмана, экспоненциально убывающее с ростом t [5].

Переходя к исследованию выражения (19б) описывающего нелинейные эффекты в нашей модели, заметим, что структура $Q(t,\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})$ (18) позволяет выделить в $C_\delta^{(2)}(t)$ два слагаемых:

$$C_\delta^{(2)}(t)=C_{\delta_1}^{(2)}(t)+C_{\delta_2}^{(2)}(t), \tag{21}$$

где

$$C_{\delta_1}^{(2)}(t)=\frac{na^2}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}\,\phi(\boldsymbol{v})j_\delta(\boldsymbol{v})\int_0^t e^{(t-t')n\widehat{\Lambda}_0(\boldsymbol{v})}\,\mathrm{d}t'\times$$
$$\times\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}'\,\phi(\boldsymbol{v}')\widehat{T}_0\left[\left(e^{-t'(i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{v}'-\boldsymbol{v})-n\widehat{\Lambda}_0(\boldsymbol{v})-n\widehat{\Lambda}_0(\boldsymbol{v}')-i\boldsymbol{k}(\pi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{v})-\pi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{v}')))}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{j_\delta(\boldsymbol{v})}{\phi(\boldsymbol{v})}|N_{\boldsymbol{k}}|^2\delta(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}')+nf_{\boldsymbol{k}}N_{\boldsymbol{k}}^*j_\delta(\boldsymbol{v}')+nf_{\boldsymbol{k}}^*N_{\boldsymbol{k}}j_\delta(\boldsymbol{v})\right)\right], \tag{21a}$$

где $f_{\boldsymbol{k}}$, $N_{\boldsymbol{k}}$ — фурье-образы функций $f(\boldsymbol{r})$, $N(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$ соответственно; оператор $\pi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{v})$ определен соотношением

$$\pi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{v})\eta(\boldsymbol{v})=\frac{n}{m}\frac{1}{\phi}\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{v}}\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}'\,\eta(\boldsymbol{v}')\widetilde{\Phi}(\boldsymbol{k}), \tag{22}$$

где $\widetilde{\Phi}(\boldsymbol{k})$ — фурье-образ дальнодействующей компоненты;

$$C_{\delta_2}^{(2)}=\frac{n}{m}\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}_0\,\phi(\boldsymbol{v}_0)j_\delta(\boldsymbol{v}_0)\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}\,\phi(v)j_\delta(\boldsymbol{v})\int_0^t e^{(t-t')n\widehat{\Lambda}_0(\boldsymbol{v})}\,\mathrm{d}t'\times$$
$$\times\frac{1}{\phi(v)}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}}\left(\phi(v)e^{-\widehat{W}_\phi(\boldsymbol{v})t'}\left(\frac{1}{\phi(v_0)}N(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\delta(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_0)+nf(\boldsymbol{r})\right)\right)\times$$
$$\times\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}'\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}'\,\phi(\boldsymbol{v}')e^{-\widehat{W}_\phi(\boldsymbol{v}')t'}\left(\frac{1}{\phi(v_0)}N(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\delta(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_0)+nf(\boldsymbol{r})\right). \tag{21b}$$

Применяя при интегрировании по $\boldsymbol{r}$ в (21б) соотношение $\int f(\boldsymbol{r})g(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int f(\boldsymbol{k})g(-\boldsymbol{k})\,\mathrm{d}\boldsymbol{k}$, представим выражение для $C_{\delta_2}^{(2)}(t)$ в виде

$$C_{\delta_2}^{(2)}(t)=\frac{n}{m}\frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}\,\phi(v)j_\delta(\boldsymbol{v})\int_0^t e^{(t-t')n\widehat{\Lambda}_0(\boldsymbol{v})}\,\mathrm{d}t'\times$$
$$\times\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}'\,\phi(\boldsymbol{v}')\frac{1}{\phi(v)}\times$$
$$\times\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}}\left(\phi(v)e^{-t'(i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}')-n\widehat{\Lambda}_0(v)-n\widehat{\Lambda}_0(v')-i\boldsymbol{k}(\pi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{v})-\pi_{-\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{v}')))}\right)\times$$
$$\times\left(\frac{j_\delta(v)}{\phi(v)}|N_{\boldsymbol{k}}|^2\delta(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}')+nf_{\boldsymbol{k}}N_{\boldsymbol{k}}^*j_\delta(v')+nf_{\boldsymbol{k}}^*N_{\boldsymbol{k}}j_\delta(v)\right)\times$$
$$\times(-i\boldsymbol{k}\Phi(\boldsymbol{k})). \tag{23}$$

Асимптотическое поведение $C_{\delta_1}^{(2)}(t)$, $C_{\delta_2}^{(2)}(t)$ при $t\to\infty$ определяется структурой особенностей функции

$C_{\delta_i}^{(2)}(p)=\int\limits_0^\infty e^{pt}C_{\delta_i}^{(2)}(t)\,\mathrm{d}t$ в конечной области комплексной p-плоскости. Непосредственное вычисление $C_{\delta_i}^{(2)}(p)$ дает

$$C_{\delta_1}^{(2)}(p)=n\left(\frac{j_\delta(\boldsymbol{v})}{p-n\widehat{\Lambda}_0(\boldsymbol{v})},\quad \int \mathrm{d}\boldsymbol{v}'\,\phi(v')\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}\times\right.$$
$$\left.\times\,\widehat{T}_0\left[\frac{p_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}')}{p+i\boldsymbol{k}\big(\boldsymbol{v}-\pi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{v})+\pi_{-\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{v}')-\boldsymbol{v}'\big)-n\widehat{\Lambda}_0(\boldsymbol{v})-n\widehat{\Lambda}_0(\boldsymbol{v}')}\right]\right),\tag{24a}$$

где

$$(A(\boldsymbol{v}),B(\boldsymbol{v}))=\int\phi(v)\mathrm{A}^*(\boldsymbol{v})\mathrm{B}(\boldsymbol{v})\mathrm{d}\boldsymbol{v},\tag{25}$$

$$p_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}')=\frac{j_\delta(\boldsymbol{v}')}{\phi(\boldsymbol{v}')}|N_k|^2\delta(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}')+nf_{\boldsymbol{k}}N_{\boldsymbol{k}}^*j_\delta(\boldsymbol{v}')+nf_{\boldsymbol{k}}^*N_{\boldsymbol{k}}j_\delta(\boldsymbol{v});$$

$$C_{\delta_2}^{(2)}(p)=\frac{n}{m}\left(\frac{j_\delta(\boldsymbol{v})}{p-n\widehat{\Lambda}_0(\boldsymbol{v})},\right.$$
$$\int\mathrm{d}\boldsymbol{v}'\,\phi(\boldsymbol{v}')\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}\left(-i\boldsymbol{k}\Phi(\boldsymbol{k})\frac{1}{\phi(v)}\right)\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}}\left[\phi(v)\times\right.$$
$$\left.\left.\times\,\frac{p_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}')}{p+i\boldsymbol{k}\big(\boldsymbol{v}-\pi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{v})+\pi_{-\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{v}')-\boldsymbol{v}'\big)-n\widehat{\Lambda}_0(\boldsymbol{v})-n\widehat{\Lambda}_0(\boldsymbol{v}')}\right]\right).\tag{24b}$$

Поскольку среди собственных значений оператора $\widehat{\Lambda}_0(\boldsymbol{v})$ есть ненулевое, очевидно, что для функций (24a), (24b) точка $p=0$ является крайней правой особой точкой, и таким образом поведение величины (24a), (24b) в окрестности $p=0$ определяет искомые ведущие члены в асимптотике автокорреляционных функций при $t\to\infty$.

Все собственные функции оператора $\widehat{\Lambda}_0(\boldsymbol{v})$, соответствующие нулевому собственному значению, ортогональны $j_\delta(\boldsymbol{v})$, скалярное произведение определено посредством (25); вследствие чего структуры $\frac{j_\delta(\boldsymbol{v})}{p-n\widehat{\Lambda}_0(\boldsymbol{v})}$ в (24a), (24b) не дают сингулярной особенности в точке $p=0$, и достаточно исследовать выражение типа

$$\left(\frac{j_\delta(\boldsymbol{v})}{-n\widehat{\Lambda}_0(\boldsymbol{v})},\quad\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}\phi(\boldsymbol{v}')T_0\frac{p_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}')}{p+\widehat{S}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{v})-\widehat{S}_{-\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{v}')}\right),\tag{26}$$

где введено обозначение

$$\widehat{S}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{v})=i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{v}-\pi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{v}))-n\widehat{\Lambda}_0(\boldsymbol{v}).\tag{27}$$

Собственные функции оператора $\widehat{S}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{v})$, соответствующие собственным значениям, обращающимся в нуль при $|\boldsymbol{k}|\to 0$, были найдены в работе [7]. В нулевом приближении по $|\boldsymbol{k}|$ имеем

$$\widetilde{\Psi}_{0\boldsymbol{k}}^{(1,2)}(\boldsymbol{v})=\left(2\alpha\left(\alpha\mp\sqrt{\alpha^2-\delta^2}\right)\right)^{-1/2}\times$$
$$\times\left(\delta\Psi_0^{(1)}+\left(\alpha\mp\sqrt{\alpha^2-\delta^2}\right)\Psi_0^{(2)}\right),\tag{28}$$
$$\widetilde{\Psi}_{0\boldsymbol{k}}^{(j)}=\Psi_0^{(j)},\quad j=3,4,5,$$

где $\{\Psi_0^{(j)}\}$ — ортонормированный базис собственных функций оператора $\widehat{\Lambda}_0$, соответствующих элементарным гидродинамическим решениям линеаризованного уравнения Больцмана с волновым вектором $\boldsymbol{k}$ [5];

$$\alpha=\sqrt{\frac{5}{3}-\delta};\quad \delta=\beta n\widetilde{\Phi}(0)\sqrt{\frac{3}{20}}.$$

Отметим, что функции $\widetilde{\Psi}_{0\boldsymbol{k}}^{(1,2)}$ не являются взаимно ортогональными.

Разложим величину $p_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}')$ по собственным функциям $\widehat{S}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{v})$, $\widehat{S}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{v}')$, оставляя лишь член с функциями (28):

$$p_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}')=\sum_{i,j}p_{\boldsymbol{k}}^{(i,j)}\widetilde{\Psi}_{0\boldsymbol{k}}^{(i)}(\boldsymbol{v})\widetilde{\Psi}_{0-\boldsymbol{k}}^{(j)}(\boldsymbol{v}').\tag{29}$$

При этом для определения ведущей сингулярности в точке $p=0$ достаточно рассмотреть вместо (24a), (24b) выражения

$$C_{\delta_1}^{(2)}(p)\simeq n\left(\frac{j_\delta(\boldsymbol{v})}{-n\widehat{\Lambda}_0(\boldsymbol{v})},\quad\int\mathrm{d}\boldsymbol{v}'\,\phi(v')\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}\times\right.$$
$$\left.\times\sum_{i,j}\widehat{T}_0p_{\boldsymbol{k}}^{(i,j)}\widetilde{\Psi}_{0\boldsymbol{k}}^{(i)}(\boldsymbol{v})\widetilde{\Psi}_{0-\boldsymbol{k}}^{(j)}(\boldsymbol{v}')\big(p+z_{\boldsymbol{k}}^{(i)}+z_{-\boldsymbol{k}}^{(j)}\big)^{-1}\right),\tag{30a}$$

$$C_{\delta_2}^{(2)}(p)\simeq\frac{n}{m}\left(\frac{j_\delta(\boldsymbol{v})}{-n\widehat{\Lambda}_0(\boldsymbol{v})},\quad\int\mathrm{d}\boldsymbol{v}'\,\phi(v')\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}\widetilde{\Phi}(\boldsymbol{k})\frac{1}{\phi(v)}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}}\left(\phi(v)\sum_{i,j}p_{\boldsymbol{k}}^{(i,j)}\widetilde{\Psi}_{0\boldsymbol{k}}^{(i)}(\boldsymbol{v})\widetilde{\Psi}_{0-\boldsymbol{k}}^{(j)}(\boldsymbol{v}')\big(p+z_{\boldsymbol{k}}^{(i)}+z_{-\boldsymbol{k}}^{(j)}\big)^{-1}\right)\right),\tag{30b}$$

где $z_{\boldsymbol{k}}^{(i)}$ — собственные значения $\widehat{S}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{v})$, соответствующие собственным функциям $\widetilde{\Psi}_{0\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{v})$. Следует подчеркнуть, что $p_{\boldsymbol{k}}^{(i,j)}$ не содержат величины $f_{\boldsymbol{k}}$, поскольку одночастичные токи $j_\delta(\boldsymbol{v})$ ортогональны всем используемым нами функциям $\widetilde{\Psi}_{0\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{v})$.

Величины $z_{\boldsymbol{k}}^{(i)}$ для малых значений $|\boldsymbol{k}|$ были вычислены в работе [7]:

$$\begin{gathered}z_{\boldsymbol{k}}^{(1,2)}\simeq\pm\frac{i}{\sqrt{\beta m}}\sqrt{\alpha^2-\delta^2}|\boldsymbol{k}|+|\boldsymbol{k}|^2\frac{(D_T+2D_\eta)}{3},\\ z_{\boldsymbol{k}}^{(3)}\simeq|\boldsymbol{k}|^2D_T;\quad z_{\boldsymbol{k}}^{(4,5)}\simeq|k|^2\,D_\eta,\end{gathered}\tag{31}$$

где D_T, D_η — коэффициенты сдвиговой вязкости и термодиффузии, определяемые из уравнения Больцмана.

Заметим, что структура особенности при p=0 определяется интегрированием в (30a), (30b) в области малых $|\boldsymbol{k}|$, причем ведущий член в (30a), (30b), определяющий асимптотику корреляционных функций, соответствует тем слагаемым в суммах по (i,j), для которых $z_{\boldsymbol{k}}^{(i)}+z_{-\boldsymbol{k}}^{(j)}\sim|\boldsymbol{k}|^2$. Поскольку числитель подынтегрального выражения в (30b) содержит $\boldsymbol{k}$, в окрестности точки $p=0$ $C_{\delta_1}^{(2)}(p)\gg C_{\delta_2}^{(2)}(p)$ и поэтому $C_{\delta_1}^{(2)}(t)\gg C_{\delta_2}^{(2)}(t)$ при $t\to\infty$. Следовательно, для изучения асимптотического поведения $C_\delta^{(2)}(t)$ достаточно рассмотреть выражение

$$C_\delta^{(2)}(t)\simeq n\left(\frac{j_\delta(\boldsymbol{v})}{-n\widehat{\Lambda}_0(\boldsymbol{v})},\quad\int\mathrm{d}\boldsymbol{v}'\,\phi(v')\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}\times\right.$$

$$\times \sum_{i,j}{}^{*} \widehat{T}_0 p_{\boldsymbol{k}}^{(i,j)} \widetilde{\Psi}_{0\boldsymbol{k}}^{(i)}(\boldsymbol{v}) \widetilde{\Psi}_{0-\boldsymbol{k}}^{(j)}(\boldsymbol{v}') e^{-t\left(z_{\boldsymbol{k}}^{(i)}+z_{-\boldsymbol{k}}^{(j)}\right)} \Bigg), \quad (32)$$

где $\sum_{i,j}{}^{*}$ означает суммирование по значениям индексов (i,j), определяемых условием $\left(z_{\boldsymbol{k}}^{(i)} + z_{-\boldsymbol{k}}^{(j)}\right) \simeq \mathrm{const} \cdot k^2$. Полагая в (32) $z_{\boldsymbol{k}}^{(i)} + z_{-\boldsymbol{k}}^{(j)} = k^2(\lambda_{\boldsymbol{k}}^{(i)} + \lambda_{-\boldsymbol{k}}^{(j)})$, найдем

$$C_\delta^2(t) = -t^{-3/2} \Bigg(j_\delta(\boldsymbol{v}), \quad \int \frac{\mathrm{d}\Omega \boldsymbol{k}}{4\pi} \int \mathrm{d}\boldsymbol{v}'\, \phi(\boldsymbol{v}') \times$$

$$\times \sum_{i,j}{}^{*} \widetilde{T}_0 \Psi_{0\boldsymbol{k}}^{(i)}(\boldsymbol{v}) \Psi_{0-\boldsymbol{k}}^{(j)}(\boldsymbol{v}') p_{\boldsymbol{k}}^{(i,j)} \frac{\left(\lambda_{\boldsymbol{k}}^{(i)} + \lambda_{-\boldsymbol{k}}^{(j)}\right)^{-3/2}}{4\pi^{3/2}} \Bigg). \quad (33)$$

Таким образом, в нелинейной модели Больцмана–Энскога с дальнодействующей компонентой автокорреляционные функции также обладают степенной асимптотикой $t^{-3/2}$. Постоянные $\lambda_{\boldsymbol{k}}^{(i)}$, $\lambda_{-\boldsymbol{k}}^{(j)}$ могут быть вычислены в рамках теории Энскога; эффекты, связанные с «включением» дальнодействующей компоненты $\Phi(|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|)$, приводят к изменению величины коэффициента при $t^{-3/2}$ согласно (29), (33).

Список литературы

1. *Боголюбов Н.Н.* Проблемы динамической теории в статистической физике. М.; Л., 1946.
2. *Ernst M.H., Dorfman J.R.* // Physica. 1972. **61**. P. 157.
3. *Dorfman J.R., Cohen E.G.D.* // Phys. Rev. 1972. **A6**. P. 776.
4. *Ubbink J.T., Hauge E.H.* // Physica. 1973. **70**. P. 297.
5. *Иноземцева Н.Г., Садовников Б.И.* // ТМФ. 1977. **31**. С. 260.
6. *Боголюбов Н.Н.* // ТМФ. 1975. **24**. С. 242.
7. *Бочков С.Н., Иноземцева Н.Г, Садовников Б.И.* // ОИЯИ. p17-81-10. Дубна, 1981.
8. *Dorfman J.R., Cohen E.G.D.* // Phys. Rev. 1975. **A12**. P. 292.
9. *Sadovnikov B.I., Inozemtseva N.G.* // Physica. 1978. **94A**. P. 615.

The autocorrelation functions in the generalized Boltzmann–Enskog model

N. G. Inozemtseva[1,a], **I. I. Maslennikov**[2,b], **B. I. Sadovnikov**[2]

[1] *International University «Dubna», Universitetskaya str. 19, 141980 Dubna, Moscow Region, Russia.*

[2] *Department of Quantum Statistics and Field Theory, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.*

E-mail: [a] *nginozv@mail.ru,* [b] *ilyamaslennikov@mail.ru.*

The asymptotic behavior of autocorrelation functions for the nonlinear generalized Boltzmann-Enskog model with a long-range interaction between particles is examined. On the basic of this examination of nonlinear peculiarities of Boltzmann-Enskog kinetic equation the role of nonlinear effects near the equilibrium state is established. It is shown that the asymptotic behavior of autocorrelation functions is characterized by $t^{-3/2}$ and effects of the long-range interaction lead to the change of the coefficient in the $t^{-3/2}$. The obtained results give a closed expression for determing the asymptotic expansion of the autocorrelation functions of the velocity and thermodiffusion.

Keywords: Boltzmann–Enskog model, kinetic equations, autocorrelation functions.
PACS: 51.10.+y; 05.20.–y; 05.20.Dd.
Received 18 September 2012.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 1(2013).

Сведения об авторах

1. Иноземцева Наталья Германова — докт. физ.-мат. наук, профессор; e-mail: nginozv@mail.ru.
2. Масленников Илья Игоревич — аспирант; e-mail: ilyamaslennikov@mail.ru.
3. Садовников Борис Иосифович — докт. физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 932-80-10; e-mail: sadovnikov@phys.msu.ru.